

立体トラスの部材配置最適化

大崎 純, 加藤 直樹

1. はじめに

建築構造物の中で最も一般的なビル型骨組は、柱や梁部材を直交方向に接続して形成される。それらの部材間には、例えば大梁や小梁のように、力の流れにしたがって階層構造が存在する。

ビル型骨組とは異なり、軸力のみを伝える部材で構成された構造物をトラスといい、部材に曲げ変形が生じないように、部材の両端は自由に回転できるピン接合とする。トラス部材は一般に細長く軽量であるため、大空間を覆うための立体トラスに利用されることが多い (例えば[1, 2])。

立体トラスの部材には、ビル型骨組での梁や柱のような明確な種別や階層関係がなく、古くから経験的な試行錯誤によって多くの種類の部材配置が提案されてきた。立体トラスの典型的な形態を図1, 2に示す。部材配置は、意匠上も重要な意味を持つため、力学的な尺度だけでは決定することはできない。図1, 2からわかるように、立体トラスのユニットは、安定な平面構造物の最小単位である三角形で構成されることが多い。

トラスの典型的な形態は、長年にわたる試行錯誤によって完成されたものであり、様々な長所を持っている。しかし、最近の計算機の進歩にともない、最適な形態を計算機上で作り出すことが可能になってきた (建築の分野では例えば[3, 4])。力学的性能や制約を考慮して最適な形態を求めることを、形状最適化あるいはトポロジー最適化といい[5]、機械や航空の分野で多くの応用例がみられる。

本稿では、まず、力学的制約を考慮したトポロジー最適化の概要と問題点を解説する。さらに、計算幾何学的手法を用いた曲面の三角形分割法の最近の研究を紹介し、立体トラスの部材配置最適化への適用可能性

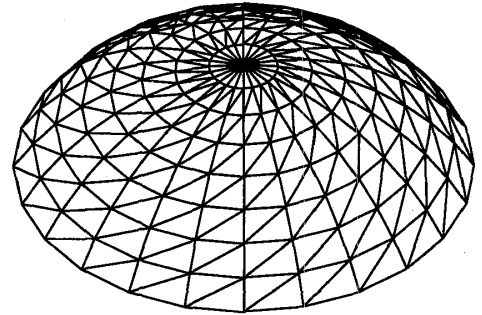


図1 シュヴェードラードーム

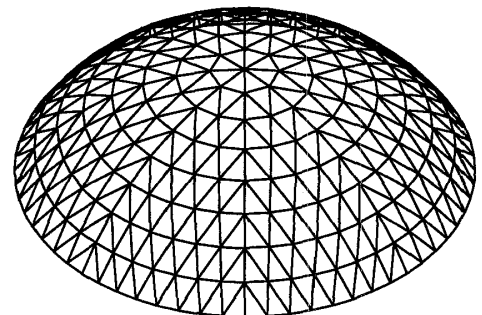


図2 ラメラドーム

について検討する。

2. トラスのトポロジー最適化

構造物を力学的制約条件の下で最適化する問題を構造最適化問題あるいは最適設計問題といい、部材の断面積や、節点位置などの変数は、設計変数といわれる[6]。また、制約条件は、材料の性質や設計規準などで定められ、一般に不等式で与えられる。目的関数の定義が最も不明確であるが、必要な材料の総重量を最小化する最小重量設計問題を考えることが多い。

設計変数ベクトルを $\mathbf{x} \in R^m$ とし、節点変位などの構造物の状態を表わす状態変数ベクトルを $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in R^n$ とする。例えば、静的荷重ベクトル $\mathbf{p} \in R^n$ に対する応答を考える場合には、 \mathbf{u} は次式を解いて求められる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ は剛性行列である。

おおさき まこと, かとう なおき
京都大学大学院 工学研究科
〒606-8501 京都市左京区吉田本町

制約関数は x 及び $u(x)$ の関数であり、そのベクトルを $g(x; u(x))$ とする。また、変数の上下限界を x^l, x^u 、目的関数を $C(x)$ とすると、構造最適化問題は一般に次のような形式となる。

$$\text{Minimize } C(x) \quad (2)$$

$$\text{subject to } g(x; u(x)) \leq 0 \quad (3)$$

$$x^l \leq x \leq x^u \quad (4)$$

$g(x; u(x))$ を x のみの関数と考えて $\hat{g}(x)$ のように書くと、上記問題は非線形計画問題の形式となり、微分係数を用いたアルゴリズムで解くことができる。

