解説 Arrowの一般可能性定理の証明の解説

松井　知己

1. はじめに

Arrowの一般可能性定理は, 2人以上で3つ以上の選択肢を好ましい順に並べる合理的な決め方は, 誰かが独裁者になるしかない, という定理である.

定理の内容が上記のように曖昧に語られる場合が多いが, 実際の定理は, 数学的な枠組みできちんと証明される論理的な主張である. この定理の持つ衝撃を十分に味わうには, 定理の前提と主張を数学的な定義として把握する必要がある. そして定義に基づいて定理の証明を理解した後に, 冒頭の表現に立ち戻るならば, 合理性や独裁者といった概念が数学的な定理に絡めとられているという, 少し当惑する感覚を味わう事ができる.

本稿では, Arrowの一般可能性定理の証明の新たな記述を試みる. これを試みる理由は, 多くの本では数式や記号が多くならない様に記述しているのに対し, もう少し数式や記号を入れてみようというものである. 証明は, 佐伯 [4] をベースに, 全体を3つの補題に分けたので, 話はやや長い. 証明は初等的なのだが, 定理の主張が分かりにくいため, 証明の直感的な理解を妨げる傾向があるようだ. Arrowの一般可能性定理は重要であり, より広く知られるためには, 証明の記述の様々な試みがあって良いと私は思っている. では, 始めよう.

2. 選択肢が2つの場合

以下ではまず, 選択肢が2つの場合について議論しよう. A研究室では, 毎回のセミナーの後に昼食を全員で食べる. 昼食の食堂はxとyの2つしかなく, いつもどちらかに決定しなければならない. 毎回の選択を簡単にするために,「食堂の決め方」を固定してしまおうと, 教授が言い出した. 各人が, 今日はxとyのどちらが良いか, あるいはどちらも同じくらい良いという事を申告したら, その結果としてxとyのどちらかの食堂か, あるいはどちらも同じくらい良いという事が決まるような, 一覧表を作ってしまおうと言うのだ.[1]

まつい ともみ 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻
〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1
URL: http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/
E-mail: tomomi@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp

この表はどんな性質を満たしているべきだろう? 例えば極端な場合として, 全員が「xよりもyが良い」と言ったら, 結果として食堂yに行くのは, 極めて自然と思われる. そこで, 以下の性質を導入しよう.

性質1　2つの選択肢の好きな順について, 全員の申告が一方より他方が良いという意見で一致している (誰も「同じくらい良い」と申し出ておらず, 全員の申告が一致している) ならば, 結果も全員の申告に一致している.

例えば, A研究室が田村先生と松井君の2人だけならば, 性質1を満たす表には以下のようなものがある.

田 \ 松	x	y	$\simeq$
x	x^*	x	x
y	y	y^*	y
$\simeq$	$\simeq$	$\simeq$	$\simeq$

田 \ 松	x	y	$\simeq$
x	x^*	x	x
y	x	y^*	x
$\simeq$	x	x	x

上記の表で, xは「食堂xをyより好む」という申告を, yは「食堂yをxより好む」という申告を, $\simeq$は「2つの食堂を同じくらい好む」という申告を表す記号である. 上記の表で*印のついている場所が, 性質1で結果が定められる場所である. 例えば左の表は「いつでも田村先生の言う通り」, 右は「食堂yに行くのは2人が同意したときに限り, それ以外は食堂xへ行く」という表である.

2人の場合は,「2人ともxを申告する」「2人ともyを申告する」以外の$3^2-2=7$通りの場合を何にするかで, $3^7=2187$通りの表が存在する. 研究室の人数が3人なら, 3^{3^3-2}通り, n人なら3^{3^n-2}通りの表が存在する.

