

# サンプルパス最適化の 確率的離散事象システムへの適用

石塚 陽, 山下 英明

## 1. はじめに

確率的な離散事象システムに含まれる設計パラメータを、そのシステムの性能評価尺度を最適にするように決める問題を考えます。

この種の最適化を難しくする一因に、システムの評価尺度が設計パラメータの陽な関数として与えられず、数値的にさえもその値を求めることが困難な場合が多いことがあげられます。例えば、有限バッファを有する待ち行列ネットワークで表現されるようなシステムの場合、サービス時間が指数分布などの相型分布に従うのであれば、平衡状態方程式を解いて定常状態確率を求めることによって、スループット、平均滞在時間、平均系内人数などの評価指数を得ることができます。しかし、この場合システムが中規模であってもその状態数が膨大となり、実際に平衡状態方程式を解くことは現実的ではありません。

そこで、このようなシステムの性能評価およびその最適化においては、(a)性能評価尺度を近似する関数の利用、あるいは(b)シミュレーションに基づく方法、などが用いられます。本稿では、後者のシミュレーションに基づく最適化、特にシミュレーションに用いられるサンプル(乱数列)を固定し、そのもとで得られる性能評価尺度を最適にするパラメータを決定するサンプルパス最適化法とその簡単な数値実験の結果を紹介します。要するに、サンプルパス最適化法は「性能評価尺度の値をシミュレーションで求めながらそれを最適にするパラメータを決める」というごく素朴な方法なのですが、あるクラスのシステムでは、シミュレーションの過程が比較的単純な漸化式で表現されるため、性能評価尺度(の近似値)が設計パラメータの関数としてある程度陽に表現できて、その最適化に既存の数

理計画法を適用できる、というメリットがあります。

サンプルパス最適化に関する理論的解析および応用については文献[3~5]を、これ以外のシミュレーションに基づく確率システムの最適化に関しては本特集の他の記事や、文献[2,6]などを参照してください。

2章でサンプルパス最適化の大枠の定式化を述べた後、3章で性能評価尺度の解析値があらかじめわかるような簡単なシステムの例に対してサンプルパス最適化法を適用して、たしかに真の最適解に近い解が求まることを確認します。4章では収束性の理論をごく簡単に紹介します。5章では、やや実的な応用として、直列型生産ラインシステムにおいてスループットを最大にする平均加工時間配分を求める問題を考えます。

## 2. 定式化

$f_N(\theta)$ ,  $N=1, 2, \dots$ を $\theta$ をパラメータとする確率空間 $(\Omega, F, P(\cdot; \theta))$ 上の確率変数とし、あるサンプル $\omega \in \Omega$ に対するこれらの実現値を $f_N(\omega; \theta)$ のように書くことにします。例えば、待ち行列ネットワークシステムの場合、 $\theta$ は各サーバのサービス時間分布を決めるパラメータやバッファ容量、 $f_N$ は $N$ 人目の客の退去時刻までのシステムのスループットなどと考えられます。ここでの目的は、ある任意のサンプル $\omega \in \Omega$ に対する評価尺度 $F$ (例えばシステムのスループット)の値

$$F(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\omega; \theta)$$

を最大にするパラメータ $\theta$ を求めることです。パラメータ $\theta$ の制約集合を $S$ で表すと、この問題は以下のような最適化問題になります。

$$(P) \begin{cases} \max F(\theta) \\ \text{subj. to } \theta \in S \end{cases} \quad (1)$$

一般に $F(\theta)$ の厳密な値を求めることは困難ですが、サンプルパス最適化では、この関数を固定されたサンプルのもとでのシミュレーションによって近似することを考えます。すなわち、

いしづか よう 上智大学理工学部  
〒102-8554 東京都千代田区紀尾井町7-1  
やました ひであき 東北大学 大学院経済学研究科  
〒980-8576 仙台市青葉区川内

$$F_N(\theta) = f_N(\omega; \theta)$$

とすれば,

$$F(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\theta) \text{ for all } \theta \in S \quad (2)$$

なので, 最適化問題 (P) は十分大きい  $N$  に対して

$$(P_N) \begin{cases} \max F_N(\theta) \\ \text{subj. to } \theta \in S \end{cases} \quad (3)$$

で近似できるだろう, というのがサンプルパス最適化の考え方です. つまり, 十分大きな  $N$  に対して問題  $(P_N)$  の最適解が問題 (P) の近似的な最適解となることを期待するわけです. 実際, 4章で述べるように, 例えば  $F_N$  が  $F$  に一様収束し,  $S$  がコンパクト集合であれば,  $(P_N)$  の最適解は (P) の最適解に収束することがわかっています.

