乗数形式 DEA モデルと生産関数

生田目　崇

1. はじめに

DEA (data envelopment analysis) は，観測された評価対象の活動から，活動の相対的な効率性を評価するためのノンパラメトリックな手法である．DEA により得られる効率的フロンティアは，効率的な活動により支持されるファセットの集合として求められるが，効率的な活動同士の間については（故意に）注意を払っていない．一方で経済学では DEA の効率的フロンティアに相当する生産関数に関して古くから盛んに研究されてきた．本稿では，経済学の生産関数と関係の深い乗数形式 DEA モデル（DEA multiplicative model）について概説する．乗数形式 DEA はその名のとおり，従来の線形 DEA モデルのように入力および出力の各項目とウェイトの積和を元に効率性を判断するのではなく，各項目に対して乗数としてウェイト付けし，その積を総合された入力および出力として効率性を判定しようとするモデルである．

2. 生産関数

企業活動は，資本や設備，労働などの経営資源（入力）を投入し，財などの便益（出力）を産出していると考えられる．投入された入力から出力を産出するプロセスの効率性を考えたとき，その投入量からなるべく多くの出力を得ようとするであろう．こういった関係は一般に生産関数（production function）として表現される．

生産関数とは，企業が生産のために投入する資本や設備・機械，労働などの入力と生産可能な出力の「最大量」との技術的関係を表したものである[8]．生産関数の形状を考えるために，今2つの投入（入力；x_1, x_2）から1つの財（出力；y）を得るような関数を取り上げる．この生産関数を，

$$y=f(x_1, x_2) \tag{1}$$

とすると，$t>0$ という定数に対して $f(tx_1, tx_2)=t^p f(x_1, x_2)$ という関係が成り立つとする．このとき，$p=1$ ならば規模の収穫一定な生産関数であり，$0<p<1$ および $1<p$ のときそれぞれ規模の収穫が逓減および逓増な生産関数を表す．

このように2種類の入力から1つの出力を得る活動を表す生産関数の1つに Cobb-Douglas 生産関数がある．Cobb-Douglas 生産関数は次の式で表される．

$$y=Ax_1^a x_2^{1-a} \tag{2}$$

A は正の定数であり，a は $0<a<1$ の定数である[1]．Cobb-Douglas 生産関数は，CES（constant elasticity of substitution）関数として知られている2つの入力間の代替の弾力性を一定とした生産関数において，代替の弾力性を1とした場合の関数である[2]．また，CES 関数は一次同次な関数であり，これは規模の収穫が一定であることを仮定した関数である．よって，Cobb-Douglas 生産関数も一次同次な関数である．ただし，x_1, x_2 の指数の和が1未満のときは規模の収穫は逓減となり，1を超えれば規模の収穫は逓増となるように一般化することができる．

さて，実際に観測される活動を考えると，観測の際に誤差を含むと考えられる．そこで，観測された活動をもとに，統計的手法を用いた生産関数の推定がおこなわれてきた．しかし，生産関数は定義にあるように入力と出力の最大量の技術的関係を記述するものであり，経営上の失敗などによる技術的な非効率性を排除した上で生産関数を求める必要があろう．そのために，たとえば Aigner, Knox, Lovell and Schmidt[1] は，一次同次の生産関数について，式のような誤差項 ε

[1] Cobb-Douglas 生産関数を一般化した生産関数に translog 生産関数がある．

[2] $y^{-\beta}=A(ax_1^{-\beta}+(1-a)x_2^{-\beta})$ であり，代替の弾力性は $1/(1+\beta)$ となる．Cobb-Douglas 生産関数は $\beta\to 0$ とした極限として与えられる[8]．

なまため　たかし
東京理科大学　工学部　経営工学科
〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3