しかし、 u の第 j 成分を u_j とすると、

$$\frac{\partial \hat{g}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(x)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (5)$$

であるから、構造最適化問題を解くためには、 u の x に関する微分係数（設計感度係数）が必要になる。それらは、 $g(x; u(x))$ の定義式を x で微分した式から得られ、設計感度係数を求める過程を設計感度解析という。例えば、静的問題では、(1)式の両辺を x の第 i 成分 x_i で微分した次式を用いる。

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} u + K \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (6)$$

実際の設計問題では、行列 K のサイズは数千あるいは数万になることもある。したがって、構造最適化問題では、制約関数の評価と設計感度解析のために多くの計算量を必要とし、それらの回数が少ないアルゴリズムを選択する必要がある。

存在可能な節点位置を固定して、それらを結ぶ部材の接続関係を最適化することをトポロジー最適化という。通常は、部材の断面積を下限値が0の連続変数として最適化し、その結果断面積が0となって不要とみなすことができる部材を除去して最適トポロジーを得る。このような手法をグランドストラクチャ法という [5, 7]。

この手法を用いると、設計変数は連続変数であるから、最適トポロジーを得ることは容易であるように見える。しかし、トポロジー最適化には次のような困難点が存在する。

1. 固有振動数などの固有値に関する制約を与えると、最適解においてそれらが重複することが多い。そのため固有値の設計感度係数が不連続になり、勾配に基づく非線形計画法を適用することが困難になる [8]。
2. トラスの単位断面積あたりの軸力を応力という。応力制約条件を考慮する場合には、存在しない部

材では制約が満たされる必要はないため、最適化問題の定式化に場合分けが必要になる。また、最適解が許容領域の尖点に位置することもある [9]。

3. 最適化の結果、不安定なトラスが得られることが多い [5, 10, 11]。

上記の1については、半正定値計画法を用いれば、多くの固有値が重複する場合にも困難なく最適トポロジーを得ることができることが知られている [12]。

応力制約にとまらぬ困難点を、以下に簡単に説明する。第 i 部材の断面積及び応力を A_i, σ_i とし、応力の絶対値の上限値を $\bar{\sigma}$ とすると、応力制約条件は次のように書くことができる。

$$|\sigma_i| \leq \bar{\sigma}, \text{ for } A_i > 0 \quad (7)$$

ここで、 $A_i = 0$ の部材には応力制約は与えられない。このような場合分けを回避するために、部材が存在するとき1、存在しないとき0であるような0-1変数 y_i を用いて応力制約を $|\sigma_i| y_i \leq \bar{\sigma}$ あるいは $|\sigma_i| y_i \leq \bar{\sigma} y_i$ のように書くこともできる。いずれにしても、最適化問題は混合整数計画問題となるため、分枝限定法などを用いて解かなければならない [13]。

続いて、最適トポロジーの不安定性について考察する。例えば、図3のような4部材トラスに対し、荷重の作用する節点の変位に関する制約の下で最適なトポロジーを求めることにする。部材3, 4には軸力が作用しないから、 P が正のときには部材1, 2のみが存在するトラスが得られる。このトラスは節点2において不安定であるが、節点2を固定すれば1つの部材からなる安定なトラスが得られる。しかし、 P が負で部材に圧縮力が作用する場合、節点2を固定して得られる部材は細長いので、座屈といわれる現象により、部材に曲げ変形が生じて崩壊するかもしれない。したがって、図3のような簡単な平面トラスでも、不安定な最適トラスをまず求めておいて、後でそれを安定化すればいいというわけにはいかない [14]。

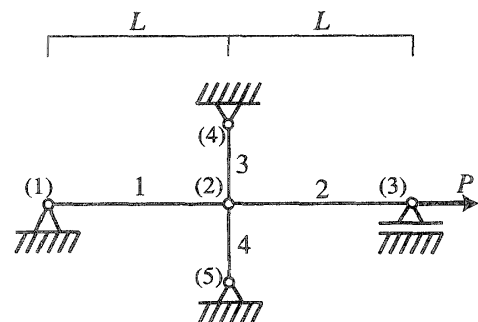


図3 軸力をうける4部材トラス

次に、立体トラスの不安定性について検討してみる。図2のラメラドームの緯線方向分割数が3の場合について、頂点に鉛直下向き荷重が作用した場合の頂点変位に関する制約の下で、部材重量を最小化するような解を求めると、図4のような断面積分布が得られた。したがって、中央付近に太い部材が必要であることがわかる。これに対し、頂点の節点と図4に示した支点a, b, c, d及びそれらと対称な位置にある4つの支点を直接結ぶ8本の部材が存在可能であるときには、最適トポロジーは図5のようになり、2つの長い部材以外