$\omega \in \Omega$  を待ち行列システムにおける到着間隔時間やサービス時間を生成するための乱数系列などのように, 離散事象システムを駆動するクロックサンプルとしましょう. 一般に, このサンプルが与えられたもとでは, 時刻  $N$  での評価尺度の値  $F_N(\theta)$  は容易に計算することができます (通常のシミュレーションをすることに相当します). 例えば, 待ち行列システムの場合,  $F_N$  としては, 最初の  $N$  人目の客の到着時刻におけるスループット, あるいは  $N$  個の再生サイクルにおけるスループットの平均などをとればよいでしょう. 特に, サービス順序がサービス時間に関して不変であるような待ち行列システムや, より一般には「単調な」離散事象システム [1] の場合, サンプルを固定したもとのシミュレーションは加法および max 操作を含む単純な漸化式で表現でき, さらに,  $F_N(\theta) = f(\omega; \theta)$  の実現値が  $\omega$  の簡単な式で表現できれば, 問題  $(P_N)$  は確定的な最適化問題となります. 例えば, サーバ  $i$  における  $j$  番目の客のサービス時間  $S_{i,j}$  の分布関数が  $G(\cdot; \theta)$  であるとし,  $S_{i,j}$  を定めるサンプルを  $[0, 1]$  上の一様乱数  $\omega_{i,j}$  とすれば, サービス時間の実現値は  $S_{i,j}(\theta) = G^{-1}(\omega_{i,j}; \theta)$  で与えられるので, これを用いて種々の評価尺度の値を  $\theta$  の関数として表現することができます. このようなアプローチの利点として, 近似最適解を既存の数理計画法の手法で得ることができるということがあげられます.

したがって, このサンプルパス最適化が有効に機能するためには,  $(P_N)$  の目的関数  $F_N$  が  $\theta$  の単純な, 既存の数理計画法が扱うことができるような関数として表現できることが望まれます. 以下で, 性能評価尺度やその最適値がわかるような簡単な例を具体的に見

てみましょう. 3.1 節の例は単調なシステムの例で, 3.2 節の例はやや複雑なシステムの例になっています.

### 3. 簡単な例

#### 3.1 2ステージ直列型待ち行列

図 3.1 のような直列型の待ち行列システムを考えます. ここで, ステーション 1 の前には無限のバッファ容量があり, すでに無限人の客が並んでいるものとして, ステーション 2 のバッファ容量は (ステーション内の客も含めて)  $B$  とします. また, ステーション  $i$  のサービス時間は率  $\mu_i$  の指数分布に従い, サービス規律は FIFO, ブロッキングは生産ブロッキングとします. このシステムにおいて, 性能評価尺度をシステムのスループット  $TH$  とステーション 2 における平均系内人数  $WIP$  の重みつき和

$$J(\mu, B) = \alpha TH - \beta WIP \quad (4)$$

として, これを最大にするサービス率配分  $\mu$  やバッファ容量  $B$  を決める問題を考えます. もちろん, このシステムは  $M/M/1/(B+1)$  システムですから,  $J$  は  $(\mu, B)$  の陽な関数と表せて, 直接最適化することも可能です. この問題に前述のサンプルパス最適化を適用し, 真の最適解との誤差を見てみましょう.

ステーション  $i$  での  $j$  番目の客のサービス時間を  $S_{i,j}$ ,  $j$  番目の客の退去時刻を  $D_{i,j}$  で表すと,  $D_{i,j}$  は以下の漸化式で与えられます.

$$D_{1,j} = \max\{D_{1,j-1} + S_{1,j}, D_{2,j-B}\} \quad (5)$$

$$D_{2,j} = \max\{D_{1,j}, D_{2,j-1}\} + S_{2,j} \quad (6)$$

また, サービス時間  $S_{i,j}$  を定めるサンプル  $\omega_{i,j}$  を  $[0, 1]$  の一様乱数とすれば, サービス時間は

$$S_{i,j}(\mu_i) = -\frac{1}{\mu_i} \log \omega_{i,j} \quad (7)$$

と定めることができます. このサンプル  $\omega = (\omega_{i,j})$  を固定したもとの各退去時刻は, 上の (5), (6) の  $S_{i,j}$  に (7) を代入することによって,  $D_{i,j}(\mu, B)$  のように  $(\mu, B)$  の関数となります. このとき,  $TH$  と  $WIP$  をそれぞれ最初の  $N$  人の客の退去時刻から求められる値

$$TH_N(\mu, B) = \frac{N}{D_{2,N}(\mu, B)} \quad (8)$$

$$WIP_N(\mu, B)$$

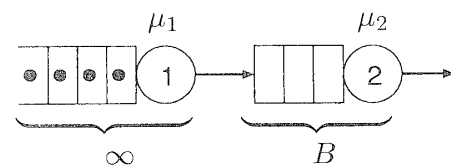


図 3.1 2ステージ待ち行列システム

$$= \frac{\sum_{j=1}^N \{D_{2,j}(\boldsymbol{\mu}, B) - D_{1,j}(\boldsymbol{\mu}, B)\}}{D_{2,N}(\boldsymbol{\mu}, B)} \quad (9)$$

によって近似すると

$$J_N(\boldsymbol{\mu}, B) = \alpha TH_N(\boldsymbol{\mu}, B) - \beta WIP_N(\boldsymbol{\mu}, B) \quad (10)$$

