拡張ラグランジュ分解調整法による同時最適スケジューリング

村松　健児

1. はじめに

本稿ではスケジューリング問題に含まれている複数の多様な決定の局面を，同時に最適化する方法論について解説する．これは問題の分解による部分問題の解法と調整という操作に基づいている．これが可能になるとスケジューリングのビジネスプロセスが革新されるという期待がある——．それはラグランジュ分解調整法（Lagrangian decomposition coordination method，LDC法）と，本稿の拡張ラグランジュ分解調整法（augmented Lagrangian decomposition coordination method，ALDC法）を基礎にしている．

この調整という操作は問題が凸であって初めて可能である．後で多少詳しく述べるが，スケジューリングの問題には，凸でないものが多い．例えば，段取コストが関係するとただそれだけで問題は凸でなくなる．その場合には通常のラグランジュ緩和法（Lagrangian relaxation method，LR法）における調整のメカニズムによっては解が振動して収束に至らないことが多い．そのためにそれを回避する方法が必要になる．幾つかの方法が考えられるが，どうしても避けられないときには，凸性を人工的に作り出すことによって解の収束を導かなくてはならないことになる．ところが通常の方法，すなわち拡張ラグランジュ緩和法（ALR法）と言われる方法は，問題の分離可能性を破壊してしまうので，本稿で対象とする大規模問題を分解して解く方法に対しては適用できない．そこで分離可能性を保存しながら必要な部分の凸性を人工的に作り出すための工夫が必要になる．そのための1つの方法がこのALDC法である．

Business processのinnovation，BPIには概念，フレームワークと共にそれを実現する確かな方法論が必要である．筆者は，ALDC法がスケジューリングにおけるBPIの方法論としての条件を満たしているとひそかに確信している．本稿ではこの方法論の概要を紹介したい．

ところがこの方法論には，従来のORの方法論に逆らうようなところがある．したがって，問題をどのように認識するかに始まって予備知識についての説明が長くなることをお断りしておく．ALDC法そのものはテクニカルなことで紙数はとらない．

2. スケジューリング問題と従来の解法

スケジューリング問題の基本は何か．実はこの点にBPIの新しい方法論を構築するための大きなヒントがある．何の予備知識も偏見も無く，問題の本質を考えてみれば，実際のスケジューリング問題には，生産の局面と在庫の推移の局面とがあり，さらにこれらは同じ物の表と裏の関係にある．実際，生産の計画には在庫の推移を見なくてはならないし，逆に在庫の計画には生産指示が欠かせない．

したがってスケジューリングの基本は，生産指示と在庫推移との関係を，時間軸上である計画対象期間にわたって追跡することである．ORの用語を使えば，この問題は時間最適化問題あるいは最適制御過程の問題の一つということになる．したがって，この基本がORによって取り扱えるという立場に立つか否かによって，方法論はまったく異なってくる．本稿ではもちろん前者の立場に立つ．従来の方法は後者に属する．

ところが実際には，一つの問題の中に多くの品目，複数の機械設備等が関係する．そのために当然のことながら問題は高次元の時間最適化問題となる．さらに，1つの問題の中に複数の多様な決定の局面が含まれる．何時どの機械を使って何をどれだけ作るか等がこれに当たる．

時間最適化問題については，動的計画法や最適制御理論が広く知られているが，次元の高い問題に対しては数値計算に要する時間とメモリが爆発して，今日に至るまで解くことが望めなかった．これはBellmanの“次元の呪い”としてやはり広く知られている．

むらまつ　けんじ　東海大学工学部経営工学科
〒259-1292 神奈川県平塚市北金目1117番地

そこで，スケジューリングの分野では伝統的に問題に含まれる各々の決定の局面を一度に１つずつ取り上げて，個別に対応する方法が取られ，その各々に対して固有の要素技術が開発されてきた．ところが１つの決定の局面を取り出す度に人為的制約を置くことを余儀なくされてきた．これは明らかに便宜的な方法によって可能解を見出すための現実的な妥協である．この状況は基本的には今日に至るまで変わっていない．

例えば，負荷計画の問題，ロットサイズ決定の問題，ロットの順序決定の問題，差し立ての問題，配分の問題，割り当ての問題等と呼ばれるものがそれに当たる．具体例を挙げると，ほとんどすべてのスケジューリング用アプリケーションソフトでは，品目ごとに予め何らかの方法で決定されたロットサイズを登録しておいて，パッケージでは順序のみを取り扱うという方法が伝統的に採られている．