を考慮した確率的生産フロンティアを提案している．

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3}$$

ただし，$\boldsymbol{y}$は出力に関する観測ベクトル，$\boldsymbol{X}$は入力に関する観測行列であり$\boldsymbol{\beta}$は行列$\boldsymbol{X}$の各項に対するパラメータである．ここで彼らは，誤差項ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}$は測定誤差$\boldsymbol{r}$と技術的非効率性$\boldsymbol{\alpha}$で構成され，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\alpha}$と分解することで，技術的非効率性を分離している．このとき測定誤差$\boldsymbol{r}$は$\boldsymbol{X\beta}$で表される生産関数に対して両側分布となるように，また技術的非効率性$\boldsymbol{\alpha}$は片側分布となるように分布形に仮定をおいて，統計的方法を用いて生産関数を算出している．しかし，求められる生産関数は誤差項の分布の形状に依存するため，妥当な仮定を置くことは容易ではない．さらに複数の出力項目を同時に扱うことはできない．

3．乗数形式DEAモデル

統計的な方法で技術的非効率性を排除する方法とは違い，DEAは観測された活動（DMU；decision making unit）から得られる活動領域（生産可能集合）をもとに効率性を評価し，非効率的な活動を排除することができる．DEAではこのように技術的非効率な活動をしているDMUを排除することができるため，DEAによって定められる効率的フロンティアは複数の出力を考慮した上での，生産関数から得られる生産曲面に相当すると考えることができる．ただし，従来の線形のDEAモデルは観測された活動以外の部分はパラメトリックに補完しようとしないノンパラメトリックな手法である．

それに対し，乗数形式DEAモデルではその効率性の評価式が上記のCobb-Douglas生産関数を拡張した形で与えられる．よって，乗数型DEAモデルによって効率的と判定されたDMUはCobb-Douglas生産関数と比較をおこないやすい．

乗数形式DEAモデルを示す前に記号を定義する．

j：DMUを表す添字$(j=1,2,\cdots,n)$
a：分析対象のDMUを表す添字
i：入力項目を表す添字$(i=1,2,\cdots,m)$
r：出力項目を表す添字$(r=1,2,\cdots,k)$
X_{ij}：DMU_jの入力iの値
Y_{rj}：DMU_jの出力rの値
λ_{ja}：DMU_jに対する非負結合係数
ν_{ia}：入力iに対するウェイト
μ_{ra}：出力rに対するウェイト
s：スラック変数
μ_{ra}：出力rに対するウェイト
$\hat{}$：対数変換を表す$(\hat{x}=\log x)$

乗数形式DEAモデルは1982年のCharnes，Cooper，Seiford and Stutzの論文にはじまる[3,4]．彼らの提案したモデルは以下の通りである．

[P 1]$(a=1,2,\cdots,n)$

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m}\hat{s}_{ia}^{-}+\sum_{r=1}^{k}\hat{s}_{ra}^{+} \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}\hat{X}_{ij}+\hat{s}_{ia}^{-}=\hat{X}_{ia},$$

$$i=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}\hat{Y}_{rj}-\hat{s}_{ra}^{+}=\hat{Y}_{ra},\ r=1,2,\cdots,k \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}=1 \tag{7}$$

$$\lambda_{ja}\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

$$\hat{s}_{ia}^{-}\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \tag{9}$$

$$\hat{s}_{ra}^{+}\geq 0,\ r=1,2,\cdots,k \tag{10}$$

特筆すべきは，このモデルが発表された1982年にはまだBCCモデルは発表されていないにも関わらず，このモデルは規模の収穫可変のBCCモデルの生産可能集合のもとで，活動から効率的フロンティアまでの1次距離の和の最大化を目指した加法モデルと同様の定式化がなされていることである．

