離散的最適化手法を適用した耐震壁の配置計画

高田　豊文，小浜　芳朗

1.　はじめに

建築構造物の多くは，鉛直方向の力を支える柱と，地震や風などの水平力を支える梁からなるラーメン構造である．また，過去の震害の教訓から，ブレース（筋かい）や耐震壁といった主に水平力を負担する構造要素を，ラーメン構造に付加することも多い．このような水平力抵抗要素は建物の耐震安全性に大きく寄与しているが，建物内にアンバランスに配置された場合，逆に大きな被害を引き起こすこともある．例えば，耐震壁が平面的に偏って配置された建物に風や地震力などの水平力が作用すると，重心位置と剛性中心（剛心）の位置との不一致が原因となり，ねじり応力が発生して並進変位に捩れ変位が付加され，局所的に過大な変位応答が生じる．そのため，耐震壁などを付加した建物の構造設計にあたっては，特に耐震要素の配置計画を慎重に行わなければならない．一方，経済的側面から壁量をできるだけ少なくすることも望まれる．

このように耐震壁の配置計画は，多数の離散的な候補位置に適切な枚数の壁を配置して，架構の空間的な強度・剛性分布を適正化するという複雑な問題であり，数理的には離散的最適化問題（組合せ最適化問題）に分類される．この種の問題は，設計対象の規模が大きくなると可能な組合せ数が指数関数的に増加するため，合理的な設計解を得るには設計者の経験や思考だけでなく，計算機の支援も不可欠となる．

離散変数を導入した最適構造設計の最も初期の論文は，Toakley[1]やReinschmidt[2]の研究であろう．これらの研究では，ある離散化された規格材群から，適切な部材断面を選択するという設計問題が扱われている．1990年代以前の構造設計問題は，連続変数からなる連続的最適化問題を中心に研究され，各種最適化手法の応用が試みられてきた．一方，離散変数をもつ構造設計問題を扱った研究は非常に少ない．

しかし1980年代の終わり頃，遺伝的アルゴリズム（Genetic Algorithm；GA）に代表される確率的な振舞を許すヒューリスティックス（以下，確率的探索手法）の離散的最適化問題に対する有効性が報告されて以来，離散的最適化問題を対象とした研究は急増する．GAは，非常に単純な計算の繰り返しで解探索を行うといった利便性が，わずか10年余りの間にGAを適用した研究が非常に膨大に行われている一因であると考えられる．その反面，GAの問題点もいくつか指摘されている．例えば，等式制約条件など非常に厳しい条件が設定されている場合，この条件を満たす解が生成されないことがしばしば起こる．また，確率的探索手法の性質上，真の最適解が必ず得られるという保証はないという問題点もある．

さて，1990年代以前に行われていた離散変数をもつ構造設計問題は，そのほとんどが部材選定問題を対象としている．耐震要素の配置を決定する部材配置問題を扱ったものは，制振装置の最適配置問題に分枝限定法を適用したPadulaら[3]の研究や，鉄骨ブレースの配置問題を扱った内村[4]の研究などごくわずかである．しかし，近年，形状最適化やトポロジー最適化の理論が発達し，これらを部材配置問題に応用する研究も増えてきた[5]．

建築構造物を対象とした構造最適化手法の研究も数多く行われている[例えば，6，7]．筆者らはこれまで，計算機の機能と最適化技術を活用して，耐震壁の3次元的配置設計解を組織的に求める方法について研究を行っており[8～10]，本稿では，離散型最適化手法の1つである分枝限定法を適用した最適壁配置手法について述べる．

2.　耐震壁の最適配置問題の定式化

多層RC架構に対して，耐震壁を平面および高さ方向に適切に配置して，建設コストに関与する壁量を最小化する問題を考える．図1に示すように，柱・梁は

たかだ　とよふみ，こはま　よしろう
三重大学　工学部建築学科
〒514-8507 三重県津市上浜町1515

既に配され，また建築計画的要求から階段室まわりの強制配置壁，壁配置不可位置などが設定されているものとする．さらに，設計建物は全層等階高，同一平面形状とし，各層重量も同一と仮定する．全層等階高の仮定の下では，壁量の最小化は壁断面積の総和の最小化と等価であるので，M 層建物に対する最適壁配置問題は次式のように定式化される．

$$\left.\begin{array}{l} A_w=\sum_{i=1}^{M} A_i(\mathbb{L}_i) \rightarrow \min \\ \text{subject to} \quad g_k(\mathbb{L}_1, \cdots, \mathbb{L}_M) \leq 0 \,;\; k=1,2,\cdots \end{array}\right\} \tag{1}$$