3. 選択肢が3つの場合

食堂がx,y,zの3つになったら何が起こるだろう. 以降では, A研究室の各メンバーをプレイヤーと呼ぶ. プレイヤーは全部でn人であり, $1,2,\ldots,n$と番号付けされているとする. 本稿では$n\geq 2$と仮定する. 食堂が3つになった際は, 次のように議論を進める. 食堂xとyについて, 前節のような表がある (研究室にはn人いる事に注意せよ). この表は, 食堂zが休みの日に使える. 食堂xが休みの日のために, 食堂yとzについても前節のような表がある. さらに, 食堂yが休みの日のために, 食堂zとxに

[1] 決定の結果が「同じくらい良い」の場合, 具体的にどうするのか? と言う疑問は当然存在するが, 一般可能性定理の証明ではこの疑問に答える必要は無い. 何故ならば, 一般可能性定理は,「同じくらい良い」という結果を許したとしても「合理的な決定方法が独裁者を導く」事を主張しているからである.「同じくらい良い」という結果を許さないのならば,「合理的な決定方法が独裁者を導く」という証明はより容易になる.

ついても同様の表がある．すなわち次の性質が成り立つ.[2]

> 性質 2 選択肢の対毎に，「対のどちらが好ましいか，あるいは同じ程度か」を全員が申告すると，決定の結果として「対のどちらが好ましいか，あるいは同じ程度か」が分かる表がある．

性質 2における表は，次のような関数として捉える事もできる．まず，x, y, z の対毎に，「対のどちらが好ましいか，あるいは同じ程度か」という申告を表す以下の集合を定義する．$\mathcal{D}_{xy} = \{(x \succ y), (y \succ x), (x \simeq y)\}$, $\mathcal{D}_{yz} = \{(y \succ z), (z \succ y), (y \simeq z)\}$, $\mathcal{D}_{zx} = \{(z \succ x), (x \succ z), (z \simeq x)\}$．ただし $(x \succ y)$ は「x の方が y より好ましい」という申告を意味し，$(x \simeq y)$ は「x と y は同じ程度に好ましい」という申告を意味する．各プレイヤーが x, y の選好を申告した際に得られる決定の結果を表す関数を $f_{xy} : \mathcal{D}^n_{xy} \to \mathcal{D}_{xy}$ とする．ただし $\mathcal{D}^n_{xy}$ は，$\mathcal{D}_{xy}$ の要素を n 個並べたもの全ての集合 $\mathcal{D}_{xy} \times \mathcal{D}_{xy} \times \cdots \times \mathcal{D}_{xy}$ である．同様に $f_{yz} : \mathcal{D}^n_{yz} \to \mathcal{D}_{yz}$ と $f_{zx} : \mathcal{D}^n_{zx} \to \mathcal{D}_{zx}$ を定義する．

上記の記号を用いると性質 1は以下のように表される．

> 性質 1 関数 f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} は以下の 6 式を全て満たす．
> $$f_{xy}((x \succ y), (x \succ y), \ldots, (x \succ y)) = (x \succ y),$$
> $$f_{xy}((y \succ x), (y \succ x), \ldots, (y \succ x)) = (y \succ x),$$
> $$f_{yz}((y \succ z), (y \succ z), \ldots, (y \succ z)) = (y \succ z),$$
> $$f_{yz}((z \succ y), (z \succ y), \ldots, (z \succ y)) = (z \succ y),$$
> $$f_{zx}((z \succ x), (z \succ x), \ldots, (z \succ x)) = (z \succ x),$$
> $$f_{zx}((x \succ z), (x \succ z), \ldots, (x \succ z)) = (x \succ z).$$

選択肢が 3 つになると，新たな問題が生じる．例えば，あるプレイヤーの申告が $((x \succ y), (y \succ z), (z \succ x))$ という様に循環していると，そのプレイヤーは 3 つの選択肢を好きな順に並べられない事になる．また $((x \succ y), (y \succ z), (z \simeq x))$ という組も，現実に何を意味するかが明確でない．

上記のような問題を引き起こさない選好の 3 つ組として，弱順序と呼ばれるものが定義されている．それは以下のような 13 通りの 3 つ組である.[3] この原稿で以後用いる略記法も併せて記しておく．下記 13 通りの 3 つ組は弱順序と呼ばれる．弱順序になっている 3 つ組 13 通りの集合を $\mathcal{D}$ と書く．すなわち，以下のように定義される．

$\mathcal{D} = \{p \in \mathcal{D}_{xy} \times \mathcal{D}_{yz} \times \mathcal{D}_{zx} \mid p = (a, b, c)$ は弱順序$\}$.