もちろんここで予めロットサイズをいつも一定にしておく必然性は何も無い．経済発注量公式が広く知られているが，これは需要が安定していて，機械干渉の心配が無い場合には有効であっても，今日のように生産の状況がその反対の極みにあるときにははなはだ心もとなくなる．

実際には，状況に応じてロットの大きさも順序も繰り返し数も，関係することのすべてを同時に調整しない限り，全体最適化は言うに及ばず，出荷要求を満たすことすらできないという状況はいくらでもある．したがって，スケジューリングに期待するアウトプットは，それを可能にするワンセット，すなわち，計画対象期間にわたって何時何をどの設備でどれだけ生産するかについてのリストの全体である．明らかに，そこにはロット順序の決定に代表される離散的決定の局面とロットサイズの決定に見られる連続的決定の局面とが分かち難く混在している．

ところが，従来の数学は離散数学の範疇と連続数学の範疇とに二分されているから，一方を取り扱うためには他方を捨象しなければならない．ここに，従来の数学的方法によっては，スケジューリング問題は取り扱いきれないという本質的な問題がある．

従来のこうした人為的な制約と要素技術による取り扱いが今日に至るまで長い間，問題の全体最適化，システムの弾力性や適応性などに代表される動特性の向上にとって大きな障害になってきた．

3．スケジューリングの基本的要件

そこで今日のスケジューリングに求められる基本的な要件について考えてみる．第一に，在庫削減という厳しい条件のもとでクイックリスポンスが可能であること．この要求は製品の多様化やライフサイクルが極端に短くなっていることに起因する．言うは易し行うは難しで，確かな方法論が無くてはならない．第二に，部分最適化でなく全体最適化志向，第三に，弾力性，適応性などのシステムの重要な動特性を向上させることに寄与するものであること．これらの背後には次のような状況がある．変化や変動が恒常的であり，状況に応じてスケジューリングにおける当面の目的あるいはシステムの評価項目に対する優先順位が変化する．しかし，これらが変化したとしても，スケジューリングの業務に支障を来すことのないようにしたい．第四に，スケジューリング業務に対する要求のきめが細かになっていることに対応できること．これは，IT技術やメカトロニクスの発展により，指示さえあればハードウェア上ではほとんどどんな要求も達成できる状況にあることに起因する．したがってスケジューリングのソフトウェア技術が，ハードウェアと同等のレベルにまできめ細かに対応できるようになれば，それ自体がビジネスのコアコンピタンスになる時代にあるということである．

4．数学的検討

これらの基本的な要件を総合すれば，新しい方法論を従来の方法論の延長線上に期待することはできない．数学的には次の四基本要件を満たす必要がある．第一に，生産と在庫推移の両局面を計画対象期間にわたって陽に取り扱う数式モデルが組み込まれていること．第二に，様々な要求を具体的に記述できるに足るきめ細かさを持つこと．換言すれば，時間最適化モデルにおいて領域を記述するために用意される空間の次元が，従来の取り扱いでは考えられない位に高次元になること，さらにモデルを離散化して取り扱う場合には，空間の各次元に対する軸と時間軸との刻み幅を十分小さくしなくてはならないことである．第三に，最適解あるいは近似最適解のいずれであれ，とにかく解が得られるという理論的な保証を必要とすること．第四に，計算に要する時間とメモリが許容限界内に納まることである．

り，LDC 法の理解が前提になる.

5. 新方法論のフレームワーク

スケジューリングの問題には実にさまざまな要求がある。一つ確かなことは，モデルの抽象度を上げて統一的な方法を取らない限り，これらの個別の要求に一つずつ対応していたのでは，問題を解くことは期待できないということである．明らかに，これらの局面を一旦すべて数式に定式化してしまえば，以後は数学上の問題になり，基本的には式のもつ意味を捨象することができる．したがって解法には，必要なすべての局面を定式化したプロセスの数式モデルが不可欠になる。

ここまでは読者の同意を得られるであろうけれども，問題は次にこれをどのように解くかである。しかも一つの問題の中に複数の多様な決定の局面がある．ここでもやはり一つの構造に注目してその局面を取り上げる解法を考えると，その他の局面を無視しなければならないというジレンマに陥る．つまり従来のスケジューリングの要素技術を個別に使ったのでは問題全体を同時に取り扱うことは決して期待できない。