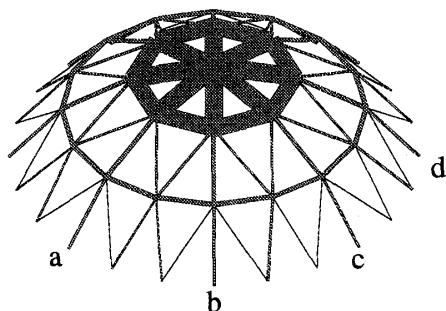


図4 ラメラドームの最適部材断面積

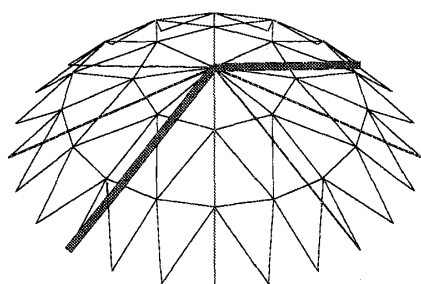


図5 頂点と支点を直接結ぶ部材がある場合の最適トポロジー

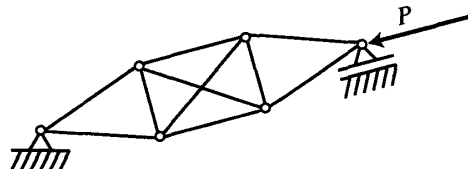


図6 立体トラスの不安定な平面要素

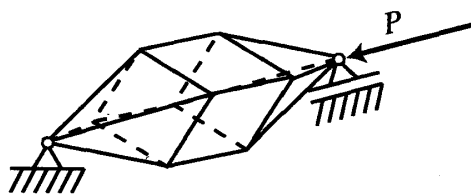


図7 立体トラスの不安定な立体要素

の部材の断面積は微小な値になっている。このトラスは、2つの部材が存在する平面内には安定であるが、面外には不安定である。したがって、中央の節点を剛に接合しても、面外への不安定性は解消されず、立体トラスでは、平面トラスにはなかったような不安定性が見られることがわかる。トラスの対称性を保持するような制約を与えれば、8本の長い部材に均等に断面積が配分される解が得られるが、その場合にも、部材の座屈の問題が残される。また、頂点と支点を直接結ぶ部材は、最初に想定した球面とはかけ離れており、このようなトラスは意匠上も望ましくない。

さらに、例えば図6のような平面トラスも面外に不安定であり、図7のような立体トラスも、支点を結ぶ軸周りの回転に関して不安定である。したがって、立体トラスでは、平面トラスのように不安定な節点を固定するというような簡単な操作で安定化することはできず、トポロジー最適化は極めて困難である。

3. 球面上の一様三角形メッシュ生成と立体トラス部材配置最適化への応用

前節で紹介したように、立体トラスの設計問題では、力学的性能に関する制約条件、意匠上の制約条件のもとで最適設計を行なっている。本章ではこの設計問題から生じる球面上の一様三角形メッシュ生成に関する新しいアルゴリズムを紹介し、立体トラス部材配置最適化への応用について言及する。

大スパンの空間を覆う屋根として用いられるトラス構造物の中で、単層の形式のトラスは、三角形のユニットで構成されることが多い(図1, 2参照)。

三角形ユニットからなる部材配置を決定するときの条件としては、外力作用時の応答量などの力学的特性に加えて、ユニットの形状、部材長の分散などの意匠的要求が存在し、それらを制約条件あるいは目的関数として導入した最適化問題を定式化することができる。ここでは力学的特性に関する要求や制約は陽に考慮せずに部材長のばらつきのみを考慮する問題を考える。実際、生産コストの観点から部材長のばらつきを小さくすることが必要であり、ばらつきが小さければ得られる三角形要素は正三角形に近くなり力学的特性の観点からも優れた構造物となることが期待される。したがって、問題は、与えられた曲面に所与の個数の節点を配置し、曲面を辺長のばらつきの少ない三角形メッシュで近似する問題として定式化できる。

