不動産ファイナンスにおけるオプション：理論と実証

森平 爽一郎

1. はじめに

不動産ファイナンスとは，不動産を対象にする資産運用をさす．日本におけるこれまでのファイナンス理論とその応用としての金融工学の研究対象は，株式，債券，為替などの金融商品に対する研究が主であり，商品（Commodity）や保険はもちろん，その他の実物資産の運用に関する研究はまだ始まったばかりである．これに対し，欧米，とりわけアメリカでにおいて，不動産に関する研究は，工学（都市工学），経済（住宅や都市経済学），ビジネススクール（不動産学）などの学際領域にわたる研究が長年にわたって行われてきた．たとえば，不動産に関する学術的な専門誌にかぎっても，20あまりのものが刊行されているほどである．

わが国では，21世紀をむかえ，二つの重要な革新が不動産市場で生じた．第1は住宅金融公庫の住宅ローンの新規貸出し分の証券化が定期的に行われるようになったことであり，第2は，不動産を原資産とする投資信託，日本型の不動産投資信託（J-REITs）が東京証券取引所で売買可能になったことである．こうした動きは，他の不動産市場における革新とともに，従来，金融市場とは別個に成り立っていた日本の不動産市場が，金融市場とリンクし，互いの影響のもとで，不動産価格と証券価格が決定されるようになったことを意味する．

不動産ファイナンスで検討されるべき問題は多くのものがある．本稿では，不動産の賃貸あるいは売買にあたって，さまざまなオプション契約条項が付随していることに注目する．その上で，不動産の評価を行う場合，そうしたオプション契約の価値を正しく計算することが必要であるが，金融資産を対象として開発されたオプション理論を直ちに適用することは適切でない．なぜそうなのか，またどのようにしたら不動産を対象にする適切なオプション理論を組み立てることができるのかを検討し，その一例をしめす．

もりだいら　そういちろう
慶應義塾大学 総合政策学部
〒252 藤沢市遠藤 5322

2. 不動産とオプション契約

2.1 不動産市場とその証券化市場

不動産投資には金融市場と同様，現物（不動産そのもの）に対する投資とその証券化商品に対する投資の二つのタイプのものがある．たとえば，多くの人は金融機関から住宅ローンを借り，不動産を購入する．金融機関は，通常，ローンの対象物件を抵当にとり，その裏づけのもとに資金の貸出しを行う．

金融機関は，この不動産抵当貸出（モーゲージ：Mortgage）において，さまざまのリスクを負う．以下に議論するように，とくに，住宅ローンの貸し倒れ（不動産デフォルトリスク）とローンの満期前の返済（期限前償還リスク）の二つが重要である．これらのリスクを避けるため，あるいは，資金調達の手段として，金融機関は住宅ローンの証券化を行う．つまり，最長30年にものぼる住宅ローンからの金利や元本返済を，投資家に配当や金利支払いという形で還元することを約束する証券を発行する．これがモーゲージ・バック・セキュリティー（MBS）と呼ばれているものである．

たとえば，住宅金融公庫が今後発行する証券化商品はパススルー型証券化商品と呼ばれ，貸し倒れリスクを金融公庫が引き受けるのに対し，期前償還リスクを投資家が引き受ける形をとる．不動産の証券化は近年複雑さの度合いを増し，異なる信用リスクの度合いに応じてきりわけを行い再度証券化するもの，証券化商品を投資信託にするもの，証券化商品に対する先物やオプション取引など，さまざまな証券デザインがなされている．

2.2 不動産契約におけるオプション

不動産の取得あるいはその賃貸においては，さまざまなオプション（選択権）契約が内在している．オプ

ションは，不動産という，まさに「動かない資産」にたいして，柔軟性を付与する目的で与えられることが多い．不動産にかかわる主なオプション契約としては，以下のようなものがあげられる[1]．

1．デフォルト（倒産）

2．期前償還権

3．リース契約

4．定期借地権

5．買戻し契約

6．不動産開発プロジェクト（リアルオプション）

本稿では最初の二つの問題を特に取り上げることにする．

3．倒産する権利：倒産オプション

不動産を取得するにあたって必要な資金を借入れによってまかなった居住者や投資家は，「倒産する権利」を保有していると考えることができる．

これまでのアメリカの多くの不動産ファイナンスにおける信用リスク研究では，実証・理論を問わずこうした立場を取っている．これはわれわれの感覚からすると一見奇妙に思えるかもしれないが，まさに日本の金融機関が抱える不良債権問題は，この点を具現したものと言える．その意味は次のように説明できよう．