弱順序の 3 つ組	略記法
$((x \succ y), (y \succ z), (x \succ z))$	$(x \succ y \succ z)$
$((x \succ y), (z \succ y), (x \succ z))$	$(x \succ z \succ y)$
$((y \succ x), (y \succ z), (x \succ z))$	$(y \succ x \succ z)$
$((y \succ x), (y \succ z), (z \succ x))$	$(y \succ z \succ x)$
$((x \succ y), (z \succ y), (z \succ x))$	$(z \succ x \succ y)$
$((y \succ x), (z \succ y), (z \succ x))$	$(z \succ y \succ x)$
$((x \simeq y), (y \succ z), (x \succ z))$	$(x \simeq y \succ z)$
$((x \simeq y), (z \succ y), (z \succ x))$	$(z \succ x \simeq y)$
$((y \succ x), (y \simeq z), (z \succ x))$	$(y \simeq z \succ x)$
$((x \succ y), (y \simeq z), (x \succ z))$	$(x \succ y \simeq z)$
$((x \succ y), (z \succ y), (z \simeq x))$	$(z \simeq x \succ y)$
$((y \succ x), (y \succ z), (z \simeq x))$	$(y \succ z \simeq x)$
$((x \simeq y), (y \simeq z), (z \simeq x))$	$(x \simeq y \simeq z)$

弱順序でない 3 つ組は，それが実際に何を意味するかが明確でない事から，決定の結果も，弱順序になっている方が望ましいと考えられる．そこで，「すべてのプレイヤーの申告が弱順序ならば，結果も弱順序である」という性質を導入しよう．正確には以下のように記述される．

> 性質 3 関数 f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} は以下の性質を満たす．全てのプレイヤー i について，$(a_i, b_i, c_i) \in \mathcal{D}$ ならば，$(a, b, c) \in \mathcal{D}$ が成り立つ．ただし，
> $a = f_{xy}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,　$b = f_{yz}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$,
> $c = f_{zx}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ である．

例えば，次のような関数は性質 3 を満たさない．

例 1 3 つの関数として，性質 1で要求されている場合以外は，全て「同じくらい良い」となるものについて議論しよう．正確には，以下のような関数である．

$$f_{xy}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} (x \succ y) & (a_1 = \cdots = a_n = (x \succ y)), \\ (y \succ x) & (a_1 = \cdots = a_n = (y \succ x)), \\ (x \simeq y) & (\text{その他}). \end{cases}$$

$$f_{yz}(b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} (y \succ z) & (b_1 = \cdots = b_n = (y \succ z)), \\ (z \succ y) & (b_1 = \cdots = b_n = (z \succ y)), \\ (y \simeq z) & (\text{その他}). \end{cases}$$

$$f_{zx}(c_1, \ldots, c_n) = \begin{cases} (z \succ x) & (c_1 = \cdots = c_n = (z \succ x)), \\ (x \succ z) & (c_1 = \cdots = c_n = (x \succ z)), \\ (z \simeq x) & (\text{その他}). \end{cases}$$

上記の関数において，プレイヤー 1 が $(x \succ y \succ z)$ という意見を申告し，他のプレイヤー全てが $(z \succ x \succ y)$ という意見を申告したとしよう．明らかに，どのプレイヤーの意見も弱順序となっている．この時の関数値の 3 つ組は $((x \succ y), (y \simeq z), (z \simeq x))$ であり，弱順序でない．

次に独裁者を定義しよう．関数の 3 つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) が，プレイヤー j を独裁者として持つとは，(f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) が以下の (D1) ～ (D6) 全てを同時に満たす事を言う．

[2] 性質 2 は「無関係対象からの独立」と呼ばれる．それは，例えば x と y の対について決めるときは，無関係な z に依存しないで決められるという事から来ている．

[3] 弱順序は「反射律，連結律，推移律」を満たす関係 (relation) として定義されるが，ここでは全て列挙した．

(D1) 全ての $(a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{D}^n_{xy}$ において,

$[a_j=(x\succ y)$ならば$f_{xy}(a_1,\dots,a_n)=(x\succ y)]$ である.

