

# 複数の再生点列を持つ確率過程の 効率的なシミュレーション

Marvin K. Nakayama (訳：小沢 利久)

## 1. はじめに

実システムを表現した数学モデルの多くは大規模かつ複雑であり、解析的な手法によって評価することは一般に難しい。そのような場合によく用いられるのがシミュレーションである。シミュレーション結果を正しく解釈するためには、出力データを統計的な手法によって分析する必要があり、信頼区間の導出はそのひとつとなっている。

精度が漸近的に保証される信頼区間を得る方法として、再生過程 (regenerative process) を対象とした再生過程法 (regenerative method) がある [11~13, 15, 16]。再生過程とは、プロセスが確率的に再開始するような時刻 (再生点) を無限個含む確率過程のことであり、多くのモデルがこの性質を満たす。例えば、安定な単一サーバ待ち行列モデルでは、システムが空の時に到着した客の到着時刻が再生点に対応する。また、既約な有限マルコフ連鎖では、特定の状態への訪問時刻がそれにあたる。再生過程の見本路 (sample path) は再生点の列 (再生点列) によって独立で同一の分布 (i. i. d) に従う複数の部分 (再生サイクル) に分割される。マルコフ連鎖の場合は、ある状態を訪れた時刻から再びその状態を訪れるまでの間がひとつの再生サイクルとなる。再生過程法では、再生過程が持つこの性質を応用して性能評価尺度の信頼区間を求める。再生過程法については2章でより詳しく触れる。また、文献[27]も参考となる。

再生過程法は、生産や在庫、輸送、通信、金融といった幅広い分野に応用可能であり、IBM トーマス・ワトソン研究センター (ニューヨーク) で開発された

SAVE (the System AVailability Estimator) はその成功事例のひとつといえる。SAVE は、複雑なコンピュータシステム、特にフォールトトレラントシステムの信頼性を様々な角度から評価するためのシミュレーション・ソフトウェアパッケージである。フォールトトレラントシステムとは、非常に高い信頼性が要求されるシステムのことであり、航空機の管制、銀行の業務処理、運送会社における荷物の追跡などに使われている。通常、これらのシステムでは冗長構成を取ることによって高信頼性を実現している。例えば、ディスク損傷によるデータの損失を防ぐために、複数のディスクに同じデータを保存しておいたり、プロセッサの故障を考慮していくつかの予備プロセッサを備えていたりする。フォールトトレラントシステムは非常に大規模かつ複雑であるため、解析的な方法による分析は困難であり、シミュレーションによる評価が主となっている。一般に電子部品の故障時間は指数分布に従うとされている。よって、修理時間も指数分布に従うと仮定すると、対象としているシステムのモデルはマルコフ連鎖となり、SAVE パッケージを用いて再生過程法により評価尺度の信頼区間を求めることができる (SAVE パッケージの詳細については文献[1, 2] 及び [21~23] を参照)。

ところで、既約な有限マルコフ連鎖では、どの状態に対しても、その状態への訪問時刻の列は再生点列となるため、複数の再生点列が存在する。他の多くの再生過程もこの性質を持っている。しかし、再生過程法では、ひとつの再生点列しか利用しておらず、このような付加的な構造を活かしていない。本論文の主題は、このように複数の再生点列を持つ確率過程のシミュレーションについて論じていくことにある。得られる推定量の多くは、標準的な方法によるものよりも小さな分散を持つことが確かめられており、その意味で、分散減少法 (variance reduction method) のひとつと見られることもできる (文献[24]の11章を参照)。さらに、これら手法は計算量の増加を抑え、効率的に実装する

---

Marvin K. Nakayama  
Department of Computer and Information Science  
New Jersey Institute of Technology  
Newark, NJ 07102-1982, U. S. A.  
(翻訳) おざわ としひさ  
駒澤大学 経営学部

ことも可能である。

以下では、複数の再生点列を持つ確率過程をシミュレーションするためのふたつのアプローチについて説明していく。ひとつめは、3章で述べる置換再生過程推定量 (permuted regenerative estimator) である。もうひとつは4章で述べる準再生過程法 (semi-regenerative method) である。次章では予備知識として、標準的な再生過程法について説明する。これら説明の中では、議論を簡単にするため、対象となる確率過程を有限な状態空間  $S = \{0, 1, 2, \dots, s\}$  上の既約な離散時間マルコフ連鎖  $X = \{X_j; j=1, 2, \dots\}$  に限定する。もちろん、取りあげる手法は複数の再生点列を含むより一般的な再生過程にも適用可能である。