は性能評価尺度  $J(\boldsymbol{\mu}, B)$  の近似値と見なすことができます。以下では  $\alpha=8, \beta=1$  として数値実験を行います。

### (サービス率配分問題)

まず、バッファ容量  $B$  が  $\bar{B}$  に固定されていて、さらに  $\mu_1$  と  $\mu_2$  の合計が  $\mu_{\text{total}}$  に固定されているもとの最適サービス率配分問題

$$(P_1) \begin{cases} \max F_1(\boldsymbol{\mu}) = J(\boldsymbol{\mu}, \bar{B}) \\ \text{subj. to } \mu_1 + \mu_2 = \mu_{\text{total}} \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

を考えましょう。これの近似問題を

$$(P_{1,N}) \begin{cases} \max F_{1,N}(\boldsymbol{\mu}) = J_N(\boldsymbol{\mu}, \bar{B}) \\ \text{subj. to } \mu_1 + \mu_2 = \mu_{\text{total}} \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

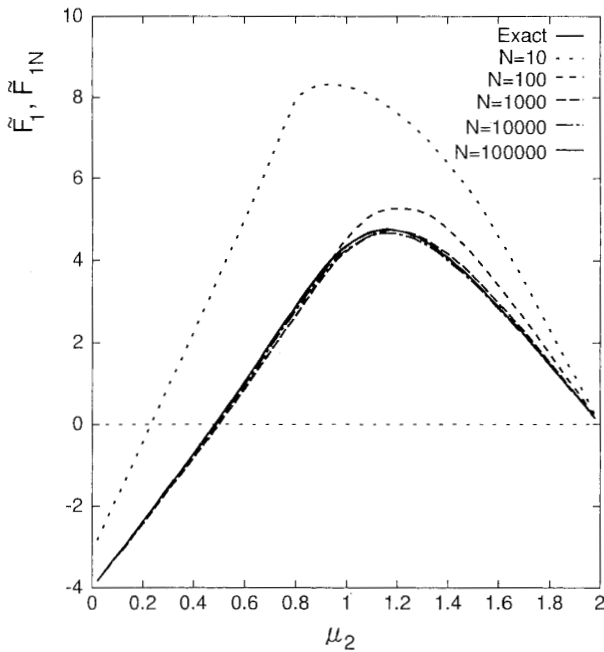


図 3.2 問題  $(P_{1,N})$  と  $(P_1)$  の目的関数

表 3.1 問題  $(P_{1,N})$  と最適解と真の最適解

$N$	$\mu_2^N$	$F_{1,N}(\boldsymbol{\mu}^N)$
10	0.9398	8.3150
100	1.2079	5.2440
1000	1.1872	4.7246
10000	1.1642	4.6661
100000	1.1608	4.7505
真値	1.1617	4.7388

とし、この最適解を  $\boldsymbol{\mu}^N = (\mu_1^N, \mu_2^N)^T$  とします。いま、 $\bar{B}=4, \mu_{\text{total}}=2$  とし、サンプルの長さ  $N$  を何通りか変化させたときの問題  $(P_{1,N})$  の目的関数  $\bar{F}_1(\mu_2) = F_1(2 - \mu_2, \mu_2)$  および  $\bar{F}_{1,N}(\mu_2) = F_{1,N}(2 - \mu_2, \mu_2)$  のグラフを図 3.2 に、解いて得られた  $\mu_2^N$  の結果を表 3.1 に示します。これらの図、表には問題  $(P_1)$  の厳密な目的関数と真の最適解も示してあります。

図 3.3 は、以上の結果から得られた  $\mu_2^N$  および  $F_{1,N}(\boldsymbol{\mu}^N)$  の真値からの誤差をプロットしたものです。これから、ほぼ誤差が  $\sqrt{N}$  に比例して減少していることがわかります。

### (バッファ容量決定問題)

次に、サービス率  $\boldsymbol{\mu}$  が  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  に固定されているもとの最適バッファ容量決定問題

$$(P_2) \begin{cases} \max F_2(B) = J(\bar{\boldsymbol{\mu}}, B) \\ \text{subj. to } B \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

を考えましょう。これを次の問題で近似します。

$$(P_{2,N}) \begin{cases} \max F_{2,N}(B) = J_N(\bar{\boldsymbol{\mu}}, B) \\ \text{subj. to } B \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

ここで、 $\bar{\boldsymbol{\mu}} = (0.7, 1.3)^T$  とし、サンプルの長さ  $N$  を何通りか変化させたときの問題  $(P_{2,N})$  の目的関数のグラフを図 3.4 に、これを解いて得られた最適解  $B^N$  と目的関数値を表 3.2 に示します。これらには問題  $(P_2)$  の厳密な目的関数と真の最適解も示してあります。