ここに，$\mathbb{L}_i$ は第 i 層の壁配置ベクトル，$A_i(\mathbb{L})$ は壁配置 $\mathbb{L}$ の壁断面積，$g_k(\cdot)$ は k-制約条件関数を表す．決定変数は各層の壁配置 $\mathbb{L}_i$ であり，各層で耐震壁を配置できる位置が N カ所あるとすると次式で表される．

$$\mathbb{L}_i=\{L_{i1}, \cdots, L_{iN}\}, \quad L_{ij} \in \{1,0\}\,;\; j=1, \cdots, N \tag{2}$$

ここに，$L_{ij}\,(j=1, \cdots, N)$ は，候補位置 j に耐震壁を配置するときには1，配置しないときには0をとる2値変数である．

一般に制約条件式は全層の壁配置に関する関数となるが，下層の平面配置から逐次配置を決定していくとすると，これらは全て各層ごとに要請される条件として表現できる．したがって，式(1)は次の2種類の問題に分解して定式化できる．

$$\left.\begin{array}{l} P_0:\ A_w=\sum_{i=1}^{M} A_i(\mathbb{L}_i) \rightarrow \min \\ \text{subject to} \quad \mathbb{L}_i \in \bigcup_{N_w=1}^{N} \{\mathbb{L}^*_{N_w,i}\}\,;\; i=1, \cdots, M \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_iQ_{N_w,0}:\ \text{find} \quad \mathbb{L}^*_i \\ \text{subject to} \quad g_k(\mathbb{L}^*_i) \leq 0 \,;\; k=1,2,\cdots \\ \qquad\qquad \sum_{j=1}^{N} L_{ij}=N_w \end{array}\right\} \tag{4}$$

問題 ${}_iQ_{N_w,0}$ は第 i 層の N_w 枚平面壁配置を探索する平面配置問題であり，決定変数は $L_{i1}, \cdots, L_{iN}$ である．1～N 枚の平面配置問題を解いて得られる平面配置集合の和集合 $\bigcup\{\mathbb{L}^*_{N_w,i}\}$ が全層最適化問題 P_0 における設計変数 $\mathbb{L}_1, \cdots, \mathbb{L}_M$ の許容領域となる．式(3)，(4)はいずれも設計変数が離散的であり，離散的最適化問題となる．

各層で要請される制約条件は以下の通りである．なお，$\mathbb{L}_i$ の関数で表される力学値は第 i 層の壁配置に依存していることを意味している．

強度制約条件

大地震時の人命を確保するために，各層の強度（保有水平耐力）は，設計用の地震時水平力よりも大きくする必要がある．

$${}_iQ_{uw}(\mathbb{L}_i)+\alpha \cdot {}_iQ_{uc} \geq {}_iQ_{un} \tag{5}$$

ここに，${}_iQ_{uw}$ は耐震壁およびせん断破壊する柱（まとめて脆性部材と呼ぶ）の終局強度の和，${}_iQ_{uc}$ は曲げ破壊する柱の終局強度の和，${}_iQ_{un}$ は必要保有水平耐力を表す．α は定数であり，脆性部材破壊時に曲げ柱は終局強度の70%の強度を発揮すると仮定して，通常 $\alpha=0.7$ と設定される．

層間変位制約条件

中小地震時に大きな層間変位が生じると，構造軀体の変形に追従できない仕上げ材は大きな損傷を受け，その結果，外壁の脱落などにより2次災害を引き起こす可能性がある．また，図2(a)に示すように，ある層の壁量（剛性）が他層に比べて極端に小さい場合，地震時にその層に過大な変形が生じる．これらの事態を回避するため，次式の制約条件を設定する．

$$\delta_i(\mathbb{L}_i)=Q_i/K_i(\mathbb{L}_i) \leq \delta_a \tag{6}$$

$$(1-\varepsilon)\bar{\delta}_M \leq \delta_i(\mathbb{L}_i) \leq (1+\varepsilon)\bar{\delta}_M \tag{7}$$