不動産を取得するための資金の借り手は，利子の支払いと原本の返済を行い，負債を減らしていく．他方，貸し手である金融機関は，融資の対象になる不動産を担保にとって，資金を貸しつけている．しかし，担保物件である不動産の価値は不確実な変動をしめす．

借り手は，不動産価値が融資の返済義務を下回ると，価値の下落した不動産を貸し手である金融機関に「押し付け（Put)」，その代わりそれ以降の利子の支払いと元本の支払いを免れようとすることが「合理的」である．これは，借り手がプット・オプションを保有していることを意味する．つまり，金融機関は借り手に，そのように意識しているかどうかは別として倒産オプションを売却している．借り手は金融機関からオプションを購入している．

この点を図で示すと，図1のようになろう．

より正確に言うと，借り手はその時々の返済義務である負債の現在価値を行使価格として，不動産を原証券とするプット・オプションを金融機関から購入している．このオプションの契約（行使）期間は，不動産を担保とする貸付け期間に相当する．

ここで重要なことは，不動産を担保にとって資金を貸しつけた金融機関は，無償でこの倒産する権利を貸し手に与えているわけではないことである．信用スプレッドを，信用リスクがまったくない借手に対する金利に上乗せする必要がある．そのために必要になるのが，この倒産オプションの価値を判定するためのオプション価格決定モデルである．

このように考えると，倒産オプション価値 P_0 の算定のために，有名なブラック＝ショールズモデルの利用を考えることができよう．ブラック＝ショールズのプット・オプション・モデルを以上のような枠組みで書き表すと次のようになる．

$$P_0 = Ke^{-r_f T}N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{3.1}$$

ここで，

$$d_1 \equiv \frac{\ln(S_0/Ke^{-r_f T}) + (r_f + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.2}$$

$$d_2 \equiv d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.3}$$

ここで，S_0＝現時点の不動産価格，K＝現時点の負債残高，r_f＝無リスク金利，T＝残存借入れ期間，σ＝抵当不動産の収益率の標準偏差，つまりボラタリティーである．この五つの変数の値を，上記ブラック＝ショールズ式に代入することにより，容易に，不動産担保貸付けの信用リスクをしめすプット・オプション価値を算定することができるように思われるかもしれない．しかし，原証券が金融資産である金融オプション，たとえば，日経平均オプションと違い，問題はそう簡単ではない．以下にその理由をのべ，その対処策をあわせて議論することにしよう．

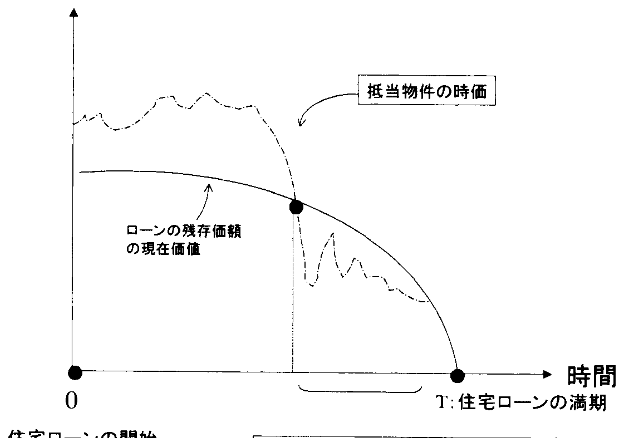

図1　倒産オプションの考え方

[1] 不動産ファイナンスにおけるオプション契約についての展望論文としては，たとえば，Shilling, Sirmans, and Benjamin[8]を参照

3.1 長期契約と金利やボラタリティーの不確実性

不動産貸付けは長期にわたる．商業用不動産では少なくとも5年，居住用不動産では30年にわたる貸付けが普通である．そうすると，ブラック＝ショールズモデルのように，無リスク金利(r_f)やボラタリティー(σ)は時間とともに一定であるとするのはあまりにも強い仮定といわなければならない．しかし，それらが時間とともに確率的に変化すると考えると，モデルはきわめて複雑になる．