そこで発想を全く変えて，問題全体の数学的性質に注目する。すなわち問題が理論的に解けるか否かは，定式化された問題の数学的な性質に依存する．大まかに見て問題が凸であれば，解は一応求まる．これは，非線型最適化が凸解析の基礎の上に築かれていることからも明らかなように，周知の数学的事実である．ここで一応とは，精度はともかくという意味と，何らかの方法で解を探索あるいは調整すれば，との意味である。換言すれば，固有の構造の幾つかを敢えて捨象して，凸性のもとでの解の調整を解法の基本に据えることである。

スケジューリングの問題は時間最適化問題ではあるが，制約付きの最適化問題になる点では他の OR の問題と基本的に違いはない。問題の凸性と共にこの制約の存在が探索あるいは調整の方向と距離についての情報を与えてくれる。これが大きな強みである。

最後に，実際の問題には何らかの意味で分離可能性が成り立っていることに注目する必要がある。大規模であるからといってすべての局面が同じ密度で関係している訳ではない。これは何もこの問題に限らず，半ば普遍的な事実と言える．新方法論ではこの分離可能性に注目して，問題を分解に持ち込む．それをしない限り，高次元の問題を解くことは期待できない。

新方法論のフレームワークに沿う方法の 1 つが，次節の LDC 法である。ALDC 法は LDC 法の拡張であり，LDC 法の理解が前提になる.

6. LDC 法

スケジューリングにおける LDC 法の基本的な構成は，制約式の存在とその緩和，非制約最適化問題の解法，凸性による調整，分離可能性と分解，問題の分解によるモデルの分解能の向上，である．LDC 法はこれらを複合させせることにより，全体最適化とシステムの柔軟性の向上を図る。

6.1 制約式の存在とラグランジュ緩和

ラグランジュ緩和法（LR 法）に名を残す Joseph Louis Lagrange（1736-1813）はフランス革命（1789 年）の時代を生きた数学者であり，未定係数法はあまりにも有名であるが，LR 法も広く知られている。LR 法では，制約付きの最適化問題に対して，先ず制約条件にラグランジュ乗数を乗じて，目的関数に足し込むことにより，ラグランジュ関数と称する関数を定義する．それはこの問題を非制約の最適化問題に変換して取り扱うためである．ラグランジュ乗数をパラメータとして繰り返し算法により，このラグランジュ関数を最適化すれば，目的関数の最適化と制約条件の充足とを同時に達成できる。平たく言えば，パラメータの値を調整し直して，制約式を満たすまで幾度もラグランジュ関数を解くということである.

ラグランジュ定数の値を所与としたとき，問題が最小化問題であれば，ラグランジュ関数の値は常に目的関数値の下界を与えることは広く知られており，これが LR 法の一つの強みである。

6.2 非制約最適化問題の解法

LD 法では，操作が，パラメータを所与とする非制約最適化問題の解法とパラメータの調整とに二分される．スケジューリング問題の解法には，このことが極めて有効に機能している．なぜならば，先に触れたように，この種の問題には実に様々な制約があり，非制約最適化問題の解法の段階では，一旦これらの制約をすべて緩和するからこそ曲がりなりにも 1 つの解を導くことが可能になるからである．更に非制約の問題に対しては様々な解法のバリエーションを検討する余地が生まれる。例えば，問題が分離可能であれば，それが動的最適化問題であっても分解が可能になる．0-1 変数と非負の実数変数とを使い分けて，部分的に問題の構造を捨象し，残りを陽にモデルの中で取り扱うこ

とが可能になるなどである．

6.3 凸性による調整

この時パラメータの調整による最適解への収束を保証するための必要十分条件が，問題の凸性である．スケジューリングにおけるBPIの方法として極めて重要な点は，解法の基本的な手続きが，先の非制約最適化問題の解法を別にすれば，ラグランジュ乗数というパラメータの調整手続きのみによって片付くこと，さらに，凸性が成り立つ場合には，この調整の量を制約違反の量に応じて決めさえすれば，収束の早い遅いは別にしても，自動的に調整が効いて解の収束を保証できることである．

6.4 分離可能性と問題の分解

先にこの問題は高次元の時間最適化問題になり，定式化ができても一般には計算時間とメモリの面で解けないことを述べた．ところが幸いにして大抵のスケジューリング問題には分離可能性が成り立っている．生産の状態，すなわち，機械のセッティングの状態，が計画対象期間にわたって決まれば，各品目のその期間にわたる在庫推移は品目別に求めることができる．したがって，問題に現れる目的関数，制約式は，基本的には品目別の式の和の形に記述できる．そこでこの性質と先の制約条件の存在とに注目すると，ほとんどの問題は，一次元あるいは極めて低い次元の時間最適化問題に分解することができる．言い換えると，所与のラグランジュ乗数の値に対して，高次元のラグランジュ関数の最小化が，低次元の部分問題の最小化の単なる和として得られる．この分解により，時間最適化問題における“次元の呪い”は解消できる．LR法は以後LDC法になる．