さて，[P 1]の双対問題を考えると次のようになる．

[P 2]$(a=1,2,\cdots,n)$

$$\max \quad \sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}\hat{Y}_{ra}-\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}\hat{X}_{ia} \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}\hat{Y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}\hat{X}_{ij}\leq 0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

$$\nu_{ia}\geq 1,\ i=1,2,\cdots,m \tag{13}$$

$$\mu_{ra}\geq 1,\ r=1,2,\cdots,k \tag{14}$$

さらにこの問題を指数変換すると以下のようになる．

[P 3]$(a=1,2,\cdots,n)$

$$\max \quad \frac{\prod_{r=1}^{k}Y_{ra}^{\mu_{ra}}}{\prod_{i=1}^{m}X_{ia}^{\nu_{ia}}} \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\prod_{r=1}^{k}Y_{rj}^{\mu_{ra}}}{\prod_{i=1}^{m}X_{ij}^{\nu_{ia}}}\leq 1,\ j=1,2,\cdots,n \tag{16}$$

$$\nu_{ia}\geq 1,\ i=1,2,\cdots,m \tag{17}$$

$$\mu_{ra}\geq 1,\ r=1,2,\cdots,k \tag{18}$$

このように[P 3]は，指数部分のウェイトによる入出力それぞれの積を統合された入出力として，効率性を評価する式となる．

Charnes，Cooper，Seiford and Stutzの乗数形式

モデルでは，いわゆる加法モデルのように入力・出力指向のモデルではなかったが，1986年にBanker and Maindiratta[2]は，BCCモデルを元にした乗数形式モデルを提案している[3]．

[P 4]$(a=1,2,\cdots,n)$

$$\max \quad \hat{\gamma}_a \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{\gamma}_a+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}\hat{X}_{ij}\leq \hat{X}_{ia},\quad i=1,2,\cdots,m \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}\hat{Y}_{rj}\geq \hat{Y}_{ra},\ r=1,2,\cdots,k \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}=1 \tag{22}$$

$$\lambda_{ja}\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{23}$$

$$\hat{\gamma}_a\geq 0 \tag{24}$$

[P 2]は入力指向のモデルであるが，出力指向のモデルも考えることができる．Charnesらのモデルの場合と同様の手順で，[P 4]の双対問題を考えると[P 5]を得る．

[P 5]$(a=1,2,\cdots,n)$

$$\max \quad \sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}\hat{Y}_{ra}-\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}\hat{X}_{ia}+\hat{\eta}_a \tag{25}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}\hat{Y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}\hat{X}_{ij}+\hat{\eta}_a\leq 0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}\geq 1 \tag{27}$$

$$\nu_{ia}\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \tag{28}$$

$$\mu_{ra}\geq 0,\ r=1,2,\cdots,k \tag{29}$$

さらに[P 5]を指数変換すると次の問題が得られる．

[P 6]$(a=1,2,\cdots,n)$

$$\max \quad \frac{\eta_a\prod_{r=1}^{k}Y_{ra}^{\mu_{ra}}}{\prod_{i=1}^{m}X_{ia}^{\nu_{ia}}} \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\eta_a\prod_{r=1}^{k}Y_{rj}^{\mu_{ra}}}{\prod_{i=1}^{m}X_{ij}^{\nu_{ia}}}\leq 1,\ j=1,2,\cdots,n \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}\geq 1 \tag{32}$$

$$\nu_{ia}\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \tag{33}$$

$$\mu_{ra}\geq 0,\ r=1,2,\cdots,k \tag{34}$$

[P 6]は[P 3]のモデルと異なり，各DMUの効率性尺度に変数η_aがあるが，この変数は入出力値の単位を無次元化する役割をもつ．[P 3]はそういった役割を果たす変数がないため，目的関数値は単位に対して不変あるが，ウェイトν_{ia}，μ_{ra}は単位の影響をうける．それに対して[P 6]の場合はウェイトν_{ia}，μ_{ra}の値も単位に対して不変であり，本来の重要度としての意味をもった値となる．