(D2) 全ての $(a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{D}^n_{xy}$ において,

$[a_j=(y\succ x)$ならば$f_{xy}(a_1,\dots,a_n)=(y\succ x)]$ である.

(D3) 全ての $(b_1,\dots,b_n)\in\mathcal{D}^n_{yz}$ において,

$[b_j=(y\succ z)$ならば$f_{yz}(b_1,\dots,b_n)=(y\succ z)]$ である.

(D4) 全ての $(b_1,\dots,b_n)\in\mathcal{D}^n_{yz}$ において,

$[b_j=(z\succ y)$ならば$f_{yz}(b_1,\dots,b_n)=(z\succ y)]$ である.

(D5) 全ての $(c_1,\dots,c_n)\in\mathcal{D}^n_{zx}$ において,

$[c_j=(z\succ x)$ならば$f_{zx}(c_1,\dots,c_n)=(z\succ x)]$ である.

(D6) 全ての $(c_1,\dots,c_n)\in\mathcal{D}^n_{zx}$ において,

$[c_j=(x\succ z)$ならば$f_{zx}(c_1,\dots,c_n)=(x\succ z)]$ である.

上記の定義において, プレイヤー j の申告が $(x\simeq y),(y\simeq z),(z\simeq x)$ の際は 決定の結果はどうなっていても良い事に注意されたい.

Arrow の一般可能性定理は以下のものである.

> 定理 3つの選択肢 x,y,z とプレイヤー $\{1,2,\dots,n\}$ について以下が成り立つ. 3つの関数 $f_{xy}:\mathcal{D}^n_{xy}\to\mathcal{D}_{xy}$, $f_{yz}:\mathcal{D}^n_{yz}\to\mathcal{D}_{yz}$, $f_{zx}:\mathcal{D}^n_{zx}\to\mathcal{D}_{zx}$ が性質 1 と性質 3 を満たすならば, 関数の3つ組 (f_{xy},f_{yz},f_{zx}) は, プレイヤー $1,2,\dots,n$ のうち誰かを独裁者として持つ.

では証明を始めよう. 以下ではプレイヤーの集合を $N=\{1,2,\dots,n\}$ と書き, プレイヤーの部分集合を提携と呼ぶ. まず, 独裁者より緩やかな概念を定義する. これは, 証明のために技術的に導入するものである. プレイヤーの非空な提携 $N'\neq\emptyset$ について, N' 中の全員が $(x\succ y)$ を申告し, N' に入っていないプレイヤー全員が $(y\succ x)$ を申告したとき, f_{xy} の値が $(x\succ y)$ となるならば, 関数 f_{xy} は提携 N' を $(x\succ y)$- 支持提携として持つと言う. 正確には, 関数 f_{xy} と $N'\subseteq N$ が

$$a_i=\begin{cases}(x\succ y) & (i\in N'),\\ (y\succ x) & (i\in N-N'),\end{cases}$$
$$\text{ならば } f_{xy}(a_1,\dots,a_n)=(x\succ y),$$

を満たすとき, f_{xy} は N' を $(x\succ y)$- 支持提携として持つと言う. 上記と同様に, 次のような計6種類の支持提携を定義することができる.

(W1) f_{xy} は N' を $(x\succ y)$- 支持提携として持つ.

(W2) f_{xy} は N' を $(y\succ x)$- 支持提携として持つ.

(W3) f_{yz} は N' を $(y\succ z)$- 支持提携として持つ.

(W4) f_{yz} は N' を $(z\succ y)$- 支持提携として持つ.