ここに，Q_i は第 i 層の層せん断力，$\delta_i(\ )$ は層間変位，$K_i(\ )$ は層剛性（水平剛性），δ_a は許容層間変位，$\bar{\delta}_M$ は第1～M 層の層間変位の平均値，ε は許容偏差を表す．

偏心率制約条件

耐震壁が偏在する建物では，重心位置と剛性中心（剛心）の位置との不一致に起因して，並進変位に捩

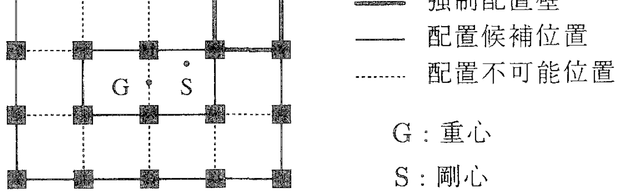


図1　偏心架構平面および壁配置条件

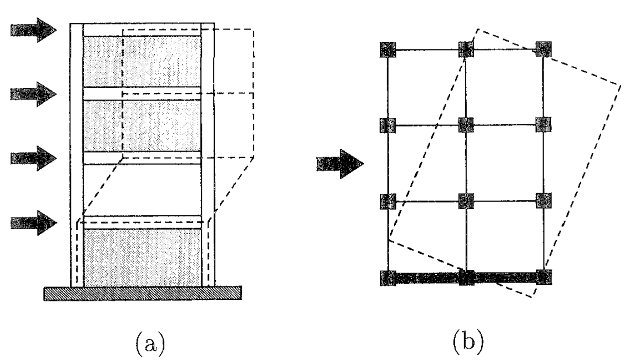


図2　剛性の立面的および平面的アンバランス

れ変位が付加され，局所的に過大な変位応答が生じる(図2(b))．これを防ぐために，次式の偏心率制約条件を設定する．

$$ {}_iR_{ed}(\mathbf{L}_i) \leq R_a \tag{8} $$

ここに，${}_iR_{ed}$は建物の動特性を考慮した偏心率（動的偏心率），R_aは動的偏心率の許容値を表す．なお偏心率は，重心の並進変位に対する捩れ変位の割合（の平方根）に相当する．

基礎浮き上がり制約条件

図3に示すように，水平力によって生じる引抜き力が非常に大きく耐震壁脚部が浮き上がる場合，この耐震壁は期待した剛性を発揮できない．本設計ではこれを回避するため，基礎浮き上がりの制約条件を設ける．

$$ N_{0j}(L_{1j}, \cdots, L_{Mj}) \leq N_{aj}\ ;\ j=1, \cdots, N \tag{9} $$

ここに，N_{0j}は設計用水平力によって生じる杭の引抜き力，N_{aj}は建物自重による基礎面軸圧縮力を表す．

壁配置制約条件

耐震壁は任意の位置に配置できるのではなく，配置位置について建築計画上次のような制約がある．

- 強制配置位置：階段室，エレベータピットのコアなどあらかじめ耐震壁が配置されている位置．
- 配置候補位置：耐震壁の配置候補位置．
- 配置不可能位置：意匠上，防災安全上などの理由により，耐震壁を配置してはならない位置．

また本設計では耐震壁は連層配置を仮定する．言い換えれば，下層に壁が存在しなければそれより上層に壁は配置できないこととする．

上記の制約条件中で，壁配置$\mathbf{L}_i$の関数となっている力学値は，全て耐震壁1枚当たりの強度あるいは剛性から計算される．特に，強度${}_iQ_{uw}(\mathbf{L}_i)$および層剛性$K_i(\mathbf{L}_i)$は単調増加関数，すなわち，壁枚数が増えればそれぞれの力学値も増加するが，偏心率${}_iR_{ed}(\mathbf{L}_i)$はそうではない．このような力学値の特性を踏まえて，分枝限定法を用いた最適壁配置を行う．