## 2. 再生過程法

マルコフ連鎖  $X$  がある固定された状態  $v \in S$  から開始したとする ( $X_0 = v$ )。時刻 (停止時刻) の列  $T_1 = \{T_1(0), T_1(1), T_1(2), \dots\}$  を、マルコフ連鎖  $X$  が状態  $v \in S$  にあった時刻の列とする。例えば、 $T_1(0) = 0$  は初めて状態  $v$  にあった時刻、 $T_1(1)$  は次に状態  $v$  にあった時刻である。 $v$  を復帰状態 (return state) と呼び、時刻  $T_1(k-1)$  と  $T_1(k)$  の間におけるマルコフ連鎖  $X$  の挙動を  $k$  番目の (再生)  $T_1$  サイクルと呼ぶ。今、マルコフ連鎖  $X$  を時刻0から  $T_1(m)$  までシミュレートし、 $m$  個の再生  $T_1$  サイクルが得られたとする。マルコフ性より、各  $k=0, 1, 2, \dots$  に対して、確率過程  $\{X_{T_1(k)+j}; j=0, 1, 2, \dots\}$  は同一の分布に従う (確率過程  $X$  が時刻  $T_1(0), T_1(1), T_1(2), \dots$  で確率的に再開始する) ことが分かる。さらに、各  $T_1$  サイクルも独立で同一の分布に従うことが分かる。

$f$  を状態空間  $S$  上の報酬関数とし、マルコフ連鎖  $X$  が状態  $x$  を訪れた時の報酬を  $f(x)$  とする。ここでは、定常状態における平均報酬  $r = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \sum_{j=0}^{t-1} f(X_j)$  について考える。例えば、 $X$  を安定な離散時間待ち行列モデルの待ち行列長過程とし、報酬関数  $f$  を  $f(x) = x$  で定義すると、 $r$  は定常状態における待ち行列長の期待値となる。また、ある状態部分空間  $B \subset S$  に対して  $f(x) = 1\{x \in B\}$  ととれば、 $r$  は確率過程  $X$  が状態空間  $B$  内にある定常状態確率となる ( $1\{\cdot\}$  は、条件  $\{\cdot\}$  が真であれば1、そうでなければ0の値をとる関数である)。後者の例は、フォールトトレラントシステムの定常状態における稼働率を求める場合にも用いられる。稼働率とはシステムが動作可能である時間の割合を指す。フォールトトレラントシ

ステムの評価では、 $X$  をシステム状態の時間的推移とし、 $B$  をシステムが動作可能である状態の集合にとる。

再生過程法では次の式を基に  $r$  を推定する。

$$r = \frac{E_v[\sum_{j=0}^{T_1(1)-1} f(X_j)]}{E_v[T_1(1)]} \quad (1)$$

ここで、 $E_v$  は確率過程が状態  $v$  から開始された場合の期待値を表す [12]。  $m$  個の  $T_1$  サイクルから再生過程法を使って  $r$  を推定するためには、まず、 $Y(k) = \sum_{j=T_1(k-1)}^{T_1(k)-1} f(X_j)$  と置き、 $\bar{Y}(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m Y(k)$  によって  $E_v[\sum_{j=0}^{T_1(1)-1} f(X_j)]$  の値を推定する。次に、 $\tau(k) = T_1(k) - T_1(k-1)$  と置き、 $\bar{\tau}(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m \tau(k)$  によって  $E_v[T_1(1)]$  の値を推定する。最後に、 $m$  個の  $T_1$  サイクルを基にした、 $r$  の再生過程推定量を次で与える。

$$\hat{r}(m) = \frac{\bar{Y}(m)}{\bar{\tau}(m)}$$

推定量  $\hat{r}(m)$  は次の中心極限定理を満たす。

$$m^{1/2} \frac{\hat{r}(m) - r}{\sigma_r} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

ここで、 $\sigma_r^2 = (E[Y(1)^2] + r^2 E[\tau(1)^2] - 2rE[Y(1)\tau(1)]) / (E[\tau(1)]^2)$  であり、 $D$  は分布の意味での収束、 $N(0, 1)$  は平均0、分散1の正規型確率変数を表す [27]。  $r$  の信頼区間は中心極限定理より以下の手順で得られる。まず、 $E[Y(1)^2]$  の推定量を  $V_1(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m Y(k)^2$  で、 $E[\tau(1)^2]$  の推定量を  $V_2(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m \tau(k)^2$  で与える。次に、 $E[Y(1)\tau(1)]$  の推定量を  $V_3(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m Y(k)\tau(k)$  で与える。最後に、 $\sigma_r$  の推定量を  $\hat{\sigma}_r(m)^2 = (V_1(m) + \hat{r}(m)^2 V_2(m) - 2\hat{r}(m)V_3(m)) / \bar{\tau}(m)^2$  で与える。これらを用い、 $100(1-\delta)\%$  信頼区間 ( $0 < \delta < 1$ ) は、十分大きなサイクル数  $m$  に対して

$$\left[ \hat{r}(m) - \frac{z(\delta) \hat{\sigma}_r(m)}{m^{1/2}}, \hat{r}(m) + \frac{z(\delta) \hat{\sigma}_r(m)}{m^{1/2}} \right] \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $z(\delta)$  は  $P\{N(0, 1) \leq z(\delta)\} = 1 - \delta/2$  を満たす値である。例えば、95%信頼区間では、 $z(0.05) = 1.96$  となる。