[P 3]または[P 6]において最適目的関数値が1（[P 1]，[P 2]，[P 4]，[P 5]の最適目的関数値は0）ならば効率的な活動であり，そうでなければ非効率的な活動と判定される．[P 1]から[P 6]の生産可能集合は，以下の条件を満たす入出力の組$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$となる．

$$x_i\geq\prod_{j=1}^{n}X_{ij}^{\lambda_{ja}},\ i=1,2,\cdots,m \tag{35}$$

$$y_r\leq\prod_{j=1}^{n}Y_{rj}^{\lambda_{ja}},\ r=1,2,\cdots,k \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ja}=1 \tag{37}$$

$$\lambda_{ja}\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{38}$$

このようにこれらのモデルはすべて，対数軸上でBCCモデルと同様の生産可能領域を仮定するため，フロンティアは対数座標上で区分線形な有限個のファセットとして求められる．よって，規模の収穫が可変なフロンティアが得られ，それぞれのファセットでは最適ウェイトは異なる．

4．効率的フロンティアと生産関数の関係

生産要素および生産物の水準を変えられるような長期の期間を考えない場合，一般には規模の収穫が逓減の生産関数をもつといわれている．しかし，投入量が少ない場合は逆に規模の収穫は逓増であるということがある．こういったことを加味して，短期の生産関数としてはS字型の生産関数を考えるのが一般的であるといわれている[8]．つまり，入力の投入量が増加するにあたり，規模の収穫が逓増から一定さらに逓減へと変わる[4]．

従来の線形のBCCモデルでは，規模の収穫を可変としこういったS字型の生産関数をある程度表すように，効率的フロンティアが張られる．しかし，区分線形なフロンティアであるため，規模の収穫は逓増および逓減の部分ではS字型から外れたフロンティア

[3]本稿では，乗数形式DEAモデルと生産関数の関係に焦点を当てるため，厳密な効率性の判定のためのスラック変数は扱わない．詳しくは参考文献をご覧いただきたい．

[4]経済学の専門書では，S字型生産関数では，入力の投入量がさらに増えると互いに邪魔しあって出力量が減るように説明されている．

を張る．

以下に，1入力1出力の場合を例に，線形のBCCモデルと乗数形式モデルによるフロンティアを比較する．点A, C, Eの入出力はそれぞれ，(2,1)，(3,5)，(7,7)である．点Dは線形座標上で点Cと点Eの中点(5,6)であり，点Bは対数座標上で，点Aと点Cの中点$(10^{\{(1/2)\times(\log 2+\log 3)\}}, 10^{\{(1/2)\times(\log 1+\log 5)\}})$である．図1に線形のBCCモデルと乗数形式モデルの効率的フロンティアを比較する．また，図2は両対数軸平面における効率的フロンティアである．