3.2 不動産市場の流動性

不動産は個別性の高い資産である．2 LDKの物件と言ってもそれがどのような場所にあるのか，マンションなのか一戸建てなのか，土地付きなのか借地権なのか，あるいはまた貸し家なのか持ち家なのか，築何年なのか，などさまざまな条件にによってその価値が異なる．標準化が困難であることは，個々の物件の売買が活発でないこと，いわゆる市場性，流動性の欠如を意味する．

このことはブラック＝ショールズ・モデルを導出する際の均衡条件：無リスクヘッジ・ポートフォリオを連続的に形成できるための条件が整っていないことを意味する．つまり，原証券たる不動産と不動産抵当ローンのどちらかをΔ単位売却し，他方を1単位購入するようなポジションを連続的に実現することにより，不動産と不動産抵当ローンからなるポートフォリオが無リスクであるようにする，ことはほとんど不可能である．

不動産担保貸付けの倒産オプション価値を測定する場は，離散的な価格変動を前提にするようなオプションモデルが必要になるであろう．この場合重要になるのが，後に示すような「プラシイング・カーネル」によるオプション価格決定である．プライシング・カーネルアプローチを用いると，原資産である不動産の価格とそのデリバティブズである倒産オプション価格を整合性を持って，同時に決定できるとともに，どのようにして投資家のリスク選好，時間選好率がオプション価格に影響を与えているかがわかる．

3.3 期前行使の可能性：アメリカン・オプション？

倒産はいつでも可能である．借入れの最終時点のみでこのオプションは行使可能であるわけではない．したがってデフォルトオプションは，満期前の行使がいつでも可能なアメリカン・プット・オプションと考える必要がある．借り手は，現在と将来の担保不動産価値がどう推移するかを考慮にいれて，現在倒産すべきかどうかを考える．

他方，アメリカン・プット・オプション価値を解析的に求めることは不可能であることが知られている．したがって，その解を解析的近似あるいは数値解法によって求めるほかない．不動産ファイナンスでは，したがって，計算ファイナンスの成果がもっともよく応用される分野となっている．

3.4 不動産価値は対数正規するか？

ブラック＝ショールズ・モデルでは，原証券である資産価格は対数正規分布に従うと考えた．これは，原資産価格が負にならないと言う点と分布の非対称性を考慮している点で妥当な選択と言える．

これに対し，土地や家屋などの価格は，すそ野が広い分布あるいは価格のジャンプがあるような分布に従う可能性がある．特定の不動産の価値は，それを取り巻く環境，たとえば近くに新しいビルの新築がなされたこと，公害の発生や自然環境の激変，道路や鉄道などの生活インフラの整備や悪化などといった「イベント」による影響をこうむることが多い．そのためこうしたイベントが突然起こると，当該不動産の価値は突然の変化をしめす．こうした場合，価格変動性そのものが確率的に変化するようなモデル，ジャンプ過程を許容するようなモデルが必要であるかもしれない．

3.5 Ruthless Default？

金融資産を原資産とするヨーロピアン型のプット・オプションであれば，インザマネーの状態，つまり，満期における原資産価格が行使価格以下にあれば，即行使することが望ましい．しかし，アメリカンオプションである倒産オプションの場合はそうでない．また，こうした経済的理由ばかりでなく，担保資産が残存貸出額を下回っても借り手はプットを行使するとは限らない．倒産処理の法的事務的コスト，倒産したことによる借手の社会的な地位の失墜などは，「Ruthlee（厳格な）倒産オプション」の執行をためらわせるであろう．他方，アメリカの一部の州や日本のように倒産が合法あるいは非合法に元利金払い停止後も居住することができることなどは，逆に倒産を早める効果がある．こうした理由は日米で異なるかもしれない．どのようにこうした要因を組み入れて，不動産を原証券とする倒産（プット）オプションモデルを作るかが重要である[2]．