再生過程法は、定常状態における平均報酬以外の量を推定するのにも利用できる。例として、ある部分空間  $F \subset S$  に到達するまでの時間の期待値  $c$  を考える。高信頼システムでは、システムが故障となる状態の集合を  $F$  にとることで、システムが故障するまでの平均時間  $c$  を評価することができる。確率過程  $X$  が初めて状態空間  $F$  に到達した時刻を  $T_F$  とすると、一般に、 $c$  は

$$c = \frac{E_v[\min(T_1(1), T_F)]}{E_v[1\{T_F < T_1(1)\}]}$$

で与えられる[23].  $c$ に関するこの式を、再生過程法では次のようにして利用する. まず,  $k$ 番目の再生  $T_1$  サイクル ( $k=1, 2, \dots, m$ ) に対し, そのサイクル開始後, マルコフ連鎖が状態空間  $F$  に初めて入った時刻を  $T_F(k) = \min\{j > T_1(k-1) : X_j \in F\}$  とする.  $E_v[\min(T_1(1), T_F)]$  の推定量を  $N(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m \min(T_1(k), T_F(k))$  で与え,  $E_v[1\{T_F < T_1(1)\}]$  の推定量を  $D(m) = (1/m) \sum_{k=1}^m 1\{T_F(k) < T_1(k)\}$  で与える. これらを用いて,  $c$  の再生過程推定量は

$$\hat{c}(m) = \frac{N(m)}{D(m)}$$

で与えられる.  $\hat{c}(m)$  を基にした  $c$  の信頼区間についても, 式(2)で示した  $r$  の信頼区間を求めるのと同様な手順に従って得ることができる.

再生過程法が適用できる他の興味ある評価量として, 確率過程  $X$  の時間平均分散係数  $\sigma^2$  (time-average variance constant) [27] や無限期間割引コストの期待値[17]などがある. 時間平均分散係数  $\sigma^2$  とは, 確率過程  $X$  の時間平均  $\bar{X}_t = (1/t) \sum_{j=0}^t X_j$  に対して中心極限定理を適用する時に現れる分散係数であり,  $\bar{X}_t$  を基にした  $r$  の信頼区間を求めるのに必要となる[27]. 割引コストの方はファイナンスなどの分野に現れる問題である.

再生過程法は幾つかの興味ある特徴を持っている. まず, 塊平均法 (method of batch means, 文献[24] の pp. 528-529 を参照) など, 定常状態における平均値を推定する幾つかの方法が持つ初期偏差 (initialization bias) の問題を含まない点が挙げられる. 初期偏差とは, 定常状態をあまり代表しないような状態からシミュレーションを開始した場合に生じるものであり, 推定量の精度に影響を与える. 例えば, 非常に混雑している待ち行列ネットワークのシミュレーションを, 系内に客がない状態から開始したとすると, 開始してしばらくの間は, 定常状態にあるシステムでは稀にしか起きないような状況をシミュレートすることになってしまう. その他の特徴としては, 時間平均分散係数の推定量の中で最も速い収束率を持つことが挙げられる. また, 重点標本抽出法 (importance sampling) を用いる場合においても大変役に立つ (重点標本抽出法については文献[3]の第2章を参照). Glynn[20]は, 重点標本抽出推定量の構成要素である見本路尤度比の分散が, 見本路の長さによって指数的

に増加することを示した. よって, 長い見本路に対して重点標本抽出法を適用すると, 推定量の分散が非常に大きくなる可能性がある. しかし, 再生過程法を用いることで, 見本路を複数の再生サイクルに分解して分析することができ, 結果として分散を小さくすることが可能となる.

一方, 再生過程法にも幾つかの欠点がある. まず, この方法でも, 初期偏差とは異なる種類の偏り (bias) が生じる. 例えば, ふたつの標本平均の比の期待値とそれら標本平均の期待値の比は基本的に異なるため, 再生過程法で求めた期待値の比の推定量も一般には偏りを持つ. また, モデルによっては再生サイクルが非常に長くなるという問題が生じる. 例えば, 多くのノードを持つ待ち行列ネットワークのような大規模システムをシミュレートすると, 再生点の間隔は非常に長くなるであろう. これは, 得られる再生サイクル数が少なくなることを示しており, 推定量の精度保証が難しくなることを意味している (詳細については文献[3]の p. 99 を参照). 以下で説明する方法は, 再生過程法が持つこの欠点を改善したものとなっている.