6.5 問題の分解によるモデルの分解能の向上

さらに，この分解によって初めて計画対象期間と在庫推移の領域とをほとんど思い通りの精度にまで細かく離散化して取り扱うことが可能になる．その結果問題に含まれる様々な決定の局面を必要なきめ細かさでモデル化することが可能になる．それは部分問題の次元が一次元，あるいは極めて低くなれば，部分問題の解法に要する時間とメモリに細かな神経を使わなくて済むからである．実際，段取時間の関係するロットサイズスケジューリング等においては，計画対象期間を数百に刻まなくては実用に供せないことが起きる[1]．しかし問題を動的計画法によって解けば，最適性原理により，計算時間はこの刻み数に対して一次のオーダーで片付くから，それが大きな障害にはならない．

7. 解法のノウハウ

残る問題は，複数の多様な決定の局面を同時に取り扱って，全体最適化とシステムの弾力性，適応性の向上を可能にするための定式化と問題の解法である．これには決定変数の定義と定式化，問題の分解と数値計算の各段階においてそれぞれ特別な工夫が必要である．

7.1 決定変数の定義と定式化

0-1変数と非負の実数変数とを使い分けて，対象システムにおける生産のオペレーションをオブジェクトに注目して，必要なきめ細かさで，人為的な制約を置くことなくありのままに定式化する．すなわち各々の時刻tに対して，生産の詳しい状況を，単にオン，オフのみの多種類の変数により忠実に定式化する．先ずシステムに含まれるオブジェクトの種類，例えば，品目，設備などの集合I，J，に対して，その要素を順に添え字i，j，などによって記述する．次に変数δ_{ijt}は，オブジェクトのiとjが時刻tの生産に関係していれば値1を，そうでなければ0をとるものとする．基本的にはこうした0-1変数によって生産の状況は表せる．一方，所用時間を伴わない量が決定の対象であれば，直接それを1つの実数変数により定式化できる．これらの変数を用いて，生産と在庫推移の方程式，目的関数，あらゆる制約式を記述する．具体例は[1][2]に譲る．

この定式化においては0-1変数，例えば，δ_{ijt}，それ自体が問題において何か意味を持つ決定の局面を表すことはない．しかし，その反面この定式化には人為的な制約の入る余地は全くないから，このように定式化された最適化問題が解けるならば，スケジューリングに必要な情報は，何1つ捨象されること無く，ありのままに現れるはずである．したがって，その場合には全体最適化もシステムの弾力性，適応性の向上も達成される．必要なことは予めすべてモデルに組み込まれているから，状況が変化したとしても，それらに対応した最適解がいつも決まって現れるからである．

7.2 問題の分解

部分問題の次元を落とせば落とすほど全体の問題の解法に要する計算時間は少なくて済む．しかし目的関

数が，部分問題間にわたる相互間制約式に現れる変数に関して凸でない場合には，LDC法では問題は解けない．ラグランジュ定数をパラメータとする調整によっては解は収束しないからである．一方，部分問題が凸でない場合には何か適当な方法があればそれを解くことはできる．そこで凸でない部分を相互間制約式上から消して部分問題の中へ移すために，計算時間を犠牲にして，部分問題の次元を上げなくてはならないことが起きる．それが可能であれば，非凸である問題の完全な解決にはならないとしても，1つの対策にはなる．しかしこのようにしても，やはり非凸の部分が問題に残る点では変わりなく，例えば，これが次のステップでパラメータを調整して，機械干渉を解消するなど，解を滑らかに調整しようとする際の障害になる．これについても対応の余地はある．

7.3 数値計算

いずれにしても，数ある決定の局面のうちあるものは部分問題の解法の中で陽に取り扱われる．制約式についても，ある部分問題の中だけに現れる場合には，その中で陽に取り扱われて，その制約の充足は部分問題を解く度に完結する．

残りの決定の局面は，部分問題の解法において陽には取り扱われない．他の操作としてはパラメータの調整があるのみである．したがって，残りの決定の局面については，陽に解法の中で解かないにもかかわらず，調整が終了したときに，それらの最適解あるいは近似最適解がすべて同時に得られる．離散と連続の混在する決定の局面を意識せずに解くことができるのは，それらを陽に解かなくともパラメータの調整という操作によって自動的に解が求まるからである．このことがこの解法の最大の利点である．