これらより、サンプル長 (シミュレーションの長さ)  $N$  が 100 程度以降は、 $F_{2,N}$  と  $F_2$  の誤差は若干残ってはいるものの、問題  $(P_{2,N})$  の最適解は真の最適解になっていることがわかります。

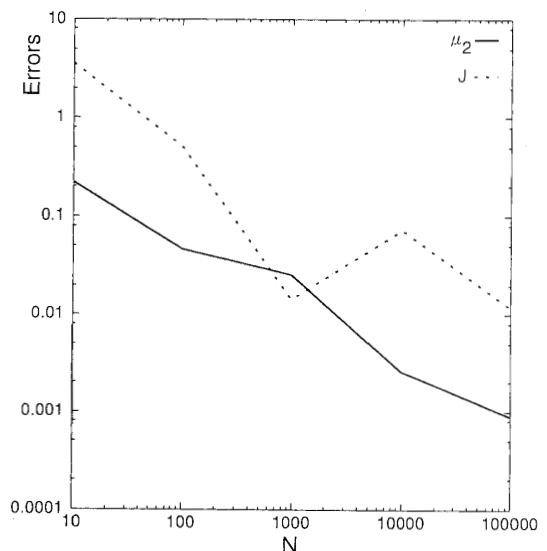


図 3.3 真値からのずれ

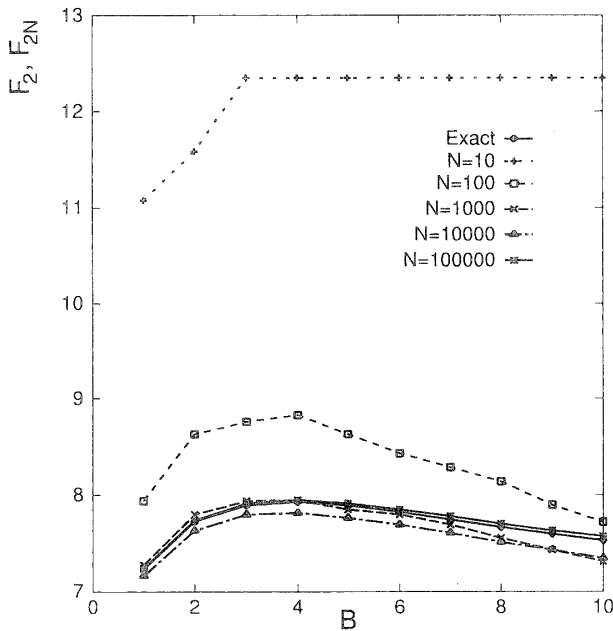


図 3.4 特題 (P<sub>2,N</sub>) と (P<sub>2</sub>) の目的関数

表 3.2 問題 (P<sub>2,N</sub>) の最適解と真の最適解

N	B <sup>N</sup>	F <sub>2,N</sub> (B <sup>N</sup> )
10	3	12.3537
100	4	8.8274
1000	4	7.9428
10000	4	7.8152
100000	4	7.9443
真値	4	7.9268

### 3.2 3 ステージ待ち行列

今度は、図 3.5 のようにステーション 3 に 2 箇所から客がくる 3 ステージ待ち行列システムを考えましょう。ここで、先ほどと同様、ステーション *i* のサービス時間は率  $\mu_i$  の指数分布に従い、サービス規律は FIFO、ブロッキングは生産ブロッキングと仮定します。また、ステーション 1, 2 が共にブロッキングになったときには、サービスの終了順にステーション 3 に進むことができるものとします。いま、 $N_{i,j}$ ,  $i=1, 2$  をステーション 3 において *j* 番目の客が到着した時点でのステーション *i* を退去した客数を表す確率変数とし、 $K_{i,j}$ ,  $i=1, 2$  をステーション *i* を *j* 番目に退去した客がステーション 3 において何番目にサービスを受けるかを表す確率変数とします。このとき、 $N_{i,j}$ ,  $K_{i,j}$  は、

$$N_{1,j} = N_{1,j-1} + 1 \{ D_{1,N_{1,j-1}} + S_{1,N_{1,j-1}+1} \leq D_{2,N_{2,j-1}} + S_{2,N_{2,j-1}+1} \}$$

$$N_{2,j} = N_{2,j-1} + 1 \{ D_{1,N_{1,j-1}} + S_{1,N_{1,j-1}+1} > D_{2,N_{2,j-1}} + S_{2,N_{2,j-1}+1} \}$$