### 3. 置換再生過程推定量

Calvin と Nakayama は, ふたつの再生点列を含む確率過程を対象とした置換再生過程推定量を文献[6]で初めて提案し, 続いて文献[7]でその方法を任意の数の再生点列を含む確率過程へと拡張した. 今までと同様に, 時点列  $T_1 = \{T_1(0), T_1(1), T_1(2), \dots\}$  をマルコフ連鎖  $X$  が状態  $v \in S$  を訪れた時刻の列とし, 時点列  $T_2 = \{T_2(0), T_2(1), T_2(2), \dots\}$  を他の状態  $w \in S$  を訪れた時刻の列とする. この確率過程  $X$  上で定められた性能評価尺度  $\alpha$  の推定を考える.  $\alpha$  の例としては,  $X$  が状態空間  $F$  に到達するまでの時間の期待値  $c$  や時間平均分散係数  $\sigma^2$  が挙げられる.

ふたつの再生点列を含む場合を例に, 置換再生過程推定量の基本となる考え方を説明する. 図1はそのための見本路である. 簡単化のため, 連続な状態空間  $S$  上の連続な見本路とした.  $T_1$  点列は状態  $v$  への訪問時刻の列,  $T_2$  点列は状態  $w$  への訪問時刻の列である. 確率過程  $X$  のシミュレーションを行い, 図1の上方の見本路を得たとする.  $T_1$  点列については, 例えば, 時刻  $T_1(0)$  から  $T_1(1)$  までが最初の再生サイクル, 時刻  $T_1(1)$  から  $T_1(2)$  までが次の再生サイクルとなる. この見本路には  $m=5$  個の再生  $T_1$  サイクルがあり,

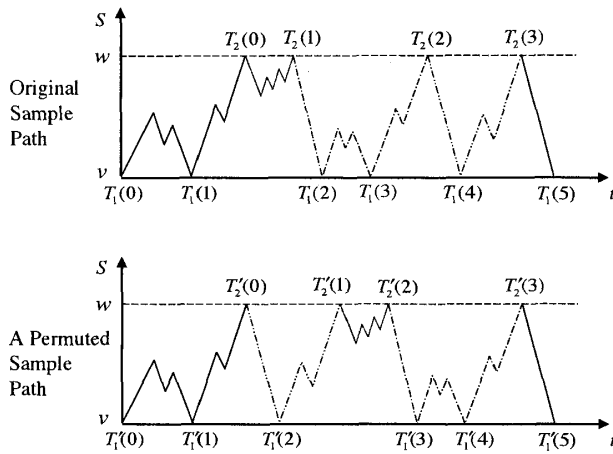


図1 ある見本路とその置換見本路

それを基にして標準的な再生過程推定量  $\bar{a}$  を求めることができる。  $T_2$  点列には  $M_2=4$  個の再生点があり、  $M_2-1=3$  個の再生サイクル ( $T_2$  サイクルと呼ぶ) が存在する。ここで、  $k$  番目の  $T_2$  サイクルとは時刻  $T_2(k-1)$  から  $T_2(k)$  までの間を指すものとする。図中では、各  $T_2$  サイクルをそれぞれ異なる線種で描いた。

次に、  $T_2$  サイクルを置換することによって元の見本路から新しい見本路を構成する。このような見本路は合計で  $(M_2-1)!=6$  個作れる。図1のふたつ目のグラフはそのような置換見本路のひとつを示しており、元の見本路における3番目の  $T_2$  サイクルが1番目に、1番目の  $T_2$  サイクルが2番目に、2番目の  $T_2$  サイクルが3番目にきている。結果として得られる再生点の新たな列をそれぞれ  $T_1'$ 、  $T_2'$  とした。置換見本路における  $T_1$  サイクルの個数は元の見本路と同じになるが、  $T_1$  サイクル内での  $X$  の挙動は異なってくる。そこで、  $(M_2-1)!$  個の置換見本路各々について  $\alpha$  の推定量を計算し、それら  $(M_2-1)!$  個の推定量の平均を新たな推定量  $\bar{a}_*$  とすることを考える。文献[6]では、  $\bar{X}$  を元の見本路、  $\bar{X}^{(1)}$ 、  $\bar{X}^{(2)}$ 、  $\dots$ 、  $\bar{X}^{(N)}$ 、  $N=(M_2-1)!$  を置換見本路とした時、各置換見本路  $\bar{X}^{(k)}$  が元の見本路  $\bar{X}$  と同じ分布に従うことが示されている。そこで、置換再生過程推定量を

$$\bar{a}_* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{a}(\bar{X}^{(k)})$$

で与えることにする。  $\bar{a}(\bar{X}^{(k)})$  は  $k$  番目の置換見本路  $\bar{X}^{(k)}$  から求めた推定量である。

文献[6]は、置換再生過程推定量  $\bar{a}_*$  が標準的な推定量  $\bar{a}$  と同じ平均値を持ち、分散はより小さくなることを証明した。さらに、全ての置換見本路を厳密に