これらを背景に、筆者等[15~17]は、最近次のよう

な最適化基準の下での三角形メッシュ分割問題を考察した。

問題 1: 与えられた曲面上に一定個数の節点を配置して、その点集合の三角形分割で生じる最大辺と最小辺の長さの比を最小化する三角形メッシュ分割を求める問題。

この問題は NP 困難と考えられる難しい問題であるが、文献[15]において、平面上の凸多角形領域に対して逐次ボロノイ分割アルゴリズムにより定数近似の解が容易に得られることを示した。また、文献[16, 17]においてこのアルゴリズムはさらに曲面上の三角形メッシュ生成に拡張されている。本稿では球面上の三角形メッシュ生成に限定して得られた理論的成果と実験結果を紹介する。この問題に対しては、Nooshin 等[18]によって、ここで紹介する手法とは別のヒューリスティックが提案されているが、その理論的評価は行われていない。

なお、三角形メッシュは有限要素法に対して広く応用されているが、そこでは、大きな計算誤差が生じないように、現れる角度ができるだけ均等になるようなメッシュ生成法の研究が盛んに行われている[19, 20]。ここで扱う問題はその意味で新しいタイプの三角形メッシュ生成問題と言える。

3.1 問題の定式化と解法

球面上の上半分の半球面（それを P と記す）とその境界上にあらかじめ配置された点集合 V が与えられているとする。 S を P の内部または境界上に配置された n 点集合とし、 V を P の頂点集合とする。平面上の二点 u, v に対して $d(u, v)$ を u, v 間のユークリッド距離、 $d(e)$ を辺 e の長さとする。また、平面上の有限集合 X, Y に対して $d(X, Y) = \min \{d(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ とする。すると、上の問題は次のように定式化される。

$$\text{問題 1: } \min_{S \subset P, |S|=n} \min_{T \in \mathcal{T}} \frac{\max_{e \in T} d(e)}{\min_{e \in T} d(e)}.$$

ここで \mathcal{T} は $S \cup V$ に対するすべての三角形分割の集合を表す。

逐次ボロノイ分割アルゴリズムは、すでに配置された点集合から最も遠い点位置を領域内から選び、そこにあたらしく点を配置するという操作を繰り返すもので、以下のように記述される。

Algorithm INCREMENT

Step 1 $S := \emptyset$ とする。

Step 2 P 内で $d(x, V \cup S)$ を最大にする点 x を p^*

とする。そのために $V \cup S$ に対する三次元ボロノイ図 $V \text{ or } (V \cup S)$ を利用する。

Step 3 $S := S \cup \{p^*\}$ とし、 $|S| < n$ なら Step 2 に戻る。

Step 4 得られた n 点集合 S を S_n とし、 $d_n = d(S_n \cup V, S_n \cup V)$ とする。 $S = \emptyset$ とする。

Step 5 P の境界上に、相続く 2 点間の距離が $d_n \sim 3d_n$ となるように点を配置する。配置された点の数を k とし、その点集合を S_k とする。

Step 6 $V \cup S_k$ を初期配置点集合として、Step 1 から Step 2 を適用して $n - k$ 点を P 内に配置する。

Step 7 最終的に配置された点集合を S'_n とし、 $V \cup S'_n$ のデローネ三角形分割を出力する。

p_k と S_k をアルゴリズムの k 回目の繰り返しにおける Step 2 で求められた点と Step 3 で得られた点集合とする。

3.2 理論的評価と実験結果

得られた三角形分割の辺長比がどの程度に収まるのかという理論的興味に対して次の定理を得ている。

定理 1: n が $d_n \leq d(V, V)/2$ と $n \geq 2k + |V|$ を保証できるぐらい十分大きいとする。このとき、アルゴリズムで得られた三角形分割辺の球面距離は $6d_n$ 以下である。辺長比については次式が成り立つ。

$$\frac{d(e_{\max})}{d(e_{\min})} \leq 6.$$

ただし、 e_{\max}, e_{\min} は各々アルゴリズムによって得られた三角形メッシュの最大辺および最小辺である。

アルゴリズムの Step 5 では、Step 4 で定まった d_n をもとに境界上に点間の距離が $d_n \sim 3d_n$ の範囲に収まるように配置するが、半球面の境界形状（赤道部分）は鋭角部分がないので $d_n \sim 2d_n$ の範囲に収まるように配置できる。このとき、次のように辺長比が改善できる。