(W5) f_{zx} は N' を $(z\succ x)$- 支持提携として持つ.

(W6) f_{zx} は N' を $(x\succ z)$- 支持提携として持つ.

関数 f_{xy} が N' を「 $(x\succ y)$- 支持提携として持つ」事と「$(y\succ x)$- 支持提携として持つ」事は, 定義が異る.

関数の3つ組 (f_{xy},f_{yz},f_{zx}) とプレイヤーの部分集合 N' が, (W1) ~ (W6) の内少なくとも1つを満たすとき, (f_{xy},f_{yz},f_{zx}) は N' を弱支持提携として持つという.[4] 独裁者の定義では「(D1) ~ (D6) 全てが成り立つ」必要があったが, 弱支持提携の定義は「(W1) ~ (W6) の内, 少なくとも1つが成り立つ」と弱い条件になっている事に注意されたい.

> 補題1 関数 f_{xy},f_{yz},f_{zx} が性質 1 と性質 3 を満たすならば, 関数の3つ組 (f_{xy},f_{yz},f_{zx}) は $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$ のうちどれかを, 弱支持提携として持つ.

証明 以下では, 関数の3つ組 (f_{xy},f_{yz},f_{zx}) が持つ最も小さな (人数の少ない) 弱支持提携は, 1人からなる事を示す. プレイヤー全員の集合 N は弱支持提携である事から, 最小の弱支持提携は必ず存在する. 最小弱支持提携は1つとは限らないが, その内の1つを N' とする. もちろん $N'\subseteq N$ であり, 現時点では $N'=N$ の可能性もある. 以下では, 最小の弱支持提携 N' が2人以上のプレイヤーを含むと仮定して矛盾を導こう. N' 中のプレイヤーを1人選び, これを j と書く事にする. また N' 中の j 以外のプレイヤーの集合を, N'' とする, すなわち $N''=N'-\{j\}\neq\emptyset$ である.

関数 f_{xy} が N' を $(x\succ y)$- 支持提携として持つ場合について議論しよう. (N' が他の選択肢対について支持提携である時も, 以下と同様に証明される.) N' に入っていないプレイヤーが (存在するならば) $(y\succ z\succ x)$ を申告し, プレイヤー j が $(z\succ x\succ y)$ を, N'' 中のプレイヤーは $(x\succ y\succ z)$ を申告した場合について議論する. すなわち上記の申告を関数の3つ組 (f_{xy},f_{yz},f_{zx}) に入力 (代入) した場合に, 3つの関数の値 (決定の結果) がどうなるかについて議論する.[5] 以下では f_{yz} の値によって場合分けを行なうが, f_{yz} の値は, 各プレイヤーの y と z に関する申告のみに依存する事に注意されたい.

(1) f_{yz} の値が $(z\succ y)$ の場合. $(z\succ y)$ を申告しているのは

[4] 佐伯 [4] の定義を援用するならば, 「片側特殊支持提携」という用語になるが, 長いので「弱支持提携」とした.

[5] 証明のこの仮定について 「プレイヤー達が他の申告をした場合は考慮しなくて良いのか?」 という質問を度々受けるが, その必要は無い. まず最初に, 関数の3つ組が与えられた (固定された) という前提で定理の主張がされていることに注目されたい (プレイヤーが関数を選ぶ訳ではない). 次に, (以下は証明完了後に判明する事であるが) 性質 3 の内「上記の特殊な弱順序の申告に対し, 結果も弱順序である」という事からだけで, 最小の弱支持提携が1人からなる事が導かれる事に注意されたい. これは, 性質 3 の「任意の弱順序の申告に対し, 結果も弱順序である」という要求が, 必要以上にきつい要求である事を示唆している.

j だけであり，他のプレイヤーは全て $(y \succ z)$ を申告している．f_{yz} の値が $(z \succ y)$ なので，関数 f_{yz} は $\{j\}$ を $(z \succ y)$- 支持提携として持つ．すなわち関数の3つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) は，$\{j\}$ を1名からなる弱支持提携として持つ．これは，最小の弱支持提携 N' が2名以上のプレイヤーを含んでいることに矛盾．

