DEA とゲーム理論

篠原　正明

1. はじめに

DEA（データ包絡分析法）は，多入力多出力システムの効率性に注目した相対評価法である．評価対象となる多入力多出力システムのことを，入力項目と出力項目に関して評価ベクトルを決定する意思を持つ主体と言う意味で，DMU（意思決定主体）と呼ぶ．相対評価と言っても，DMU 集団の中の優れもの集団 (best performance frontier) を基準とした相対評価である．各 DMU は自分の効率性が最大になるように，入出力項目の評価ベクトルを独立に決定する．このとき，注目する被評価対象 DMU_o は，入出力項目の評価ベクトルを決定する自由を持っているものの，一方で DMU 全体を評価する者からの被評価対象として位置付けられる．本稿では，以上の視点に基づき，DEA を入出力項目の評価ベクトルを決める被評価対象 DMU_o と DMU の評価ベクトルを決める DMU 全体の評価者との間のゲームとして捉えた新しい展開「DEA ゲーム」について述べる．2 章では DEA ゲームの準備としてゲーム理論をレビューし，3 章では DEA の LP 定式の入力指向 CCR モデルに対応した DEA ゲームを紹介する．4 章では，入力指向 CCR モデル対応 DEA ゲームの解釈を行う．5 章では，DEA ゲームの一般的解法として期待されるゲームの反復解法を示し，入力指向 CCR モデル対応 DEA ゲームを例にとりその妥当性を検証する．最後に 6 章において，DEA ゲームの今後の展開について述べ，本稿を締めくくる．

2. ゲーム理論からの準備

3 章以降で DEA ゲームを議論するにあたって最低限必要と思われるゲームの分類のための用語を以下に説明しつつ，DEA ゲームの定義を準備する．

(2-1)　プレイヤー：ゲームの参加者のこと．プレイヤーの数により 2 人ゲーム，n 人ゲームなどと分類されるが，以下は 2 人ゲームに注目する[1]．さらに，プレイヤー相互が非協力（独立な）状態にあるか，何らかの協力（拘束）状態にあるかにより，非協力ゲーム，協力ゲームと分類される．

(2-2)　ゲームの目的関数：2 人ゲームに注目し，一方のプレイヤーはある目的関数を最大化し，他方のプレイヤーはその目的関数を最小化する意思を持つとした場合に，その両者が最適化しようと注目する関数(群)のこと．零和 2 人行列ゲームでは，最大化プレイヤーの混合戦略ベクトルを $\boldsymbol{x}$，最小化プレイヤーの混合戦略ベクトルを $\boldsymbol{y}$，注目する利得行列を A とすれば，ゲームの目的関数は $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}$ と表現できる．ここで，関数(群)としたのは，非零和ゲームのように，最大化プレイヤーと最小化プレイヤーで目的関数を異にする場合があるからである．さらに，零和 2 人行列ゲームでは，最大化プレイヤーの利得が最小化プレイヤーの損失となる問題設定ゆえに，零和ゲームと呼ばれるが，ゲームの目的関数が利得関数あるいは損失関数である必然性は存在しない．事実，DEA ゲームでの目的関数は分数形式である．

(2-3)　情報と戦略：DEA ゲームを構成する入出力データ行列はすべてのプレイヤーに既知で，又，プレイヤーのとりうる戦略数は有限で，混合戦略を許容する．

以上をまとめると，本稿での DEA ゲームでは，ある共通するゲームの目的関数に関する最大化プレイヤ

[1] 2 人ゲームと言っても，物理的参加者が 2 人に限定されるわけではなく，対立する 2 つのグループの間のゲームもこの範疇に入る．事実，DEA ゲームでは，入力項目の評価ベクトルを決定するプレイヤーと出力項目の評価ベクトルを決定するプレイヤーから構成される被評価側 DMU_o と DMU 全体の評価ベクトルを決定する評価者との間の 2 プレイヤー対 1 プレイヤー間の 2 グループゲームとなる．

しのはら　まさあき
日本大学　生産工学部　数理情報工学科
〒275-8575 習志野市泉町 1-2-1

ーグループと最小化プレイヤーグループから構成される非協力・有限・混合戦略・完全情報ゲームを考察対象とする.