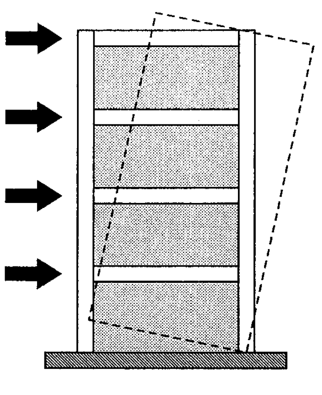


図3　耐震壁脚部の基礎浮き上がり

3．分枝限定法を適用した最適化手法

3.1　分枝限定法

分枝限定法は組合せ最適化問題に対する解法の一つであり，真の最適解を求められること，複数ある最適解も得られることなどの利点がある．その基本的な考え方は，変数の値を固定することによりいくつかの小規模な問題（部分問題）に分解し（分枝操作），それらの全てを解くことにより元の問題の最適解を求めようとするものである．得られた部分問題に対しても逐次分枝操作を行うが，明らかに元の問題の最適解を与えない部分問題に対しては，以降の分枝操作を中止する（限定操作）．分枝限定法を効率的に遂行するには，適切な限定操作を行って生成される部分問題の数を押さえる必要があるが，これには下(上)界値テスト，優越テストが一般に利用される．分枝限定法の詳細は書籍を参考にされたい[例えば，11，12]．

ここでは，平面配置問題および全層最適化問題の両方に分枝限定法を適用し，問題の構造を利用した最適化手法について述べる．

3.2　平面配置問題の解法

分枝限定法は離散的最適化問題の解法であるが，その考え方を応用すれば満足化問題の解の列挙にも用いることができる．

各層の平面配置はx方向とy方向壁配置の組合せで表現できるので，式(4)は次式のように書き換えられる（添字$i, *$は省略）．

$$ \left. \begin{array}{l} Q_{Nw,0}:\text{find}\quad \mathbf{L}_{Nw}=\{\mathbf{L}_x^{\mathrm{T}}, \mathbf{L}_y^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \\ \text{subject to} \\ \quad g_{ak}(\mathbf{L}_a) \leq 0\ ;\ a=x, y,\ k=1, 2, \cdots \\ \quad g_k(\mathbf{L}_{Nw}) \in C_k\ ;\ k=1, 2, \cdots \\ \quad \sum_j L_j = N_w \end{array} \right\} \tag{10} $$

ここに，$\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y$はそれぞれ$x, y$方向壁配置ベクトルを表す．制約条件1段目の式は，各方向の壁配置によって独立に規定される制約条件であり，本最適化問題では偏心率以外の制約条件式に相当する．制約条件2段目の式はx, y方向の壁配置の組合せにより規定される制約条件であり，偏心率制約条件に相当する．

分枝変数の選択基準

平面配置問題$Q_{Nw,0}$に対して，ある変数L_qを1あるいは0に固定することにより分枝操作を行う．この

L_q は分枝変数と呼ばれ，分枝変数の選択基準が解探索の効率に大きく影響する．本手法ではどちらかの方向（例えば x 方向）の変数を優先的に固定する．解の探索手順は次の通りである．

x 方向の変数を先に固定する場合，x 方向壁の変数が全て固定された時点で，x 方向制約条件のテストを行い，条件を満たした x 方向壁配置に対してのみ，引き続き y 方向変数を固定する．y 方向変数も全て固定されれば y 方向制約条件をチェックし，両方向の制約条件を満たした壁配置にはさらに偏心率制約条件を課す．このように，ある方向の制約条件を先に調べることにより，不要な分枝操作を排除できる．

限定操作

平面配置問題は満足化問題であるため，分枝限定法でよく用いられる下界値テストは適用できない．そこで本手法では，強度制約条件，層間変位制約条件および壁枚数指定条件（式(10)の最下条件式）を利用した許容解存否のテストを，限定操作として用いる．強度制約条件を用いて具体的に示すと，次の条件を満たすとき当該部分問題の分枝操作を中止する．

$${}_iQ_{uw,free}+{}_iQ_{uw,fix}+\alpha Q_{uc}<{}_iQ_{un} \tag{11}$$

ここに，${}_iQ_{uw,free}$ は，壁配置が未決定の全ての位置に耐震壁を配置したときの強度和，${}_iQ_{uw,fix}$ は既配置の耐震壁による強度和を表す．この式は，配置が未決定の全ての位置に耐震壁を配置しても，必要保有水平耐力 ${}_iQ_{un}$ を超えないことを意味している．