(2) f_{yz} の値が $(y \succ z)$ または $(y \simeq z)$ の場合．x と y については，N' 中のプレイヤーが $(x \succ y)$ を申告し，N' に入っていないプレイヤーは $(y \succ x)$ を申告している．関数 f_{xy} が N' を $(x \succ y)$- 支持提携として持つ事から，f_{xy} の値は $(x \succ y)$ となる．全員の申告が弱順序である事から，性質3より，結果も弱順序であり，$(x \succ y)$ と「$(y \succ z)$ または $(y \simeq z)$」より f_{zx} の値は $(x \succ z)$ でなければならない．z と x について $(x \succ z)$ を申告しているのは N'' だけであり，他のプレイヤーは全て $(z \succ x)$ を申告している．ゆえに関数 f_{zx} は N'' を $(x \succ z)$- 支持提携として持つことが導かれた．すなわち関数の3つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) は，N'' を弱支持提携として持ち，これは N' の最小性に矛盾する． □

<u>補題2</u> 関数 f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} が性質1と性質3を満たすとする．関数の3つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) が，プレイヤーの部分集合 $\{j\}$ を弱支持提携として持つならば，以下全てが成り立つ．

(a) f_{xy} は $\{j\}$ を $(x \succ y)$- 支持提携として持つ，
(b) f_{xy} は $\{j\}$ を $(y \succ x)$- 支持提携として持つ，
(c) f_{yz} は $\{j\}$ を $(y \succ z)$- 支持提携として持つ，
(d) f_{yz} は $\{j\}$ を $(z \succ y)$- 支持提携として持つ，
(e) f_{zx} は $\{j\}$ を $(z \succ x)$- 支持提携として持つ，
(f) f_{zx} は $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持つ．

<u>証明</u> 関数の3つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) が，$\{j\}$ を弱支持提携として持つならば，(W1) ～ (W6) の内どれかが成り立つ事から，(a) ～ (f) の内少なくとも1つが成り立つ事が分かる．以下の証明では，下図のように (1) ～ (6) を示す事により，(a) ～ (f) の内どれか1つが成り立てば，(a) ～ (f) 全てが成り立つ事を示す．

$$(\mathrm{a}) \overset{(1)}{\Rightarrow} (\mathrm{f}) \overset{(2)}{\Rightarrow} (\mathrm{c}) \overset{(3)}{\Rightarrow} (\mathrm{b}) \overset{(4)}{\Rightarrow} (\mathrm{e}) \overset{(5)}{\Rightarrow} (\mathrm{d}) \overset{(6)}{\Rightarrow} (\mathrm{a})$$

(1) (a) が成り立つならば (f) が成り立つ事を示す．すなわち，f_{xy} が $\{j\}$ を $(x \succ y)$- 支持提携として持っていた場合に，f_{zx} が $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持つ事を示す．プレイヤー j が $(x \succ y \succ z)$ を申告し，j 以外のプレイヤー全員が $(y \succ z \succ x)$ を申告したとしよう．x と y については，f_{xy} が $\{j\}$ を $(x \succ y)$- 支持提携として持つ事より，f_{xy} の値は $(x \succ y)$ となる．f_{yz} については，全プレイヤーが $(y \succ z)$ を申告しており，性質1より f_{yz} の値は $(y \succ z)$ となる．$(x \succ y)$ と $(y \succ z)$ が得られた事から，性質3より，f_{zx} の値は $(x \succ z)$ となるが，$(x \succ z)$ を申告しているのは j だけなので，f_{zx} は $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持つ．