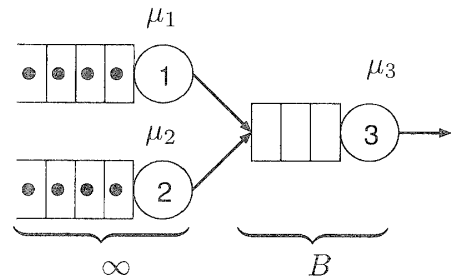


図 3.5 ステージ待ち行列システム

$$K_{i,j} = \min\{k: N_{i,k} = j\}, \quad i=1, 2$$
 のように与えられます。ただし、1 は 0-1 の指示関数を表しています。さらに、ステーション 3 における *j* 番目の客の到着時刻を  $A_j$  と表すと、 $D_{i,j}$  は  $A_j$  を用いて以下の漸化式で与えられます。

$$A_j = \max\{\min\{D_{1,N_{1,j-1}} + S_{1,N_{1,j-1}+1}, D_{2,N_{2,j-1}} + S_{2,N_{2,j-1}+1}\}, D_{3,j-B}\}$$

$$D_{i,j} = A_{K_{i,j}}, \quad i=1, 2$$

$$D_{3,j} = \max\{A_j, D_{3,j-1}\} + S_{3,j}$$

$$\mu = (\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3)^T$$
 とおけば、ここでも (8), (9), (10) と同様に  $TH_N(\mu, B)$ ,  $WIP_N(\mu, B)$  および  $J_N(\mu, B)$  を定義することができます。簡単化のために以下のような制約条件下でのサービス率配分問題を考えます。

$$(P_3) \begin{cases} \max F_3(\mu) = J(\mu, \bar{B}) \\ \text{subj. to } \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_{\text{total}} \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

この近似問題は、以下のようになります。

$$(P_{3,N}) \begin{cases} \max F_{3,N}(\mu) = J_N(\mu, \bar{B}) \\ \text{subj. to } \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_{\text{total}} \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

紙面の都合上これらを解いた結果は省略しますが、 $\mu_{\text{total}}=3, \bar{B}=4$  とおいた場合の、いろいろな  $N$  に対する目的関数  $\bar{F}_3(\mu_3) = F_3(1.5 - \mu_3/2, 1.5 - \mu_3/2, \mu_3)$  および  $\bar{F}_{3,N}(\mu_3) = F_{3,N}(1.5 - \mu_3/2, 1.5 - \mu_3/2, \mu_3)$  のグラフを図 3.6 に示しておきます。この図より、この問題の場合も近似最適化問題の解が厳密解に収束することがかがえるでしょう。ただし、この例のように、パラメータ (今の場合はサービス率) を変えるとサービス順序が変わるようなシステムの場合、評価尺度の近似値のパラメータに関する表現式は上述のように複雑なものとなるので、近似問題(16)を先の例題のように単純な非線形計画問題として解くことは一般には困難で

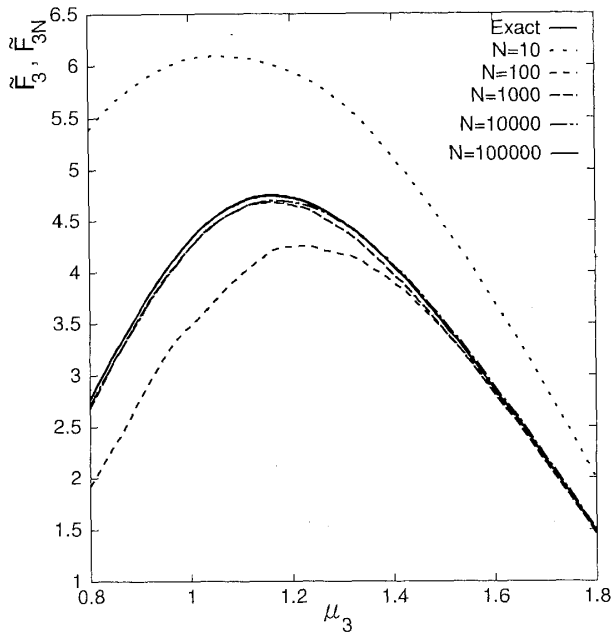


図 3.6 問題  $(P_{L,N})$  と  $(P_L)$  の目的関数

ある点に注意しなければなりません。

#### 4. 収束性

問題  $(P)$  の最適解集合を  $P^*$ ,  $(P_N)$  の最適解集合を  $P_N^*$  とすると、一般には(2)の各点収束だけでは  $P_N^*$  が  $P^*$  に収束することは保証できません。しかし、前節の例からもわかるように、通常はサンプルを固定したもとの十分長いシミュレーション結果を最適化することによって、定常状態を最適化する真の最適解に近いパラメータを得ることができそうです。実際、(a)  $F_N$  の一様収束性、あるいは(b)  $F_N$  の凸性 (最大化問題であれば凹性) のもとで、この推論が正しいと言えます。また、3.1 節の最適バッファ配分の例のように、(c) 設計パラメータが離散変数の場合、は十分大きい  $N$  に対して近似最適解が真の最適解となることはほぼ明らかでしょう。以上のことを、摂動を受ける数理計画問題の感度解析・安定性解析の結果をもとに、簡単に紹介しておきます。ここでは、制約集合  $S$  は  $n$  次元ベクトル空間  $R^n$  の閉部分集合、 $C \subset R^n$  を  $S$  を含む相対的開凸集合とし、以下の3種類の仮定を考えます。