3. 入力指向CCRモデルに対応したDEAゲーム

$\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$ を $\mathrm{DMU}_j\ (j=1, 2, \cdots, n)$ の入力データ列ベクトル, 出力データ列ベクトル, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ を入力項目, 出力項目についての評価列ベクトルとするならば, 入力指向CCRモデル (CCRI) の注目する DMU_o についてのLP定式化は次式(1)で与えられる.

[CCRI]

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_o \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_o=1 \\ & -\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Y}\leq\boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{1}$$

但し, $X=\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, $Y=\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n\}$ は $m\times n$ の入力データ行列, $s\times n$ の出力データ行列である. $X=\{x_{ij}\}$, $Y=\{y_{kj}\}$ と表記するならば, x_{ij} は $\mathrm{DMU}_j\ (j=1, 2, \cdots, n)$ の第 i 番目 $(i=1, 2, \cdots, m)$ の入力項目データ値であり, y_{kj} は DMU_j の第 k 番目 $(k=1, 2, \cdots, s)$ の出力項目データ値であり, $x_{ij}>0$, $y_{kj}>0$ を通常仮定する.

ところで, (1)式で与えられるCCRIのLP定式化が次に示すマクスミニ問題(2)式に等価変換可能であることが知られている[1].

[W-MAXMIN 問題]

$$\left.\begin{array}{l}\underset{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{\text{maximize}}\left\{\underset{\boldsymbol{t}}{\text{minimize}}\ \dfrac{\boldsymbol{s}_1^TA\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{s}_2^TB\boldsymbol{t}}\right\} \\ \text{subject to} \\ \boldsymbol{s}_1\in S_1=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^m|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{1}=1, \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\} \\ \boldsymbol{s}_2\in S_2=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^s|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{1}=1, \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\} \\ \boldsymbol{t}\in T=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{1}=1, \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\}\end{array}\right\} \tag{2}$$

さらに, (2)式のマクスミニ問題の目的関数の最適値は, (3)式に示すミニマクス問題の目的関数の最適値に一致することが知られている[1].

[W-MINMAX 問題]

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\boldsymbol{t}}{\text{minimize}}\left\{\underset{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{\text{maximize}}\ \dfrac{\boldsymbol{s}_1^TA\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{s}_2^TB\boldsymbol{t}}\right\} \\ \text{subject to} \\ \boldsymbol{s}_1\in S_1, \boldsymbol{s}_2\in S_2, \boldsymbol{t}\in T\end{array}\right\} \tag{3}$$

すなわち, 次のミニマクス・マクスミニ等式が成立する.

$$\left.\begin{array}{l}\underset{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{\max}\ \underset{\boldsymbol{t}}{\min}\ w(A, B, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t}) \\ \quad =\underset{\boldsymbol{t}}{\min}\ \underset{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{\max}\ w(A, B, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{s}_1\in S_1, \boldsymbol{s}_2\in S_2, \boldsymbol{t}\in T\end{array}\right\} \tag{4}$$

$$w(A, B, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t})=\frac{\boldsymbol{s}_1^TA\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{s}_2^TB\boldsymbol{t}} \tag{5}$$

さて, ここで, $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t}$ は, 各々, 非負で総和が1となる混合戦略の割合を表わす適当な大きさの列ベクトルである. A, B は各々, X, Y と同じサイズの行列であるが, 注目する DMU_o のデータをもとに以下に示すように基準化してある.

$$A=\{a_{ij}\},\ a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_{io}} \tag{6}$$

$$B=\{b_{kj}\},\ b_{kj}=\frac{y_{kj}}{y_{ko}} \tag{7}$$

注目する DMU_o に対する第 o 列の要素はすべて1となる. 従って, A と B は, 注目する DMU_o の入力データならびに出力データを1と基準化した時の全DMUについての相対的入力データと出力データを表現しているため, 各々, DMU_o に対する基準化入力データ行列, 基準化出力データ行列と呼ぶ.

4. DEAゲームの解釈

第3章の議論を踏まえると, 注目する DMU_o にとってなるべくその効率性をひいきめに見た時の効率性評価問題である入力指向CCRモデル[CCRI]が, ゲームの目的関数 $w(A, B, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t})$ を最大化するプレイヤーグループと最小化するプレイヤーの間のある種のゲームと見なすことができる.