点A, C, Eは線形モデル，乗数形式モデルどちらの場合も効率的となる．図1の通り，線形モデルでは効

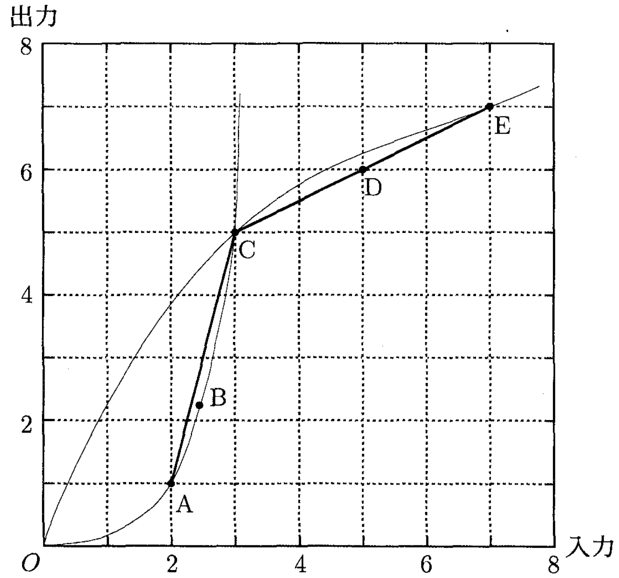

図1　実数座標上の効率的フロンティア

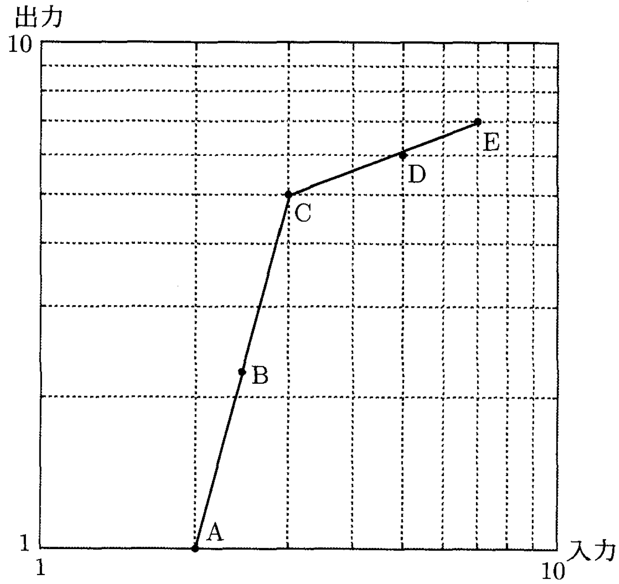

図2　両対数座標上の効率的フロンティア

率的とならない点Bが乗数形式モデルでは効率的となり，点Dはその逆となる．よってS字型の生産関数を考える場合は点BやDのような点は過小もしくは過大評価となってしまう．乗数形式DEAモデルにおける効率的フロンティアは，線形座標上では図1の細線で示すようにAC間は原点より点A, B, Cを順に通るような曲線から得られ，CE間は原点から点Cを通り点Dの上側を通り点Eに向かう曲線から得られる．よって，規模の収穫が逓増の場合（AC間）は下に凸，規模の収穫が逓減の場合は上に凸の生産関数が得られる[5]．

また，[P 6]において効率的と評価されたDMUについてはその最適目的関数が1であるので(39)式の関係が成り立つ．

$$\prod_{r=1}^{k} Y_{ra}^{\mu_{ra}^*}=\frac{1}{\eta_a^*}\prod_{i=1}^{m} X_{ia}^{\nu_{ia}^*} \tag{39}$$

ただし，ν_{ia}^*，μ_{ra}^*，η_a^*は[P 6]により求まる最適解である．

(39)式は，(2)式の出力項目（左辺のy）を複数にし，入力同様指数のウェイト付けをした場合を表しており，いわば多入力多出力システムのCobb-Douglas生産関数に相当するものとなる．規模の収穫については，(39)式がCobb-Douglas生産関数を拡張したものであることを考えても分かるように，$\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}^*\geq(>)1$かつ$\sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}^*=1$ならば（強意に）規模の収穫逓増であり，$\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}^*=1$かつ$\sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}^*\geq(>)1$の場合は（強意に）規模の収穫逓減である．また，$\sum_{i=1}^{m}\nu_{ia}^*=1$かつ$\sum_{r=1}^{k}\mu_{ra}^*=1$の場合，規模の収穫は一定となる．逆にこれらを制約条件に加えることにより，さまざまな規模の収穫を仮定した乗数形式モデルによる評価を行うことができる[6]．

5. 乗数形式DEAモデルの周辺の話題

前章までで，乗数形式DEAモデルと生産関数の関係について述べた．本章では，乗数形式DEAにまつわる話題について公刊されている論文を中心に触れる．そして，最後に将来の研究課題について述べる．

Charnes, Gallegos and Li[5]は多入力1出力システムを対象とした生産関数において，乗数形式モデルに

[5] 点Cにおいて生産関数は連続ではあるが滑らかではないことに注意していただきたい．

[6] 一般にDEAで効率的と判断されるDMUに対するウェイトは一意に定まらない．本モデルの場合も同様であり，ウェイトの取り得る範囲について注意が必要である．

より効率的と判定されたDMUに対して，参照集合となる回数を頑健性の指標として挙げ，目標計画法を用いて生産関数の推定をおこなっている．さらにこのモデルを南米の航空会社各社の経営効率分析に用いている．さらに彼らは入力項目を変化させたときの出力への影響を求めている．しかし，出力項目は1つに限定された方法であり，DEAの特徴をいかしきれてはいない．