$$\text{(仮定 A)} \begin{cases} \cdot |F_N(\theta)| < +\infty \text{ for all } \theta \in S \\ \cdot F_N \text{ は } S \text{ 上で上半連続} \\ \cdot S \text{ 内の任意のコンパクト集合上で } F_N \text{ は } F \text{ に一様収束し、} F \text{ は } S \text{ 上で連続} \end{cases}$$

$$\text{(仮定 B)} \begin{cases} \cdot F_N \text{ は } C \text{ 上の凹関数} \\ \cdot \text{ある可算稠密な集合 } \Theta \subset C \text{ に対して、} \\ \quad \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\theta) = F(\theta) \text{ for all } \theta \in \Theta \end{cases}$$

$$\text{(仮定 C)} \begin{cases} \cdot S \text{ の要素数が有限個} \\ \cdot |F_N(\theta)|, |F(\theta)| < \infty \text{ for all } \theta \in S \\ \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\theta) = F(\theta) \text{ for all } \theta \in S \end{cases}$$

これらいずれの仮定のもとでも、 $(P_N)$  の最適解が問題  $(P)$  の最適解に収束することがいえます。

**命題 4.1**[5]  $\theta_N \in P_N^*$  とする。(仮定 A) あるいは (仮定 B) のもとで、 $\{\theta_N\}$  の任意の集積点は  $(P)$  の最適解である。

**命題 4.2** (仮定 C) のもとで、ある整数  $\bar{N}$  が存在し、 $P_N^* \subset P^*$  for all  $N > \bar{N}$  となる。

命題 4.1 のタイプの収束性については文献[5]を、より定量的な扱い ( $F_N$  の停留点の  $F$  の停留点への収束性等) については文献[4]を参照してください。

#### 5. 生産システムの平均加工時間配分問題

直列型の待ち行列システムでモデル化される  $M$  マシンの生産ラインを考えます。マシン 1 の前には無限個の部品が並んでいるものとし、マシン  $i$  での加工時間は平均  $\theta_i$  の指数分布に従い、ブロッキングは生産ブロッキングを仮定します。マシン  $i (i > 1)$  の (マシン自身を含む) バッファ容量を  $B_i$  とします。  $M=2$  の場合は、図 3.1 の例と一致します。このようなシステムにおいて、平均加工時間の総和  $\sum_{i=1}^M \theta_i$  が一定のもとでスループットを最大にするような平均加工時間の配分を求める問題を考えます。マシン  $i$  での  $j$  番目の (サンプル  $\omega_{i,j}$  を固定したもとの) 加工時間を  $S_{i,j}$ , 退去時刻を  $D_{i,j}$  とすると、

$$S_{i,j}(\theta_i) = -\theta_i \log w_{i,j} \quad (17)$$

ですから、各退去時刻は平均加工時間ベクトル  $\theta = (\theta_1 \cdots \theta_M)^T$  の関数として以下のように書くことができます。

$$\begin{aligned} D_{i,j}(\theta) = \max \{ & D_{i-1,j}(\theta) \\ & + S_{i,j}(\theta_i), D_{i,j-1}(\theta) + S_{i,j}(\theta_i), \\ & D_{i+1,j-B_{i+1}}(\theta) \} \end{aligned} \quad (18)$$

(8)と同様に十分大きい  $N$  における  $N/D_{M,N}(\theta)$  でスループットを近似すると、スループット最大化は  $D_{M,N}(\theta)$  の最小化で近似することができます。したがって、平均加工時間の総和  $\theta_{\text{total}}$  が与えられたもとの

のスループット最大化問題は、以下の問題で近似できます。

$$\begin{cases} \min D_{M,N}(\theta) \\ \text{subj. to } \theta \in S = \left\{ \theta \geq 0 \mid \sum_{i=1}^M \theta_i = \theta_{\text{total}} \right\} \end{cases} \quad (19)$$

(17)および(18)から、 $D_{M,N}(\theta)$ は区分的に線形な関数であるので、このまま微分不可能最適化手法を適用したり、あるいは多数の制約条件を有する線形計画問題に変換して解くことも可能です。文献[3]では、同様の問題を微分不可能最適化手法のひとつであるバンドル法で解いています。ここでは、後者のタイプの解法を簡単に説明しましょう。 $D_{i,j}$ をノード $(i,j)$ に対応させた図5.1のようなネットワーク $N(\theta)$ を考えます。ここで、ノード(0)はダミーノードで、表5.1のように弧(arc)に重みをつけたものです。