第2章の議論に従い, ゲームのタイプを以下に特定化してみよう. 2つの混合戦略ベクトル $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)$ に関しては, ゲームの目的関数を最大化するので暫定的最大化プレイヤーグループ, 一方, 混合戦略ベクトル $\boldsymbol{t}$ に関しては, 暫定的最小化プレイヤーグループを対応づけよう. 具体的には, $\boldsymbol{s}_1$ は入力項目の評価ベクトル, $\boldsymbol{s}_2$ は出力項目の評価ベクトル, $\boldsymbol{t}$ はDMUの評価ベクトルを表現すると解釈できる. 又, ここで, 暫定的としたのは, すぐ後で示すように, ゲームの目的関数 w とDEAゲームとして意味を持つ全体効率値 z が逆数関係 $(wz=1)$ にあるからである.

次に, ゲームの目的関数 $w(A, B, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t})$ であるが, 式(8)に示すように分数形式である.

$$w(A, B, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{t})=\frac{\boldsymbol{s}_1^TA\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{s}_2^TB\boldsymbol{t}} \tag{8}$$

ここで，式(8)の分子 $s_1^T A t$ は，行列 A を利得行列と考えれば，入力に対する混合戦略ベクトル s_1 とDMUに対する混合戦略ベクトル t が与えられた時の期待利得を表している．s_1, t を入力項目ならびにDMUの評価ベクトルと解釈するならば，$s_1^T A t$ は対象とするDMU全体に対する，注目 DMU_O のデータで基準化した意味での，入力項目についての総評価価値（あるいは総費用評価額）と解釈できる．同様にして，分母 $s_2^T B t$ は対象とするDMU全体に対する出力項目についての総評価価値（あるいは総収益評価額）と解釈できる．従って，式(8)のゲームの目的関数 w は，評価ベクトル (s_1, s_2, t) が与えられた時の「対象とするDMU全体に対する入力項目についての総評価価値/出力項目についての総評価価値」を与える．DMU全体の効率値 z を，「DMU全体に対する出力項目についての総評価価値/入力項目についての総評価価値」と定義するならば，この値 w はDMU全体の効率値の逆数である．従って，ゲームの目的関数 w の最大化/最小化は，DMU全体の効率値 z の最小化/最大化に対応するので，DEAゲームの視点からは，DMU全体効率最大化プレイヤー（DMU_O を評価する人で，混合戦略ベクトル t を持つ）はDMU全体の効率値を最大化しようと t を決定し，一方，DMU全体効率最小化プレイヤーグループ（被評価 DMU_O で，混合戦略ベクトル s_1, s_2 を持つ）はDMU全体の効率値を最小化しようと s_1, s_2 を決定しようと試みている．

以上の議論をまとめると，DEAの入力指向CCRモデルのLP定式化CCRI式(1)は，注目する DMU_O の優良像と対比した時に DMU_O にとって都合が良い様に DMU_O の効率性を評価するものであり，DMUを個人と考えればDMU毎の個人効率値を評価する．一方，W-MAXMIN問題式(2)とW-MINMAX問題式(3)は，注目する DMU_O から見たDMU全体の効率値を分数形のゲームの目的関数とする2グループ間の最大化/最小化ゲームと見ることができる．すなわち，注目する DMU_O の評価者（DMU全体の評価者）は DMU_O の個人効率をなるべく小さく評価するために，全体効率をなるべく大きく評価しようと試みる．逆に，被評価者 DMU_O は自らの個人効率をなるべく大きく評価するために，全体効率をなるべく小さく評価しようと試みる．