パラメータの調整方法については，広く劣勾配法が知られているが，機械干渉の制約式に関しては改良の余地があり，検討中である．

8. ALDC法

ラグランジュ関数が，相互間制約式に現れる変数に関して，非凸である場合には，ラグランジュ乗数の調整によっては，解の収束は望めない．調整がむしろある振幅で振動を繰り返すためのメカニズムとして機能するからである．そこで，問題の分離可能性を崩さないで，人工的に凸性を生成して，解を収束に導かなくてはならない．

一例として，部分問題1と2にそれぞれ非負変数x_1とx_2が関係していて，その上限が共にaであり，さらに目的関数の中に，$cI(x_1)+cI(x_2)$があるとする．ここに，$I(x)$はインデクス関数と言われるもので，$x=0$のとき$I(x)=0$，$x>0$のとき$I(x)=1$をとる．このとき，非負定数cは一般にフィクストチャージと呼ばれるもので，その代表は段取コストである．一方，相互間制約式が，$x_1+x_2\leq a$とする．これらはラグランジュ関数の中で，ラグランジュ乗数λを用いて，次のように扱われる．

$$\cdots+cI(x_1)+cI(x_2)+\cdots+\lambda(x_1+x_2-a)\cdots$$

この関数は，部分問題1と2の最小化に際して，それぞれ，$+cI(x_1)+\lambda x_1+\cdots$，$cI(x_2)+\lambda x_2+\cdots$として取り扱われるから，$\lambda\leq-\dfrac{c}{a}$ならば$x_1$，$x_2$共に上限の値$a$をとり，その他の時，共に値0をとる．したがって，$\lambda$の値をどのように調整しても制約式の摂動$a-x_1-x_2$の値はゼロにはならない．

そこで，この振動を止めるために1回の計算における各変数の値の増分に制限を加えて，例えば上下限を，それぞれΔa，$-\Delta a$として，逐次，値を変化させることを考える．具体的には，ν回目の計算におけるx_1，x_2の値をそれぞれx_1^ν，x_2^νとし，さらに

$$\bar{c}=\begin{cases} c\left|\sum_i x_i^{\nu-1}-a\right| & \sum_i x_i^{\nu-1}\neq a\text{ のとき} \\ c & \text{その他} \end{cases}$$

とおいて

$$c\left(\sum_i x_i^{\nu-1}-a\right)\left(\sum_i x_i^{\nu}-a\right)+\bar{c}\sum_i(x_i^\nu-x_i^{\nu-1})^2$$

の2項をラグランジュ関数に追加する．$\sum_i x_i^{\nu-1}-a$の値によって，これが＋ならばx_i^νは減少し，－ならば逆に増加する．ところが第2項のコストが増分$x_i^\nu-x_i^{\nu-1}$の2乗により効いてくる．第1項と第2項からのコストは，この増分がそれぞれΔa，$-\Delta a$のときに相殺される．このようにして一回当りのx_i^νの増分を$-\Delta a$から$+\Delta a$の範囲に制限することができる．この操作を繰り返すことによって，x_1とx_2をそれぞれ問題全体として落ちつくべき値に落ちつかせることができる．

9. 結言

全体最適化とシステムの柔軟性向上を志向して問題に含まれる多様な決定の局面を同時に最適化するスケジューリングの方法論について解説した．事例1は既にプリンタのプリント配線基盤への部品実装ラインに

おいて実用に供されて，スループットの約10パーセントの向上という成果を得ている．事例2については石油活性化センターの研究に対して，新たに本方法論に基づいて行った提案である．

この方法論を適用するとしても取り扱える規模には限界がある．そこでネック工程などの重要な工程に対してこれを適用し，他の工程に対してはこの結果をベースにして従来の情報システムによる支援と共に，業務担当者，作業者等の判断，あるいは創意工夫に任せるのが現実的であると考えている．舌足らずに終わったが紙数が尽きた．

参考文献

[1] 村松健児："段取時間のある多品目ロットサイズスケジューリング：ロットの順序とサイズの同時最適化"，日本経営工学会平成11年度春季大会予稿集 p. 148-149, (1999)

[2] 村松健児："拡張ラグランジュ分解による石油精製スケジューリング" 第10回RAMPシンポジウム論文集, p. 109-126, 日本OR学会 (1999)