さらに本手法では，各方向の壁配置が決定した時点で，その上層に許容配置が存在するか否かも調べている．すなわち，当該層の制約条件を満たす平面配置であっても，上層では許容解が存在しなければ，その配置は許容解と見なさないことにより，探索効率を向上させている．この限定操作は，壁配置制約条件および基礎浮き上がり制約条件を考慮すれば，上層での壁配置可能位置が制限できる，すなわち，強度および剛性の上限値が推定できること利用している．

平面配置の満足化過程を表す分枝図を図4に示す．図中の黒丸は，限定操作によって終端された部分問題を表す．

3.3 全層最適化問題の解法

全層最適化問題 P_0 は，第1層の平面配置をある配置に固定することにより，複数の部分問題に分解される．得られた部分問題に対して分枝操作を逐次適用すると，第 $(m-1)$ 層までの壁配置が決定された次式の部分問題 $P_k(k=1,2,\cdots)$ が生成される．

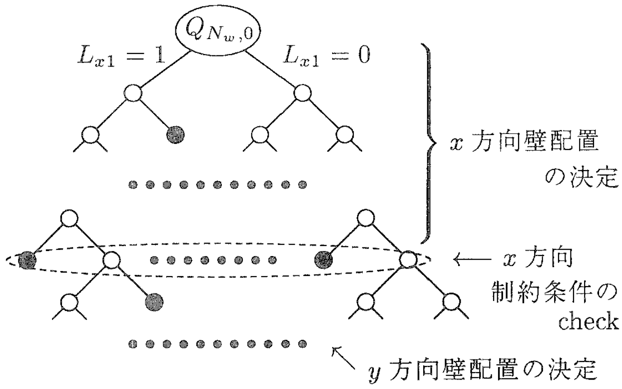


図4　平面配置の満足化過程を表す分枝図

$$\left.\begin{aligned}&P_k:\ A_w=\sum_{i=1}^{m-1}A(\mathbb{L}_i^{(k)})+\sum_{i=m}^{M}A(\mathbb{L}_i)\rightarrow \min.\\&\text{subject to}\quad \mathbb{L}_i\in\bigcup_{N_w=1}^{N}\{L^*_{N_w,i}\};\ i=m,\cdots,M\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

分枝変数の選択基準

全層最適化問題では壁量最小化を目標にしているので，最適解に近い許容解を早期に得られることを期待して，壁量すなわち壁枚数の少ない平面配置から固定していく．

下界値テストの強化

分枝限定法では，探索途中で得られている最小（最大化問題ならば最大）の目的関数値（暫定値）を利用して，限定操作を行う．これを下界値テストと呼ぶ．通常，対象とする問題の規模が大きくなると，下界値テストを適用しても，膨大な計算量のため最適解を求めるのが困難になる．このような場合，実用時間内で目的関数値が最適値に近い準最適解を求める方が現実的である．本手法では，次式のように下界値テストを強化することにより，任意の精度の準最適解を探索する．すなわち，部分問題 P_k において次式が成立するとき，P_k からの分枝操作を中止する．

$$\sum_{i=1}^{m-1}A(\mathbb{L}_i^{(k)})+A_{\mathrm{req},m}>\beta A^* \tag{13}$$

ここに，A^* は暫定値，$A_{\mathrm{req},m}$ は第 m 層以上の層に必要な壁量の和を表す．β は最適値からの許容誤差パラメータを表し，探索開始時に $0<\beta\leq 1$ なる値を設定しておく．