具体例として，あるプロ野球チームでの O 選手（DMU_O に相当）の評価を行う場合に，上述した「個人効率と全体効率」の考えをあてはめてみよう．チームのオーナー（DMU_O の評価者）は，選手（DMU）別の評価ベクトル $t(t \geq 0, t^T 1=1)$ を決定する裁量権を持ち，t を決定する際に，注目する評価対象の O 選手以外の寄与を強調することにより，チーム全体での効率（全体効率で，この場合は「チーム全体の出力項目についての総評価価値/チーム全体の入力項目についての総評価価値」）が高くなるように配慮するであろう．例えば，O 選手以外の P 選手，Q 選手への価値を多く付与したい．一方，被評価者である O 選手は，自分を評価する際に用いる入力項目と出力項目に対する評価ベクトル，v と u を決定する裁量権を持ち，v と u を決定する際に，自分以外の選手のチームへの寄与を軽視して，チーム全体での効率が低くなるように配慮するであろう．例えば，P 選手のホームラン数が自分より多いならば，出力項目のホームラン数への価値を少なく付与したい．すなわち，オーナーはチーム全体を高く評価することにより，注目する O 選手の効率性を低く評価しようと試み，被評価対象の選手はチーム全体を低く評価することにより，間接的かつ相対的に自分自身を高く評価しようと試みている．

5. 反復解法のDEAゲームへの適用

第4章の議論により，DEAの入力指向CCRモデルにもとづく個人効率性評価問題は式(9)で定義される全体効率をゲームの目的関数とする2グループ間での最大化/最小化ゲームとして解釈できることがわかった．

$$z(A, B, s_1, s_2, t)=\frac{s_2^T B t}{s_1^T A t} \tag{9}$$

全体効率は，基準化入力データ行列 A，基準化出力データ行列 B の与え方に依存して，様々な定義が可能であり，それに依存して様々なDEAゲームが誕生する．これらのDEAゲームを統一的に解くためのアルゴリズムとして，仮想的プレイによる反復シミュレーション解法を以下に説明する．

混合戦略 t を持つ最大化プレイヤーと混合戦略 s_1, s_2 を持つ最小化プレイヤーグループが，同一の式(9)の分数行列形式で与えられるゲームの目的関数を個別に非協力の下で最適化するゲームに限定して，反復解法を図1に示す．

最初に s_1, s_2 の初期値 $s_1(0), s_2(0)$ に対して，入力についてのDMU別評価ベクトル $s_1^T A$，出力について

1. $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ を $\boldsymbol{s}_1(0), \boldsymbol{s}_2(0)$ に，4つのパラメータベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ を0に，count を0に初期設定する．

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{s}_1 & \leftarrow & \boldsymbol{s}_1(0)\ ,\ \boldsymbol{s}_2 \ \leftarrow\ \boldsymbol{s}_2(0) \\ \boldsymbol{a} & \leftarrow & 0\ ,\ \boldsymbol{b}\ \leftarrow\ 0 \\ \boldsymbol{d} & \leftarrow & 0\ ,\ \boldsymbol{e}\ \leftarrow\ 0 \\ \mathrm{count} & \leftarrow & 0 \end{array}$$

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を更新する．

$$\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{s}_1^T A\ ,\ \boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b} + \boldsymbol{s}_2^T B$$

3. $\boldsymbol{c} = \{c_j\}$ を計算する．

$$c_j \leftarrow b_j / a_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

4. $j^* = \arg\max_j c_j$ を計算する．

5. $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ を更新する．

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{t}^T & \leftarrow & [0,0,0,0,1,0,0,\cdots,0] \\ & & \quad 1,2,\cdots,j^*,\cdots\cdots,n \\ \bar{\boldsymbol{t}} & \leftarrow & \dfrac{\mathrm{count}}{\mathrm{count}+1}\bar{\boldsymbol{t}} + \dfrac{1}{\mathrm{count}+1}\boldsymbol{t} \end{array}$$

6. $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ を更新する．

$$\boldsymbol{d} \leftarrow \boldsymbol{d} + A\boldsymbol{t}\ ,\ \boldsymbol{e} \leftarrow \boldsymbol{e} + B\boldsymbol{t}$$

7. $i^* = \arg\max_i d_i$, $k^* = \arg\min_k e_k$ を計算する．

8. $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \bar{\boldsymbol{s}}_1, \bar{\boldsymbol{s}}_2$ を更新する．