(2) (f) が成り立つならば (c) が成り立つ事を示す．すなわち，f_{zx} が $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持つならば，f_{yz} は $\{j\}$ を $(y \succ z)$- 支持提携として持つ事を示す．プレイヤー j が $(y \succ x \succ z)$ を申告し，j 以外のプレイヤー全員が $(z \succ y \succ x)$ を申告したとしよう．f_{zx} は $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持つ事より，f_{zx} の値は $(x \succ z)$ となる．性質1より f_{xy} の値は $(y \succ x)$ となる．そして性質3より，f_{yz} の値は $(y \succ z)$ となる．ゆえに，f_{yz} は $\{j\}$ を $(y \succ z)$- 支持提携として持つ．

(3)「(c) ならば (b)」は，(1) と同様に示す事ができる．
(4)「(b) ならば (e)」は，(2) と同様に示す事ができる．
(5)「(e) ならば (d)」は，(1) と同様に示す事ができる．
(6)「(d) ならば (a)」は，(2) と同様に示す事ができる．□

<u>補題3</u> 関数 f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} が性質1と性質3を満たすとする．関数の3つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) がプレイヤーの部分集合 $\{j\}$ を弱支持提携として持つならば，(f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) はプレイヤー j を独裁者として持つ．

<u>証明</u> まず，独裁者の定義中の条件 (D1) について議論しよう．$(x \succ y)$ を申告したプレイヤーの集合を N_1 とし，$(y \succ x)$，$(x \simeq y)$ を申告したプレイヤーの集合をそれぞれ N_2，N_3 とする．ここで，プレイヤーの集合 N は $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ を満たしている．以下では，$j \in N_1$ のとき f_{xy} の値が $(x \succ y)$ となる事を示そう．

補題2より，f_{zx} は $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持つ．$N_1 - \{j\}$ 中のプレイヤーが (存在するならば) $(z \succ x \succ y)$ を申告し，j が $(x \succ z \succ y)$ を申告，N_2 中のプレイヤーが $(z \succ y \succ x)$ を申告，N_3 中のプレイヤーが $(z \succ y \simeq x)$ を申告したとする．この申告は，上記の N_1, N_2, N_3 の定義を満たしている事に注意されたい．補題2より，f_{zx} は $\{j\}$ を $(x \succ z)$- 支持提携として持っており，j だけが $(x \succ z)$ を申告し，残りは $(z \succ x)$ を申告しているので，f_{zx} の値は $(x \succ z)$ となる．全員 $(z \succ y)$ を申告していることから，性質1より f_{yz} の値は $(z \succ y)$ となる．ゆえに性質3より f_{xy} の値は $(x \succ y)$ となる．

(D2) ～ (D6) についても同様に証明できる． □

最後に，一般可能性定理の証明をまとめよう．補題1より，関数の3つ組 (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) は1名からなる弱支持提携必ず持ち，補題3より (f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}) はその弱支持提携を作っているプレイヤーを独裁者として持つ事が示される．以上で定理の証明は終了した．

4. おわりに

本稿で証明した主張は, 現在一般に広まっている形の定理だが, Arrow の本の第2版 [1] の第8章には改訂版として書かれているものであり, Arrow によって最初に示された定理は少し異なっている. 詳細は [1,3] を参照されたい. [1] では選択肢の数が一般の時を証明しているが, それは選択肢が3個の場合に簡単に帰着できるので, 本稿では3個の場合のみ記述した. 佐伯 [4] と今野 [8] の定理は, パレート最適性と独裁者の定義が [1] と微妙に異る.

Arrow の定理は, 合理的かつ民主的な決め方の存在が不可能である, といったような主張をしている事から, その否定的な側面を強調するため, 不可能性定理と呼ばれることも非常に多い. ちなみに Arrow の本 [1] では "general possibility theorem" と書かれており, その翻訳 [3] では「一般可能性定理」と訳されている.

この定理は非常に衝撃的な内容なのだが, その割には知名度が低いというのが私の印象である. その原因の1つとして, 定理の内容が本稿冒頭のように曖昧に語られる (場合が多い) 事があると, 私は思う. さらに, 曖昧な表現を援用して「民主主義は合理的ではありえない」といった主張が安易にされることがあるが, これには注意を要する. Arrow の定理における合理性や独裁者は, 数学的に定義される概念であり, 歴史上に実在する合理主義や独裁者とは区別しなければならない. また定理の主張は, 「誰かが独裁者になれる」のでは無く「誰かが独裁者の役を押し付けられる」という方が正しい事にも注意されたい.