式(13)を用いて得られた探索終了時の暫定値 A^* と，未知の最適値 A_{opt} との間には，次式が成立する．

$$\beta A^*\leq A_{\mathrm{opt}}\leq A^* \tag{14}$$

4.　設計例と探索効率に関する考察

図5に示す平面形状・配置条件で，層数の異なる3

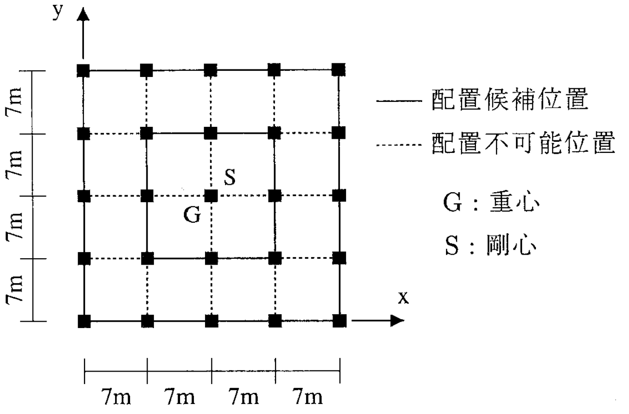


図5　設計例架構平面および壁配置条件

つの設計対象建物に対して耐震壁の最適配置計画を行う．いずれの設計例も階高は3.5 mであり，柱，梁および耐震壁のサイズは表1に示す通りである．制約条件の許容値に関するパラメータはそれぞれ，許容層間変形角1/300，水平剛性分布の許容偏差$\varepsilon=0.4$，許容偏心率$R_a=0.2$に設定する．また，誤差パラメータはいずれの設計でも$\beta=1$とし，真の最適解の探索を行った．全層にわたる設計変数の数はそれぞれ96，144，192個であり，6層，8層設計例の設計変数の数はそれぞれ4層設計例の1.5，2倍となっている．

図6に設計変数の数と生成される部分問題数との関係を示す．同図の縦軸は，4層設計例の最適化過程で生成される部分問題数との比をとっている．また，総列挙法は連層配置条件を考慮したときの理論値を示しており，M層建物で各層の配置候補位置をNとすると次式で計算される．

$$部分問題数=(M+1)^N-1 \tag{15}$$

本手法では，層数の増加によって設計変数の数が増加し，それによって部分問題数はほぼ設計変数の数の指数オーダーで増加している．しかし，総列挙法に比べると増加率は非常に小さい．

各設計例からはそれぞれ複数の最適配置が得られ，そのうちの1つずつを，その最小壁量とともに図7に示す．いずれの壁配置結果でも，大きなねじれ剛性を確保するために外周に耐震壁が配置されているが，特に，上層では隅角部への配置が避けられている．これは，隅角部は柱の負担床面積が小さく，基礎浮き上がりに抵抗する柱軸力が小さいためである．

5．おわりに

本稿では，耐震壁の配置計画という離散的構造設計

表1　各設計対象建物の部材サイズ

4層設計例

層	柱	梁	壁厚
4	60×60	30×60	15
3	65×65	35×60	18
2,1	70×70	35×65	21
基礎	—	40×110	—

6層設計例

層	柱	梁	壁厚
6	70×70	30×65	21
5	80×80	35×70	24
4	85×85	35×70	27
3,2,1	90×90	40×70	30
基礎	—	45×110	—

8層設計例

層	柱	梁	壁厚
8	80×80	30×70	24
7	90×90	30×70	27
6,5,4	95×95	35×75	30
3,2,1	100×100	40×80	33
基礎	—	45×120	—

（柱，梁，壁厚の単位：cm）

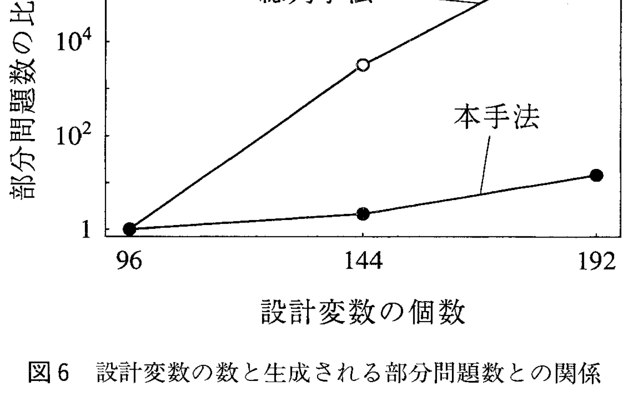
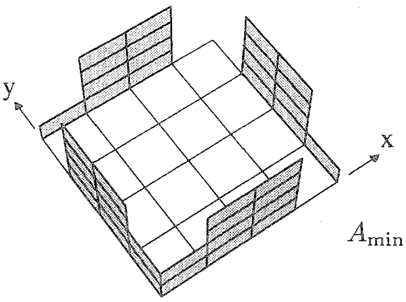
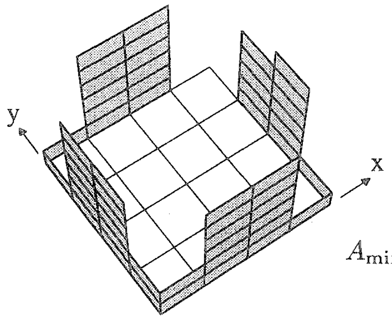