系 1: $a > 2$ に対して、 $n \geq \frac{a^2}{a^2 - 4} k$ を満たすとする。

さらに、領域の境界上に点間の距離が $d_n \sim 2d_n$ を満たすように配置できるものとする。するとアルゴリズムによって得られる辺長比の上限は $2a$ で抑えられる。 n が十分大きいと a が 2 に近づき、辺長比は 4 に近くなる。

以下計算実験の結果について述べるが、半球面や球を平面で切り落とした領域（半球面より小さいものとする）に対して色々実験を行ったが、最大辺の長さ最小辺の長さの比は常に 2 以下であった。したがって、

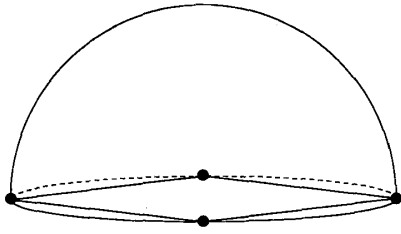


図8 半球面と初期点

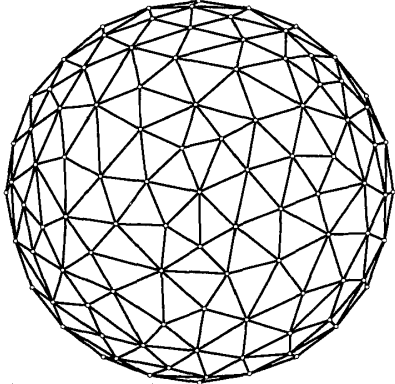


図9 得られた三角形メッシュ ($n=100$)

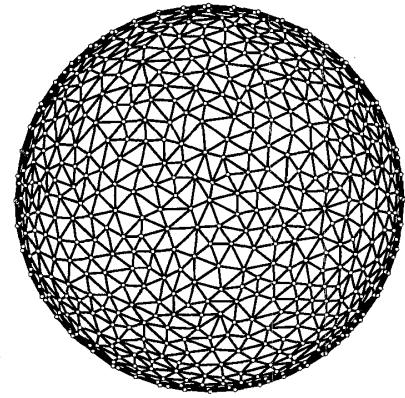


図10 得られた三角形メッシュ ($n=500$)

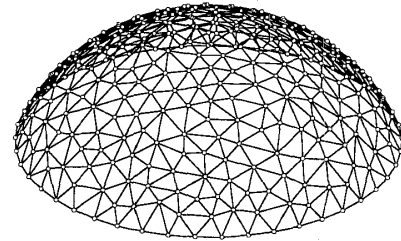


図11 半球面より小さい部分球面における三角形メッシュ ($n=300$)

上記の理論的評価はさらに改善できるものと考えている。計算実験からすると、提案手法は実用的観点からも優れた方法と言える。

ここで考察した問題は点の数が固定されていたが、三角形トラスの部材配置への応用を考えると、節点の数が固定されていると考えるのは不自然である。むしろ部材長の下限值が与えられている場合を考察する方が自然である。この場合次の結果が得られている。

定理2: 部材長の下限を d とし、 $d < d(V, V)/2$ を満たすものとする。いま、アルゴリズムの Step 5 で、境界上に点間距離が $d \sim \beta d$ となるように配置可能とする。すると、アルゴリズムによって得られる最大辺と最小辺の長さの比は $\max\{2, \beta\}$ で抑えられる。

以下、実験結果を示す。図8に示すような境界に等間隔に4つの初期点が与えられた半球面を考える。 $n=50, 100, 200, 300, 400, 500$ の場合に逐次ポロノイアルゴリズムを適用すると、いずれの場合も辺長比は1.9~2.0の間に収まった。 $n=100, 500$ の場合に得られた解を図9, 10に示す。半球面よりも小さい部分球面に対する実験も行い、同様の成果を得ている(図11参照)。また、応用を考えると、対称性を有する三角形メッシュ生成についても考えておく必要がある。いま、一つの対称面が与えられているものとする(図12参照)。この面について面対称な三角形メッシュを作るには、配置する点集合が対称性を持たなくては