Arrow の一般可能性定理の証明について, 日本語で読めるものは少ない. 以下は個人的な感想である. Arrow の本の第2版 [1] の証明は, 翻訳 [3] でも読む事ができるが, 言葉による説明が非常に多い. 翻訳 [3] は, 訳者 (長名) の注が充実している. 稲田 [2] の証明は Arrow と同じだが, 丁寧に書かれている. 佐伯 [4] は, Arrow の証明自体を分かり易く改訂しているが, 用語の定義が非常に多い.[6] 今野 [8] は, 佐伯 [4] の証明を簡潔にまとめ直しているが, 説明が非常に短く, 行間を読み取る必要がある. 奥野, 鈴村 [6] には, 定理をプレイヤーが2人のケースに帰着させるという別証明が書かれている. フェルドマン [5] と武隈 [7] には, プレイヤー数を2人に限定した場合の証明がある. 本稿を読んで興味を感じられた方には, 名著として名高い佐伯 [4] を入門書として強くお勧めする. ちなみに [4] には, Arrow の定理の証明より難しい定理の証明は, もう出てこない. また本稿のような分野の最近の話題に触れたい方には, 公共選択あるいは社会選択といったタイトルの書物を見ていただきたい.

本稿の定理の記述が, 他の本と異なる最大の点は, 性質 2(無関係対象からの独立) から話を始めた事である. これにより, 無関係対象からの独立性を 分かり易く記述することができたと思う. しかしながら, そのために, 社会選択関数の定義や個人選好の無制約性といった性質の定義が難かしくなり, 本稿ではこれらを省いてしまった. 社会選択論または公共選択論の議論をする際は, 本稿のように話を始めるのは, 以降の展開を難しくするだろう.

本稿の初稿に対して, 脚注 5の質問を何人かの方から頂いた. そこで本稿では, 「プレイヤー」を主語とする文章を避け, 「関数 (の3つ組)」を主語とする文章を積極的に用いた (例えば第2節と第3節の性質 1の記述の違いに注目されたい). 脚注 5のような疑問は, 「プレイヤーが決め方 (関数) を作る」というイメージから来るもので, それを払拭するのが良いと考えたからである. この定理は, 「初めに決め方 (関数) ありき」で主張が展開されるのだ. 特に, 「独裁者が決め方 (関数) を作る」のでは無い事を強調するため, 「プレイヤー j は独裁者である」という表現を排除し, 「関数の3つ組が j を独裁者として持つ」という記述に統一した.

個人的な感想だが, 独裁者というネーミングが, この定理の魅力を倍増させているのだと思う. 別に独裁者と名付ける必然性は無かったのだ. 例えば独裁者ではなく王様としたら, この定理の印象はずいぶん変わりそうだ. もちろん女王様でも構わない.

[6] 佐伯 [4] の証明には, 「高校生でも分かる」とあるため言い出しにくいのだが, 「私には分からなかった」という事を勇気を出して告白しておく.

参考文献

[1] K. J. Arrow : "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., John Wiley and Sons, 1963.

[2] 稲田献一 : 「新しい経済学」, 日本経済新聞社, 1965.

[3] ケネス J. アロー : 「社会的選択と個人的評価」, 長名寛明訳, 日本経済新聞社, 1977.

[4] 佐伯胖 : 「きめ方の理論」, 東京大学出版会, 1980.

[5] A. M. フェルドマン : 「厚生経済学と社会選択論」, マグロウヒルブック株式会社, 1984.

[6] 奥野正寛, 鈴村興太郎 : 「ミクロ経済学 II」, 岩波書店, 1988.

[7] 武隈愼一 : 「ミクロ経済学 増補版」, 新世社, 1989.

[8] 今野浩 : 「数理決定法入門」, 朝倉書店, 1992.