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{s}_1^T & \leftarrow & [0,0,0,0,1,0,0,\cdots,0] \\ & & \quad 1,2,\cdots,i^*,\cdots\cdots,m \\ \boldsymbol{s}_2^T & \leftarrow & [0,0,0,0,1,0,0,\cdots,0] \\ & & \quad 1,2,\cdots,k^*,\cdots\cdots,s \\ \bar{\boldsymbol{s}}_1 & \leftarrow & \dfrac{\mathrm{count}}{\mathrm{count}+1}\bar{\boldsymbol{s}}_1 + \dfrac{1}{\mathrm{count}+1}\boldsymbol{s}_1 \\ \bar{\boldsymbol{s}}_2 & \leftarrow & \dfrac{\mathrm{count}}{\mathrm{count}+1}\bar{\boldsymbol{s}}_2 + \dfrac{1}{\mathrm{count}+1}\boldsymbol{s}_2 \end{array}$$

9. $\bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{s}}_1, \bar{\boldsymbol{s}}_1$ が収束したと判定されれば停止する．さもなくば，count←count + 1 とし，ステップ2へ．

図1　分数行列ゲームの反復解法アルゴリズム

のDMU別評価ベクトル $\boldsymbol{s}_2^T B$ を計算し，各々の累積ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とし（ステップ2），DMU別に比率 $c_j = b_j/a_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ を計算し（ステップ3），その最大値を与える添字を j^* とし（ステップ4），$j=j^*$ のみが1で他が0のベクトルを最大化プレイヤーのDMU評価ベクトル $\boldsymbol{t}$ の暫定値とする（最大値を与える要素が複数個存在時は，任意の一つを選ぶ）．同様に，暫定値 $\boldsymbol{t}$ をもとに入力項目別評価ベクトル $A\boldsymbol{t}$，出力項目別評価ベクトル $B\boldsymbol{t}$ を計算し，各々の累積ベクトルを $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ とし（ステップ6），$\boldsymbol{d}$ の要素中での最大値，$\boldsymbol{e}$ の要素中での最小値を与える添字を各々 i^*, k^* とする（ステップ7）．$i=i^*$ のみが1で他が0のベクトルを最小化プレイヤーグループの入力項目評価ベクトル $\boldsymbol{s}_1$ の暫定値，$k=k^*$ のみが1で他が0のベクトルを出力項目評価ベクトル $\boldsymbol{s}_2$ の暫定値とする（ステップ8）．以上のプロセスを $\bar{\boldsymbol{t}}$, $\bar{\boldsymbol{s}}_1$, $\bar{\boldsymbol{s}}_2$ が収束したと判断できるまで反復する（ステップ9）[2]．ここで，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ は長期間にわたる仮想プレイが構成されるこのゲームを非協力状態で継続した際のゲームの各段階での入力項目についてのDMU別評価ベクトル，出力項目についてのDMU別評価ベクトル，全DMUについての入力項目別評価ベクトル，全DMUについての出力項目別評価ベクトル，の評価累積値に相当する．この反復アルゴリズムは，各プレイヤーは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ から算出される $\boldsymbol{c}$，ならびに $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ を定

支　店	1	2	3	4	5	6	7	8
入力 x_1(労務費用)	4.0	2.9	4.9	4.1	6.5	10.6	4.8	4.0
入力 x_2(物件費用)	2.1	1.5	2.6	2.3	4.1	5.6	3.3	2.4
出力 y_1(収入 1)	2.6	2.2	3.2	2.6	5.1	7.0	3.6	3.3
出力 y_2(収入 2)	4.1	3.5	5.1	5.7	7.4	11.8	6.1	5.0

図2　例題の入出力データ

基準化入力データ行列

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.725 & 1.225 & 1.025 & 1.625 & 2.650 & 1.200 & 1.000 \\ 1 & 0.714 & 1.238 & 1.095 & 1.952 & 2.667 & 1.571 & 1.143 \end{bmatrix}$$

基準化出力データ行列

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.846 & 1.231 & 1.000 & 1.962 & 2.692 & 1.385 & 1.269 \\ 1 & 0.854 & 1.244 & 1.390 & 1.805 & 2.878 & 1.488 & 1.220 \end{bmatrix}$$

(a) DMU 1により基準化した入出力データ行列

基準化入力データ行列

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.379 & 1 & 1.689 & 1.413 & 2.241 & 3.655 & 1.655 & 1.379 \\ 1.400 & 1 & 1.733 & 1.533 & 2.733 & 3.733 & 2.200 & 1.600 \end{bmatrix}$$