図6　設計変数の数と生成される部分問題数との関係



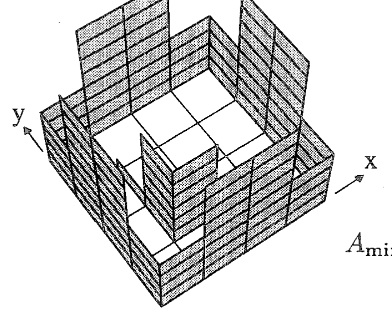
$$A_{\min}/a_0 = 103.68$$
$$a_0 = 0.49(\mathrm{m}^2)$$

(a) 4 層設計例



$$A_{\min}/a_0 = 130.75$$
$$a_0 = 0.81(\mathrm{m}^2)$$

(b) 6 層設計例



$$A_{\min}/a_0 = 237.72$$
$$a_0 = 1.0(\mathrm{m}^2)$$

(c) 8 層設計例

図 7　最適壁配置結果と最小壁量

問題に対して数理計画法（分枝限定法）を適用した最適化手法について述べた．これまで，大規模な問題を古典的な分枝限定法で解く場合，実用時間内では正常な計算終了に至らない可能性があることが指摘されてきたが，最近のコンピュータ性能の向上や，許容誤差パラメータを導入した近似解法の適用などを考慮すると，このような指摘が必ずしも数理計画法を用いた最適構造設計の致命的な欠点にならないと考える．

建築分野の最適化に関する研究は，機械，土木などの分野に比べて遅れているのが現状である．本研究も，現実の設計に適用されているわけではなく，実務設計の手助けとなるようなシステムを開発するのが今後の課題である．OR 学会機関誌に投稿させていただいたよい機会であるので，拙稿をご覧の読者方からのご意見がいただければ幸いである．

参考文献

[1] A. R. Toakley: Optimum design using available sections, J. of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST 5, pp. 1219-1241, (1968)

[2] K. F. Reinschmidt: Discrete structural optimization, J. of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST 1, pp. 133-156, (1971)

[3] S. L. Padula and C. A. Sandridge: Passive/active strut placement by integer programming, Topology Design of Structures, pp. 145-156, (1993)

[4] 内村均，佐藤和英，和田章，黒正清治：水平変形に注目した鉄骨ブレースの配置計画に関する一考察，日本建築学会大会学術講演梗概集，B 1, pp. 403-404, 1997.9

[5] Q. Q. Liang, Y. M. Xie and G. P. Steven: Optimal topology design of bracing systems for multistory steel frames, J. of the Structural Engineering, Vol. 126, No. ST 7, pp. 823-829, (2000)

[6] 中村恒善：建築骨組の最適設計，丸善（1980）

[7] 藤谷義信，ほか 7 名：鉄筋コンクリート建物の最適設計プログラムの開発，日本建築学会技術報告集，5, 63-68 (1997)

[8] 高田豊文，小浜芳朗，宮村篤典：分枝限定法による 3 次元架構の最適壁配置設計，構造工学論文集，39 B, 43-50 (1993)

[9] 小浜芳朗，高田豊文，宮村篤典，太田彰：0-1 計画問題による耐震壁の最適配置設計，構造工学論文集，40 B, 235-242 (1994)

[10] 小浜芳朗，高田豊文，宮村篤典，太田彰：耐震壁の最適配置計画における解探索の効率化，構造工学論文集，41 B, 215-222 (1995)

[11] 茨木俊秀：組合せ最適化―分枝限定法を中心として，講座・数理計画法，8, 産業図書（1983）

[12] 今野浩，鈴木久敏：整数計画法と組合せ最適化，OR ライブラリー，7, 日科技連（1991）