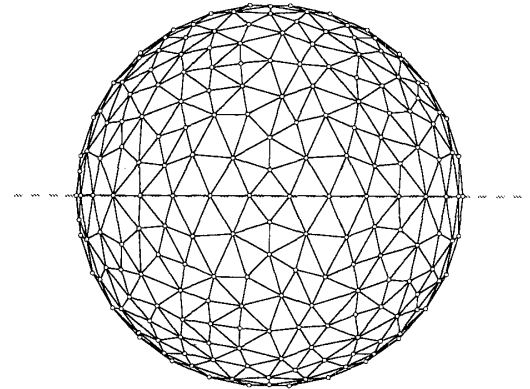


図12 対称性を有する三角形メッシュ ($n=200$)

けないことがすぐに分かるが、実はこれだけでは十分でない。このため、対称面と球面が交わる部分にあらかじめ一定の間隔で点を配置する必要がある。最終的に実現される三角形メッシュの最小辺の長さを d^* とすると点間距離が $2d^*$ 以下となるように配置すれば十分であることも分かっている。

4. おわりに

立体トラスの力学的性能を考慮したトポロジー最適化問題の概要と困難点を紹介し、意匠的条件を考慮した部材配置最適化のための三角形分割法を概説した。本稿では、大域最適解を求めることを前提とした記述

を行ったが、実際の設計では準最適解が得られれば十分であるから、本稿で紹介した解を修正することにより、実用的な設計が得られるものと期待される。

最後に、本稿がこの分野の新たな研究につながれば幸いである。

参考文献

- [1] Z. S. Makowski, *Steel Space Structures*, Michael Joseph, 1965
- [2] 空間骨組構造：形態・性能・生産，日本建築学会シェル・空間構造運営委員会空間骨組構造小委員会，1995
- [3] 構造形態の解析と創生，日本建築学会応用力学運営委員会構造形態の解析と創生小委員会編，丸善，1998
- [4] 構造形態創生の理論と応用，日本建築学会応用力学運営委員会構造形態解析との応用小委員会編，丸善，2001
- [5] G. I. N. Rozvany (Ed.), *Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, Springer, 1992
- [6] 山川宏，最適化デザイン，培風館，1993
- [7] W. Dobbs and L. P. Felton, Optimization of truss geometry, *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 9(10), pp. 2105-2119, 1969
- [8] A. P. Seyranian, E. Lund and N. Olhoff, Multiple eigenvalues in structural optimization problem, *Structural Optimization*, Vol. 8, pp. 207-227, 1994
- [9] G. Sved and Z. Ginos, Structural optimization under multiple loading, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 803-805, 1968
- [10] U. Kirsch, Optimal topologies of truss structures, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 42, pp. 223-239, 1989
- [11] T. Nakamura and M. Ohsaki, A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 94(1), pp. 113-129, 1992
- [12] M. Ohsaki, K. Fujisawa, N. Katoh and Y. Kanno, Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 80, pp. 203-217, 1999
- [13] U. T. Ringertz, A branch and bound algorithm for topology optimization of truss structures, *Eng. Opt.*, Vol. 10, pp. 111-124, 1986
- [14] G. I. N. Rozvany, Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints, *Structural Optimization*, Vol. 11, pp. 213-217, 1996
- [15] F. Aurenhammer, N. Katoh, H. Kojima, M. Ohsaki and Y. Xu, Approximating Uniform Triangular Meshes in Polygons, *Proc. of 6th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON 2000)*, LNCS 1858, Springer Verlag, pp. 23-33, 2000
- [16] N. Katoh et al., Approximating Uniform Triangular Meshes for Spheres, *Proc. of Japan Conference on Discrete and Computational Geometry*, to appear in LNCS, Springer-Verlag, 2001
- [17] 小島寛倫，建築構造物の曲面形状を対象とする三角形メッシュ生成の近似アルゴリズムに関する研究，京都大学大学院工学研究科建築学専攻平成12年度修士論文
- [18] H. Nooshin, K. Ishikawa, P. L. Disney and J. W. Butterworth, The traviation process, *J. Int. Assoc. for Shell and Spatial Structures*, Vol. 38, pp. 165-175, 1997
- [19] M. Bern and D. Eppstein, Mesh generation and optimal triangulation, in D.-Z. Du (ed.), *Computing in Euclidean Geometry*, World Scientific Publishing, pp. 47-123, 1992
- [20] P. Chew, Guaranteed-Quality Mesh Generation for Curved Surfaces, *Proceedings of the 9th Ann. ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 274-280, 1993