例えば、図5.1の $N(\theta)$ は、マシン数 $M=4$ で、バッファ容量が $(B_2 B_3 B_4)=(2 3 1)$ の場合です。

(18)より、 $D_{M,N}(\theta)$ は $N(\theta)$ のノード(0)から $(M,N)$ までの最長経路長になっています。したがって、

$$P_{M,N} = \{P \mid P \text{ は } (0) \text{ から } (M,N) \text{ への経路}\}$$

$$d(P, \theta) = P \text{ の経路長}$$

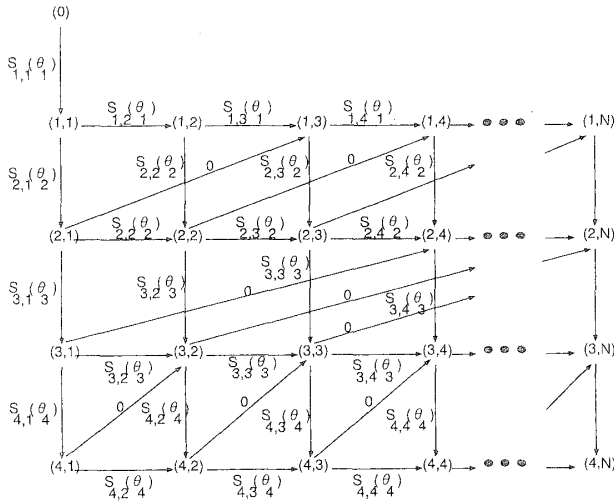


図5.1  $M=4$ , バッファ容量  $B=(2 3 1)^T$  の  $N(\theta)$

表5.1

弧	重み
$(0) \rightarrow (1,1)$	$S_{1,1}(\theta_1)$
$(i-1, j) \rightarrow (i, j)$	$S_{i,j}(\theta_i)$
$(i, j-1) \rightarrow (i, j)$	$S_{i,j}(\theta_i)$
$(i, j - B_{i+1}) \rightarrow (i-1, j)$	0

とすれば、問題(19)は

$$\begin{cases} \min_{\theta} \max_{P \in P_{M,N}} d(P, \theta) \\ \text{subj. to } \theta \in S \end{cases} \quad (20)$$

のように書くことができ、さらに、これは等価的に以下の問題になります。

$$(LP_{M,N}) \begin{cases} \min_{\theta, \sigma} \sigma \\ \text{subj. to } d(P, \theta) - \sigma \leq 0 \text{ for all } P \in P_{M,N} \\ \theta \in S \end{cases}$$

ある固定された経路  $P \in P_{M,N}$  に対して、 $d(P, \theta)$  に関して線形なので、 $(LP_{M,N})$  は非常に多数の制約条件を有する線形計画問題となります。もちろん、 $(LP_{M,N})$  の制約条件を一度に取り扱うことは困難ですが、次のような緩和法により最適解を得ることが可能です。適当な部分集合  $Q^1 \subset P_{M,N}$  を選び、 $k=1$  とし、線形計画問題

$$\begin{cases} \min_{\theta, \sigma} \sigma \\ \text{subj. to } d(P, \theta) - \sigma \leq 0 \text{ for all } P \in Q^k \\ \theta \in S \end{cases}$$

の最適解  $(\theta^k, \sigma^k)$  を求め、 $\theta^k$  のもとでの最長経路長  $d^k = \max_{P \in P_{M,N}} d(P, \theta^k)$  と最長経路  $P^k \in P_{M,N}$  を求めます。もしも十分小さな正数  $\varepsilon$  に対して  $d^k - \sigma^k \leq \varepsilon$  ならば終了、そうでなければ  $Q^k$  から適当な部分集合  $D^k$  を削除し、あらたに  $P^k$  を付け加え、つまり  $Q^{k+1} = Q^k \cup \{P^k\} \setminus D^k$  とし、 $k := k+1$  として同じことを繰り返します。

ここで、 $M=9$ 、つまり9マシンの場合の簡単な数値例を示します(図5.2)。以下ではサンプルの長さ  $N$  は80000とし、以下の3種類のバッファ容量  $\bar{B} = (B_2 B_3 \dots B_9)^T$  のもとで  $D_{9,80000}$  を最小にする90単位時間の総平均加工時間の最適配分  $\mu = (\mu_1/\mu_2 \dots \mu_9)^T$  を求めてみました。

- (A)  $\bar{B} = (2 2 2 2 2 2 2 2)^T$
- (B)  $\bar{B} = (1 1 3 3 3 3 1 1)^T$
- (C)  $\bar{B} = (1 1 1 1 3 3 3 3)^T$

この程度の規模の問題であれば、特に工夫をするまでもなく、上の緩和法において  $D^k = \emptyset$  とし、制約を付け加えていくだけという戦略でも90~100回程度の繰

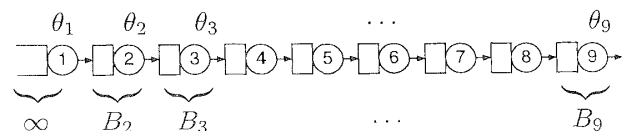
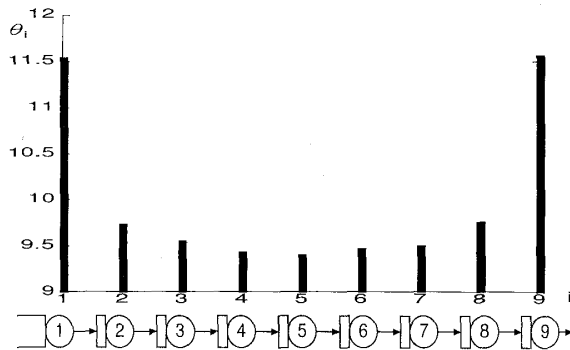