基準化出力データ行列

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.182 & 1 & 1.455 & 1.182 & 2.318 & 3.182 & 1.636 & 1.500 \\ 1.171 & 1 & 1.457 & 1.629 & 2.114 & 3.371 & 1.743 & 1.429 \end{bmatrix}$$

(b) DMU 2により基準化した入出力データ行列

図3　基準化入出力データ行列

常状態では各々最適化する選択行動をするだろうという原理にもとづいている．

2入力2出力の8支店営業成績評価問題（文献[2]の例題3）に，提案するゲームの反復解法（図1）を適用しよう．もちろん，DEAの入力指向CCRモデルとして線形計画法にもとづき，各支店のDEA効率値を計算できるわけであるが，ここではあえてDEAゲームとして反復解法により求解を試みる．図2に対象とする評価問題の入出力データ行列を，図3(a)，(b)には支店1,2により基準化した入出力データ行列を示す．図4～6には支店1についてのDEAゲームについて横軸に反復回数countをとり，各反復回数での平均化した混合戦略ベクトル $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{t}$ を示す．count $=5000$ において「$\bar{s}_1=(0.45, 0.55)^T$, $\bar{s}_2=(1,0)^T$, $\bar{t}=(0, 0.93, 0, 0, 0, 0, 0, 0.07)^T$」を得るが，このデータ値は，文献[3]のDEA求解ソフトModel-Name＝CCR-Iの出力データ値「$VX(1)=0.449$ $VX(2)=0.551$, $UY(1)=0.85$, $UY(2)=0$, $\lambda(2)=1.062$, $\lambda(8)=0.0097\mathrm{E}-02$(その他の$\lambda$は0)」とも$Y, \lambda$に関して総和が1になるように正規化すれば合致する．又，ゲームの目的関数 $w=\bar{s}_1^TA\bar{t}/\bar{s}_2^TB\bar{t}$ の収束値は0.8498であり，DEA求解ソフトによる支店1のDEA効率値 $Score=0.849847$ とも合致する．

ところで，支店2については，図3(b)の基準化入出力データにもとづくDEAゲームの反復解法では，「$\bar{s}_1=(0,1)^T$, $\bar{s}_2=(0,1)^T$, $\bar{t}=(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$」なる収束値を得たが，このデータ値は文献[3]のDEA求解ソフトのModel-Name＝CCR-Iの出力データ値「$VX(1)=0.5974$, $VX(2)=0.4026$, $UY(1)=0.5542$, $UY(2)=0.4458$, $\lambda(2)=1$(その他のλは0)」とは，$\bar{t}$とλ，又，ゲームの目的関数値$w(=1)$とDEA効率値（$=1$）は合致するものの，$\bar{s}_1$とVX，$\bar{s}_2$とUYの対応において合致しない．これは，以下の理由による．支店2はDEA効率的で，参照集合は自分自身（$\lambda(2)=1$，その他は0）ゆえに，ゲームの目的関数wが次式に変形できる．

$$w=\frac{s_1^TAt}{s_2^TBt}=\frac{s_1^T1}{s_2^T1}(=1) \tag{10}$$

ここで，$s_1^T1=1$, $s_2^T1=1$ なる条件が課されているので，wの値は必然的に$s_1^T1=1$, $s_2^T1=1$なる条件の自由度の下で1をとる．すなわち，$t=(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$，かつ，$A, B$の第2列の要素が全て1であるため，