計算することなしに  $\bar{a}_*$  の値が得られる陽な表現式を与えており、計算量の増加も予想されるほど大きくない。この表現式では、シミュレーションの実行中に幾つかの付加的な値を保持しておくことで、記憶容量や計算量の増加を最小にできる。文献[6]での数値実験では、計算時間の増加は最大でも5%であったが、分散は8分の1にまで減少した。置換再生過程法は非常に汎用的であり、他の分散減少法と組み合わせて利用することも可能である。また、文献[8]では、幾つかの置換再生過程推定量に対する中心極限定理を示している。これにより、置換再生過程推定量を基にした信頼区間を求めることが可能となる。

ふたつの再生点列を含む場合について置換再生過程推定量の基本的考え方を説明してきたが、この考え方はもっと多くの再生点列を含む場合へと拡張できる[7]。また、文献[4]では、特定の置換再生過程推定量がある種の意味で最適なことを示した。特に、離散時間有限マルコフ連鎖の場合は、全ての再生点列を用いて構成した置換再生過程推定量が分散最小不偏推定量となる。

置換というアイデアがどの程度効果的なのかを示すために、ここでは、離散時間版アーラン損失システム (Erlang loss system) のシミュレーション結果を示す。このモデルには、  $s$  個のサーバを持つひとつのステーションがあり、そこへ客が一定の率で到着する。待ち合い室はない。  $s$  個のサーバが全て稼働中の時に到着した客はサービスを受けることなしに即座に立ち去る。このモデルは、コールセンターの分析に用いられるが、そこでは、電話を掛けてくる人が客に、電話回線がサーバに対応する。

このモデルは状態空間  $S=\{0, 1, 2, \dots, s\}$  上の離散時間マルコフ連鎖  $X=\{X=j: j=1, 2, \dots\}$  となる。そこで、その推移確率行列を、非ゼロ要素を  $P(i, i+1)=s/(2i+s)=1-P(i, i-1)$ 、  $0 < i < s$ 、  $P(0, 1)=P(s, s-1)=1$  として  $P=(P(x, y): x, y \in S)$  で与える。再生点列のある状態への訪問時刻の列に対応させ、ひとつの再生点列のみを基にして構成した推定量 (再生過程推定量) と全ての系列を同時に用いて構成した置換再生過程推定量の両方を求める。実験では、  $T_1$  サイクルを復帰状態  $v$  を訪れた時刻の列とし、その復帰状態  $v$  をいろいろと変えてシミュレーションを行った。

表1, 2は、サーバ数が  $s=50$  と  $s=100$  の場合について異なる3組の実験データを用い、時間平均分散係

表1 アーラン損失モデルにおける時間平均分散の推定  
(サーバー数  $s=50$ )

$v$	標本分散		比
	標準	置換	
25	0.0028	0.0022	1.3
20	0.0045	0.0022	2.1
15	0.0136	0.0020	6.7

表2 アーラン損失モデルにおける時間平均分散の推定  
(サーバー数  $s=100$ )

$v$	標本分散		比
	標準	置換	
50	0.0058	0.0044	1.3
40	0.0115	0.0039	2.9
30	0.2341	0.0035	66.3

数  $\sigma^2$  を推定した結果である。各実験では、独立なシミュレーションを1,000回実行した。これら1,000回のシミュレーションから得られたデータを基に、時間平均分散係数  $\sigma^2$  の標準推定量(再生過程推定量)の標本分散を求め、それを各表の第2列目に示した。各表の第3列目は同様にして求めた置換再生過程推定量の標本分散である。最後の列にはこれらふたつの標本分散の比を示した。結果が比較可能となるよう、復帰状態  $v$  の値毎に、個々のシミュレーションで平均約200,000の状態推移が起きるようサイクル数を調整した。

それぞれの表において、最初の行は  $v$  の値が確率過程  $X$  の定常状態における平均値に等しい場合である。他の行では  $v$  の値をその平均から徐々にずらしていった。表より、標準推定量の分散は  $v$  の値が平均値から離れるほど大きくなっているのに対し、置換再生過程推定量ではほぼ同じ値になっていることが分かる。これは、 $v$  の値が平均値からずれるほど置換による分散減少効果が大きいことを示している(数値例では最大で66分の1となっている)。さらに、モデルのサイズが大きくなるほどその効果も大きくなっているように見える。

置換再生過程法は、置換という操作によってシミュレーションからより多くの情報を引き出し、データを再利用することでより良い推定量を得る方法であると

言える。この点はシミュレーションや統計の分野で用いられている他の方法に共通する。例えば、bootstrap and jackknife[14]といった統計分野における再抽出法(resampling method)は、ある特別な方法によりデータを再利用して推定量を得ている。関連するその他の方法としては、U統計法(U-statistics, 文献[26]の第5章)やV統計法(V-statistics, 文献[25])、置換テスト法(permutation tests, 文献[10]など)がある。制御変量法(control variates)と呼ばれる分散減少法もそのひとつである(文献[24]の11.4節を参照)。

