

牧本直樹 著

待ち行列アルゴリズム—行列解析アプローチ

朝倉書店 (189 頁)

待ち行列理論で最初に学ぶモデルといえば $M/M/1$, $GI/M/1$, $M/G/1$ であり, これらモデルに対しては単純で綺麗な結果が得られている. 例えば, $M/M/1$ や $GI/M/1$ では系内容数の定常分布が幾何分布で与えられる. $M/G/1$ では待ち時間の定常分布のラプラス変換がポラチェック・ヒンチンの公式で与えられる, などである. これら結果は具体的な数値計算でも有効となる. 幾何分布であることが分かれば, 後は初項と公比を数値的に求めれば良いし, ラプラス変換が得られれば, それを微分して任意のモーメントが得られる.

これら初等的モデルが綺麗な結果を与える理由として, 到着がポアソン過程であることやサービス時間が指数分布に従うことが挙げられる. しかし, 現実問題への応用を考えた場合, それら時間の分布が指数分布とはいえない場合も多い. また, 通信ネットワークなどでは, 客 (パケット) が互いに相関を持って到着すると考えられている. それでは, 単純で綺麗な結果を持ち, 数値計算も容易でありながら, これら一般的な場合にも適用可能な理論はないのであろうか. この本は, そのような要求に答える一つの理論である行列解析法を平易に解説した本であり, この分野における最近の成果をまとめた最初の和書でもある.

まずはこの本の目次を見て頂きたい.

1. マルコフ連鎖
2. マルコフ型到着過程
3. M/M 型モデル
4. $GI/M/1$ 型待ち行列と行列幾何形式
5. $M/G/1$ 型待ち行列とその解法
6. 準出生死滅過程と待ち行列モデル
7. ブロック構造を持つマルコフ連鎖と待ち行列モデル

この目次から分かるように, 本書の内容は初等的な待ち行列理論の本と同じ展開をたどる. 各章も前半で初等的なモデルの結果を, 後半で一般化された結果を示す形になっている. そのため, 待ち行列理論の初歩を学んだ人であれば, その知識を確認しながらさらに

その先の結果へと容易にたどり着ける構成となっている. また, 数値計算の工夫も随所に示されている.

一般化への鍵は第2章で示される. そのひとつは, 指数分布の代わりに, 「マルコフ連鎖が特定の状態に吸収されるまでの時間の分布 (相型分布)」を用いることである. マルコフ連鎖なので今この状態 (相と言う) があるかが分かれば吸収までの時間の分布が分かる. よって, 相を状態に取り込めば待ち行列の挙動をマルコフ連鎖として表現できるのである. もうひとつの鍵は, ポアソン過程の代わりに, 「マルコフ連鎖の状態推移に合わせて到着が起きる到着過程 (マルコフ型到着過程)」を用いることである. これにより, 相関のある到着も表現可能となる.

モデルの解析は第3章から第7章で展開される. $GI/M/1$ 型は $GI/M/1$ のサービスを相型分布に, $M/G/1$ 型は $M/G/1$ の到着をマルコフ型到着過程に, 準出生死滅過程は $M/M/1$ の到着間隔とサービスを共に相型分布にしたものと想像して欲しい (実際にはもっと一般化されたモデルのクラス). 例えば, $GI/PH/1$ (PH は相型分布のこと) の隠れマルコフ連鎖の推移確率行列は, $GI/M/1$ の推移確率行列の各要素を行列 (matrix) に置き換えた形となっている. このスカラーが行列に置き換わるという点が行列解析の特徴であり, それは解析結果にも反映される. 例えば, $GI/M/1$ 型待ち行列の系内容数の定常分布は, $GI/M/1$ の定常分布 (幾何分布) の公比 (スカラー) を公比行列に置き換えたもの (行列幾何形式) になる. また, 第5章ではポラチェック・ヒンチンの公式の行列解析版も示される. この考えをさらに押し進めたのが最終章で, 行列を要素を持つ推移確率行列についての数値計算法がテーマである.

このように, 行列解析法は初等的な待ち行列モデルでの結果を統一的に拡張するものであるが, 本書の出現で気軽に学べる分野のひとつとなった.

(小沢 利久)