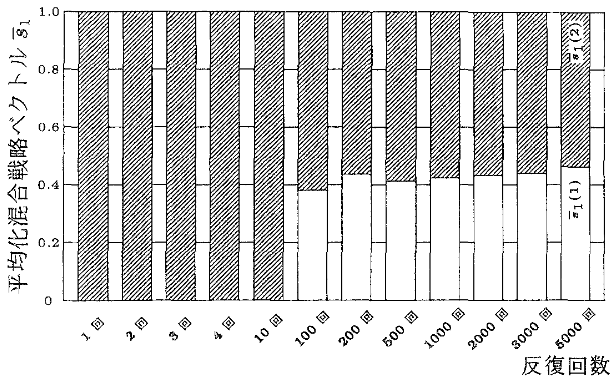

図4　平均化混合戦略ベクトル $\bar{s}_1$ の反復過程

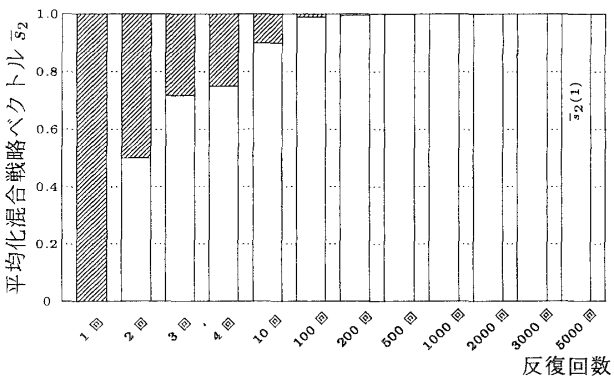

図5　平均化混合戦略ベクトル $\bar{s}_2$ の反復過程

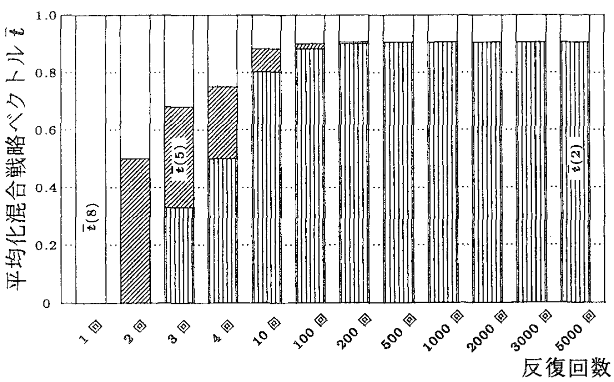

図6　平均化混合戦略ベクトル $\bar{t}$ の反復過程

s_1, s_2はベクトル内要素総和が1ならば，$\bar{s}_1=(0,1)^T$, $\bar{s}_2=(0,1)^T$に限定されず，Model-Name＝CCR-Iの出力データ値も含むより広範囲の値をとりうる自由度をもつ．

6. おわりに

DEAの入力指向CCRモデルを例にとり，DEAに対応するDEAゲームの概念を提唱した（3章）．DEAが注目DMU_oの効率性（これを「個人効率」と呼ぶ）をそのDMUに有利になるよう入出力評価ベクトルを決めるアプローチであるのに対し，DEAゲ

[2]ここで，$\bar{t}, \bar{s}_1, \bar{s}_2$は各々，各反復過程において算出された暫定的な$t, s_1, s_2$を累積後平均化したベクトルである．

ームでは，注目 DMU_o で基準化した入出力データ行列を用いた分数行列ゲームをDMU毎に考え，注目 DMU_o からみた，全DMUに関する効率値（これを「全体効率」と呼ぶ）の最大化/最小化ゲームを想定する（4章）．5章では，DEAのLP解とDEAゲームの反復解が整合性を持つことを，2入力2出力8DMU問題を例にとり示した．これにより，DEAゲームの概念ならびに反復解法アルゴリズムの妥当性を示した．

入力指向CCRモデルを例にとり，両者の対応関係を例示したが，DEAゲームの概念は全体効率の概念を表に出すならば，本来のDEAモデルの存在とは無関係に考案でき，様々なゲームの目的関数さらには制約条件を持つDEAゲームが一人歩きを始める．又，図1に反復解法のアルゴリズムを示したが，これは，「長い間言い伝えられてきた民間伝承戦略がゲームの解を与える！」というゲーム理論研究者の間の民間伝承についてのアルゴリズム上での1つの具現化と考えられる．従って，図1に示した反復アルゴリズム以外に様々な変形が考えられ，その変形の方法に依存して，ゲーム規則が規定され，新たなDEAゲームが誕生する．

参考文献

[1] 篠原正明：「CCRモデル-LP定式化のゲーム理論ならびに多変量解析的解釈」，第9回RAMPシンポジウム論文集，pp. 113-134 (1997).

[2] 篠原正明：「包絡分析と回帰分析を含む性能評価法DEARA」，オペレーションズ・リサーチ誌，40, 12, pp. 691-695 (1995).

[3] Cooper, W. W., Seiford, L. M. and Tone, K.: *Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers (2000).