#### 4. 準再生過程法

複数の再生点列を活用するもうひとつの方法として、Calvin, Glynn, Nakayama によって開発された準再生過程法(semi-regenerative method)[5]がある。この手法は、準再生過程(semi-regenerative process)[9]と深く関係しており、名前はそれに由来する。今、ある確率過程上で定義された時点列(停止時刻の列)  $T=\{T(0), T(1), T(2), \dots\}$  を考え、時刻  $T(i)$  と  $T(k)$  での状態が同じ( $X_{T(i)}=X_{T(k)}$ )であったならば、時刻  $T(i)$  以降における挙動  $\{X_{T(i)+j}: j=0, 1, 2, \dots\}$  と時刻  $T(k)$  以降での挙動  $\{X_{T(k)+j}: j=0, 1, 2, \dots\}$  が同じ分布に従うとする。このような時点列を持つ確率過程が準再生過程である。例としては、有限な状態空間  $S$  上の既約なマルコフ連鎖  $X=\{X_j: j=0, 1, 2, \dots\}$  が挙げられる。この例では、ある状態集合  $A=\{x_1, x_2, \dots, x_d\} \subset S$  に対し、 $X$  が集合  $A$  を訪れた時点列を  $T$  にとればよい。集合  $A$  がひとつの要素からなる場合、時点列  $T$  は再生点列となる。以下では、このマルコフ連鎖  $X$  を用いて準再生過程法を説明することにし、時点列  $T$  を集合  $A=\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$  への訪問時刻の列と定義しておく。

再生過程法では、ある状態  $v \in S$  への訪問時刻の列を再生点列とし、それを基に統計データを集めた。これに対し、準再生過程法では、集合  $A$  への訪問時刻によって分割された見本路を基にデータを集める。以下では、集合  $A$  への連続するふたつの訪問時刻で区切られた部分(見本路の一部)を軌道(trajec-tory)と呼ぶことにする。マルコフ連鎖がある状態  $x_i \in A$  から開始されたとし、 $T(0)=0, T(1), T(2), \dots$  をマルコフ連鎖  $X$  が集合  $A$  内にあった時刻の列とすると、時刻  $T(k-1)$  と  $T(k)$  の間におけるマルコフ連鎖の挙動が  $k$  番目の軌道となる。確率過程  $W=$

( $W_k: k=0, 1, 2, \dots$ )を  $W_k = X_{T(k)}$ , すなわち,  $W_k$ が時刻  $T(k)$ でのマルコフ連鎖  $X$ の状態となるように定義する. この  $W$ がマルコフ連鎖となることは直ぐに分かる.  $R = (R(x_i, x_j): i, j=1, 2, \dots, d)$ をその  $W$ の推移確率行列とする.  $R(x_i, x_j)$ は状態  $x_i \in A$ から開始された軌道が状態  $x_j \in A$ で終了する確率である.

まず初めに, 第2章で取りあげた定常状態における期待報酬  $r$ について考える. 準再生過程法では次の式を基にして  $r$ を推定する[5].

$$r = \frac{\sum_{x_i \in A} \rho(x_i) E_{x_i}[\sum_{j=0}^{\infty} f(X_j)]}{\sum_{x_i \in A} \rho(x_i) E_{x_i}[T]} \quad (3)$$

この式において,  $T$ は確率過程  $X$ が初めて集合  $A$ に戻るまでの時間,  $E_{x_i}$ は初期状態を  $x_i$ とした時の期待値である.  $\rho = (\rho(x_i): x_i \in A)$ は  $W$ の定常分布であり, 方程式  $\rho = \rho R$ と条件  $\rho \geq 0, \sum_{x_i \in A} \rho(x_i) = 1$ を満たすベクトルである.