平瀬，合田，山口，福川[6]は，乗数形式モデルにおいても観測される生産可能領域内でしか定義されない効率的フロンティアをCFA（constrained facet analysis）の概念を用いて，生産活動領域の外側に対する効率的フロンティアの導出をおこなっている．彼らの方法では従来の線形モデルにおいてCFAを用いた場合におこる，射影される効率的フロンティア上の点がない場合があるという問題を解決するのに有効の手段であると述べている．

また，著者らは多入力多出力システムに対し，乗数形式DEAモデルにより効率性を判定し，効率的と判定されたDMUを用いて，DMU群の複数の入力と出力の関係を求めている[7]．その際，(39)式を対数変換すると正準相関分析の枠組みで扱えることに着目し，DMU群全体に対するCobb-Douglas型生産関数に相当する生産曲面を求めている．さらに共分散構造分析を用いて，各出力項目に対する入力項目の影響について考察している．

このように，乗数形式DEAモデルにおいてはいくつかの研究が行われているが，線形モデルと比較してその数は非常に少ない．DEAの1つの特長としてはノンパラメトリックな評価方法であるということが挙げられる．しかし，このように従来の生産関数との比較をおこなおうとする試みは，ある意味でそういった特長を捨ててしまっていることになる．パラメトリックな手法が持っている，得られたパラメータの検定や区間推定などができるという特長を積極的に取り入れていくことでこういった批判を拭い去ることができるものと考えられる．また，たとえば規模の収穫に関して妥当と思われる仮定が存在する場合は，乗数形式モデルを用いた方が，より妥当な評価をおこなうことができると考えられる．さらに，線形のDEAモデルで提案されているさまざまな手法（ウェイトの制限や固定項目の扱いなど）を乗数形式DEAモデルにどのように取り入れるかについてはまだまだ検討されるべき課題といえよう．

参考文献

[1] Aigner, D. J., C. A. Knox Lovell and P. Schmidt: "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 6, pp. 21-37 (1977).

[2] Banker, R. D. and A. Maindiratta: "Piecewise Log-linear Estimating of Efficient Production Surfaces," *Management Science*, Vol. 32, No. 1, pp. 126-135 (1986).

[3] Charnes, A., W. W. Cooper, L. Seiford and J. Stutz: "Invariant Multiplicative Efficiency and Piecewise Cobb-Douglas Envelopments," *Operations Research Letters*, Vol. 2, No. 3, pp. 101-103 (1983).

[4] Charnes, A., W. W. Cooper, L. Seiford and J. Stutz: "A Multiplicative Model for Efficiency Analysis," *Socio-Economic Planning Sciences*, Vol. 16, No. 5, pp. 223-224 (1982).

[5] Charnes, A., Gallegos, A. and H. Li: "Robustly Efficient Parametric Frontiers via Multiplicative DEA for Domestic and International Operations of the Latin American Airline Industry," *European Journal of Operational Research*, Vol. 88, pp. 525-536 (1996).

[6] 平瀬啓太，合田充利，山口俊和，福川忠昭："CFAを用いた対数形DEAモデル，" オペレーションズ・リサーチ，Vol. 39, No. 11 pp. 613-618 (1994).

[7] Namatame, T., S. Sato and T. Yamaguchi: "An Estimation of Production Functions for Multiple Inputs and Outputs System via DEA Concept," Oral Presentation in INFORMS 2000 Autumn, San Antonio, USA (2000).

[8] 西村和雄：「ミクロ経済学入門第2版」，岩波書店 (1982).