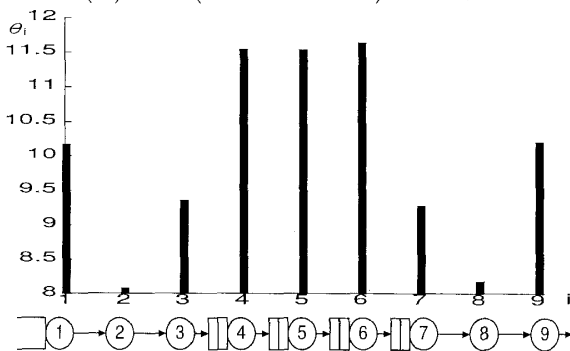
図5.2 9マシン生産ラインシステム

表 5.2 (準)最適平均加工時間配分

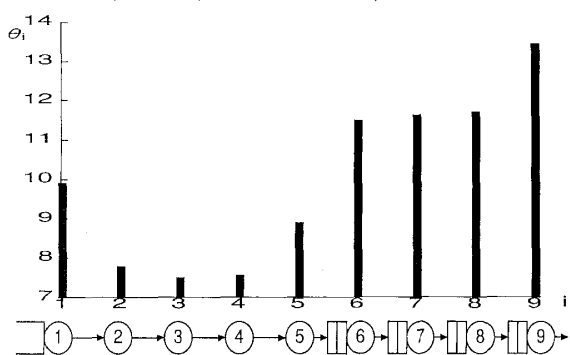
$\bar{B}$	最適平均時間配分 $\mu^N$	$TH_N(\mu^N, \bar{B})$
(A)	(11.544 9.736 9.559 9.4360 9.407 9.478 9.509 9.761 11.571) <sup>T</sup>	0.057218
(B)	(10.170 8.084 9.364 11.547 11.534 11.634 9.275 8.185 10.207) <sup>T</sup>	0.054617
(C)	(9.909 7.800 7.517 7.576 8.899 11.498 11.638 11.714 13.450) <sup>T</sup>	0.054623



(A)  $\bar{B} = (2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2)^T$  の場合



(B)  $\bar{B} = (1\ 1\ 3\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1)^T$  の場合



(C)  $\bar{B} = (1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 3\ 3\ 3)^T$  の場合

図 5.3 (準)最適平均加工時間配分

り返して、終了判定基準  $(d^k - \sigma^k) / \sigma^k < 0.0001$  をみたす解が得られました。

表 5.2 と図 5.3 に求まった  $\mu^N$  を示します。これらは、各バッファ容量において、サンプル (乱数系列) 変えて 5 回最適化を行い、その平均をとったものです。

特に図 5.1 の(A)は、均一の直列型生産ラインでは、ラインの中央に最も性能の良いマシンを配置し、外側 (入口と出口) にくにつれて配置するマシンの性能を落とす、という配置が最適であるということを示している、これはボウル現象 (Bowl phenomenon) として知られています。従来は、何回もシミュレーションを繰り返し、試行錯誤でおよその最適配分パターンの傾向を推察するというような報告が多く見られましたが、サンプルパス最適化を用いれば、この例のように手軽に (準)最適配分を得ることができます。

## 6. おわりに

本稿で紹介したサンプルパス最適化は非常に単純なアイデアであり、簡単に (近似) 最適パラメータを求めることができる便利で有力な方法です。しかしながら、収束性の十分条件のチェックが難しい場合が多いことや、シミュレーションの長さとの誤差の見積もり、近似最適化問題の有効な解法、等解決すべき点もあります。筆者らも、いくつかの生産システムのモデルに対してこの手法を用いた最適化を試みていますので、機会があれば報告させていただきたいと思っています。

## 参考文献

- [1] Glasserman, P. and Yao D. D.: "Monotone Structure in Discrete-Event Systems," A Wiley-Interscience Publication, New York, (1994).
- [2] Pflug G. Ch.: "Optimization of stochastic models: The interface between simulation and optimization," Kluwer Academic Publishers, Boston, (1996).
- [3] Plambeck E. L., Fu B.-R. Robinson S. M. and Suri R.: "Sample-path optimization of convex stochastic performance functions," Mathematical Programming, 75, pp. 137-176, (1996).
- [4] Shaphiro A.: "Simulation-based optimization — convergence analysis and statistical inference," Commun. Statist. — Stochastic Models, Vol. 12, No. 3, pp. 425-454, (1996).
- [5] Robinson S. M.: "Analysis of sample-path optimization," Mathematics of Operations Research, Vol. 21, No. 3, (1996).
- [6] Rubinstein R. Y. and Melamed B.: "Modern Simulation and Modeling," A Wiley-Interscience Publication, New York, (1998).