式(3)を基にした  $r$ の推定量は, 階層化抽出の方法 (stratified sampling approach) を用いて構成することができる. この方法では,  $i$ 番目の層 (stratum) が状態  $x_i \in A$ から開始された軌道に対応するように  $d$ 個の層を定義する.  $p_1, p_2, \dots, p_d$ を和が1となるような  $d$ 個の正数とし,  $n$ を総抽出見積り (total "sampling budget") とする. この  $n$ は生成させる軌道の総個数となる. まず,  $i=1, 2, \dots, d$ に対して, 状態  $x_i$ から開始された軌道を  $[p_i n]$ 個生成させる (実数  $b$ に対し,  $[b]$ は  $b$ を超えない最大の整数を表す). 状態  $x_i$ から開始された軌道は初めて集合  $A$ へ戻った時点で終了となるが,  $E_{x_i}[\sum_{j=0}^{\infty} f(X_j)]$ と  $E_{x_i}[T]$ の推定量をこの軌道上での標本平均として与える.  $W$ の定常分布  $\rho$ は次のように推定する. まず初めに,  $W$ の推移確率行列  $R$ の要素  $R(x_i, x_j)$ を, 状態  $x_i$ から開始された軌道が状態  $x_j$ で終了する割合として求める. 大きさ  $n$ の抽出見積りから得られた  $R$ の推定量を  $R_n$ としておく. 次に, 定常方程式  $\rho_n = \rho_n R_n$ を  $\rho_n$ について解き, それを  $\rho$ の推定量とする. 以上の結果得られた,  $\rho, E_{x_i}[\sum_{j=0}^{\infty} f(X_j)], E_{x_i}[T]$ の推定量を式(3)に代入して,  $r$ の推定量  $\hat{r}_n$ が得られる. 文献[5]では,  $\hat{r}_n$ が中心極限定理を満たすことが証明されており, その結果を用いて  $\hat{r}_n$ を基にした  $r$ の信頼区間を求めている.

このような層別法 (stratification scheme) には, 標準的な再生過程法にはない自由度 (層の重み  $p_1, p_2, \dots, p_d$ の設定) が付け加わる. 文献[5]では, モデルに依存する形ではあるが最適な重み付けを表す式を求

めており, また, それらの式で示された値を推定する方法についても述べている. さらに, この文献では, 状態数7のマルコフ連鎖について,  $r$ の標準的な推定量と階層化推定量を比較した結果も示している. ただし, 階層化推定量は最適な重み付けで階層化抽出の方法を適用して求めたもの, 標準的な推定量は元のマルコフ連鎖  $X$ のシミュレーション結果から時間平均  $(1/n)\sum_{j=0}^{n-1} X_j$ を計算して求めたものである. 比較の結果, 層別法を用いることで, 分散がほぼ12%減少するのが分かった.

上記では層別法を用いて平均を推定する場合を例に準再生過程法を説明したが, 準再生過程法はそれ以外の場合へも適用可能である[5]. また, 準再生過程法は, 時間平均分散係数や平均到達時間, モデルパラメータに関する性能評価尺度の微分 (尤度比法を利用) など, さまざまな量の推定にも応用できる[19, 28, 29]. 微分情報は確率的最適化アルゴリズムにおいて有益なものであり, また, システムのクリティカル部分を特定するのに役立つ. 例えば, 高信頼システムの設計では, 各装置の故障率に関するシステム平均故障時間の微分を計算し, その微分値が最も大きくなるような装置群を改善対象とすればよい. さらに, 文献[5]では, 準再生過程法と重点標本抽出法を結び付ける方法や, それを用いて偏りの少ない推定量を求める方法についても述べている.

準再生過程法を重点標本抽出法と一緒に用いることの利点は, 重点標本抽出法の実装を, 扱っている問題に合った形へと作り直せる点にある[5]. また, 準再生過程法と重点標本抽出法と一緒に用いて生成した軌道は, 再生過程法と一緒に用いて得られる再生サイクルよりも一般に短い (すなわち, より少ない状態推移しか持たない). Glynn[20]が示しているように, 尤度比の分散は状態推移数に従って指数的に増加することから, 軌道が短いというこの事実は, 準再生過程推定量がより雑音の少ない推定量であることを示唆している.

尤度比微分法 (likelihood ratio derivative method) の場合も, 軌道からデータを集めた方が有利である. 文献[18, 28]での分析結果は, 尤度比微分法の分散が観測時間の長さ (状態推移の数) に対して線形に増加することを示唆しており, 再生過程法を用いるよりも準再生過程法を用いた方が分散がより小さくなると考えられる.

## 5. おわりに

複数の再生点列を持つ確率過程をシミュレートするふたつの方法として、置換再生過程推定量と準再生過程法について述べてきた。これらの手法は、標準的な再生過程法が無視してきた付加的な構造、複数の再生点列を持つという構造を活用したものであり、結果としてより小さな分散を持った推定量が得られる。また、これら手法は非常に少ない計算オーバーヘッドで実行できる効率的な方法でもある。これら手法のほとんどは、対象とする確率過程が複数の再生点列を持っていれば適用可能であり、モデルが持つ固有の特性には依存しない。その意味で、非常に汎用的なものであり、他の分散減少法と一緒に用いることも可能である。

本論で示した手法は、標準的な再生過程法が持つ大きな欠点のひとつ、非常に長い再生サイクルが生成される可能性を解決するものである。この欠点を持ったモデルでは、非常に少ない数の再生サイクルしか得られない可能性がある。再生過程法を基にした推定量や信頼区間は、再生サイクル数が大きくなるに従って漸近的にその精度が向上していくものであり、数個の再生サイクルしか含まないようなデータから得られた結果にはあまり良い精度は期待できない。それに対し、準再生過程法では、再生サイクルよりも短い軌道を基にデータを集めるので、より多くの観測値を利用できる。

### 参考文献

- [1] Blum, A., P. Heidelberger, S. S. Lavenberg, M. K. Nakayama and P. Shahabuddin: System Availability Estimator (SAVE) language reference and user's manual version 4.0. *Research Report RA 219 S, IBM T. J. Watson Research Center* (1993).
- [2] Blum, A., P. Heidelberger, S. S. Lavenberg, M. K. Nakayama and P. Shahabuddin: Modeling and analysis of system availability using SAVE. *The 23rd International Symposium on Fault Tolerant Computing* (1994) 137-141.
- [3] Bratley, P., B. L. Fox and L. E. Schrage: *A Guide to Simulation, Second Edition*. (Springer-Verlag, 1987).
- [4] Calvin, J. M., P. W. Glynn and M. K. Nakayama: On the small-sample optimality of multiple-regeneration estimators. *The 1999 Winter Simulation Conference, Phoenix, Arizona* (1999) 655-661.
- [5] Calvin, J. M., P. W. Glynn and M. K. Nakayama: The semi-regenerative method of simulation output analysis. *Forthcoming* (2000).
- [6] Calvin, J. M. and M. K. Nakayama: Using permutations in regenerative simulations to reduce variance. *ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation*, 8 (1998) 153-193.
- [7] Calvin, J. M. and M. K. Nakayama: Simulation of processes with multiple regeneration sequence. *Probability in the Engineering and Information Science*, 14 (2000) 179-201.
- [8] Calvin, J. M. and M. K. Nakayama: Central limit theorems for permuted regenerative estimator. *Operations Research*, 48 (2000) 776-787.
- [9] Çinlar, E.: *Introduction to Stochastic Processes*. (Prentice-Hall, 1975).
- [10] Conover, W. J.: *Practical Nonparametric Statistics, Second Edition*. (Wiley, 1980).
- [11] Crane, M. A. and Donald L. Iglehart: Simulating stable stochastic systems, I: General multiserver queues. *J. of the ACM*, 21 (1) (1974) 103-113.
- [12] Crane, M. A. and Donald L. Iglehart: Simulating stable stochastic systems, II: Markov chain. *J. of the ACM*, 21 (1) (1974) 114-123.
- [13] Crane, M. A. and Donald L. Iglehart: Simulating stable stochastic systems, III: Regenerative processes and discrete-event simulations. *Operations Research*, 23 (1975) 33-45.
- [14] Efron, B.: Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7 (1979) 1-26.
- [15] Fishman, G. S.: Statistical analysis for queueing simulations. *Management Science*, 20 (1973) 363-369.
- [16] Fishman, G. S.: Estimation in multiserver queueing simulations. *Operations Research*, 22 (1974) 72-78.
- [17] Fox, B. L. and P. W. Glynn: Estimating discounted costs. *Management Science*, 35 (1989) 1297-1325.
- [18] Glynn, P. W.: Likelihood ratio derivative estimator: An overview. *The 1987 Winter Simulation Conference* (1987) 366-375.
- [19] Glynn, P. W.: Likelihood ratio derivative estimators for stochastic systems. *Comm. ACM*, 33 (1990) 75-84.
- [20] Glynn, P. W.: Importance sampling for Markov chains: Asymptotics for the variance. *Stochastic Models*, 10 (1994) 701-717.
- [21] Goyal, A., W. C. Carter, E. de Souza, S. S. Lavenberg and K. S. Trivedi: The system availability

- estimator. *The Sixteenth Symposium on Fault-Tolerant Computing*, IEEE Press (1986) 84-89.
- [22] Goyal, A. and S.S. Lavenberg: Modeling and analysis of computer system availability *IBM J. of Research and Development*, 31, 6 (1987) 651-664.
- [23] Goyal, A., P. Shahabuddin, P. Heidelberger, V. Nicola and P.W. Glynn: A unified framework for simulating Markovian models of highly dependable systems. *IEEE Trans. on Computers*, C-41 (1992) 36-51.
- [24] Law, A.M. and W.D. Kelton: *Simulation Modeling and Analysis, Third Edition*. (McGraw-Hill, 1999).
- [25] Sen, P.K.: Some invariance principles relating to jackknifing and their role in sequential analysis. *Annals of Statistics*, 5 (1977) 316-329.
- [26] Serfling, R.J.: *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. (John Wiley & Sons, 1980).
- [27] Shedler, G.S.: *Regenerative Stochastic Simulation*. (Academic Press, 1993).
- [28] Reiman, M.I. and Weiss, A.: Sensitivity analysis for simulations via likelihood ratios. *Operations Research*, 37 (1989) 830-844.
- [29] Rubinstein, R.Y.: The score function approach for sensitivity analysis of computer simulation models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28 (1986) 351-379.