[2]「Ruthlee（厳格な）倒産オプション」にかかわる問題については，Vandell[9]が詳しい．

3.6 行使価格の変化とその不確実性

ブラック＝ショールズモデルでは，行使価格(K)は一定であるとみなした．しかし，倒産オプションモデルでは，行使価格は負債残高，つまり負債の現在価値にあたる．たとえば住宅ローンであれば，通常は毎月一定額の利子と元本の返済が行われる．それにより，負債残高は減少していく．住宅金融公庫からの借入れでは，「ゆとり返済」と呼ばれる制度があり，初期の返済額を少なくおさえ，10年後からの返済額が多くなるように，住宅ローンの仕組みが設定されている．つまり負債残高である行使価格は，確定的ではあるが，変化する．

他方，もし金利が不確実である場合はどうなるであろうか？ 固定金利借入であっても返すべき負債残高の現在価値は金利変動の影響を受ける．もし変動金利貸付けであれば，毎期の負債残高は確率的に変動する．金利が不確実であれば，不確実な不動産価格との相関も考えなければならないであろう．相関を持つ二つの資産を状態変数とするアメリカンオプションの評価は数値計算によっても難しい問題がある．

いずれにせよ，行使価格(K)一定という仮定は，不動産を対象とする倒産（プット）オプションでは適切でない

4. 新しい不動産価格決定モデル

上で指摘した問題のうちで，ヨーロピアン・オプションの仮定を保持したまま，離散モデル＋ジャンプを許容したガンマ分布としたときのモデルを，あたらしい資産価格決定モデルである「プライシング・カーネル・アプローチ」を用いることによって解決できる．その例をしめそう．

4.1 投資家の意思決定問題とプライシング・カーネル

プライシング・カーネル・アプローチを用いると，投資家の1期間最適化問題を考え，そこから，どのような資本資産であっても，その均衡価格を導くことができる．投資家は，現在 $t=0$ と将来 $t=1$ にそれぞれ確定的な所得 Y_0 と Y_1 を得ることができるとしよう．この所得から，現在 S_0 円する金融資産を n_0 株だけ購入($n_0>0$)あるいは空売り($n_0<0$)するものとしよう．この資産からの1期間後のキャシュフローは不確実であり，それを x_1 で表すものとする．投資家は，1期間後に n_1 株だけの反対売買を行うことにより，投資ポジションを解消する．投資家の目標は，現在と将来にわたる消費からの期待効用を最大にすることにあると仮定すると，投資家の意思決定問題は次のように定式化できる．

$$Max \Rightarrow E_0^{P}[u(C_0, \tilde{C}1)] = E_0^{P}[u(C_0) + \beta u(\tilde{C}_1)]$$

$$Subject\_to: \tilde{C}_1 = Y_1 + \tilde{x}_1 n_1$$

$$C_0 = Y_0 - P_0 n_0$$

制約条件を目的関数に代入し，決定変数である(n_0, n_1)で偏微分し，その結果を資産価格(S_0)について解くと，

$$S_0 = E_0^{P}[\tilde{M}_1 \cdot \tilde{x}_1]$$

が得られる．ここで，$E_0^{P}[\cdot]$ は実確率（リスク中立確率でなく）の下で期待値を計算することを意味する．さらに，

$$\tilde{M}_1 \equiv \frac{\beta \cdot u'(\tilde{C}_1)}{u'(C_0)}$$

はプライシング・カーネル（確率的割引ファクター）と呼ばれ，将来キャシュフローを価格に変換する重要な役割を果たしている．Heston[3]は，効用関数 $u(\cdot)$ がベキ（Power）型効用関数をしている場合，プライシング・カーネルが次のような形を取ることを明らかにした．

$$M(\tilde{x}_1) = \beta \tilde{x}_1^{-\alpha}$$

ここで α は投資家のリスク回避度をあらわすパラメータである．また，β は投資家が抱く異なる時点の消費の相対的な重要性をしめす時間選好パラメータである．

さらに，資産の将来キャシュフローが，元になる確率変数 $\tilde{z}$ によって，

$$\tilde{x}_1 = e^{\mu + \sigma \tilde{z}_1} \tag{4.1}$$

と定式化できると仮定しよう．ここで，μ は分布の位置パラメータを表し，σ は，ボラタリティー・パラメータを表す．指数関数による変換を行ったのは，非線形ならびに結果が負にならないようにするためである．

そうすると，このとき，原証券たる不動産あるいは土地の均衡価格は，

$$\begin{aligned} S_0 &= E_0^{P}[M(\tilde{x}_1) \cdot \tilde{x}_1] \\ &= E_0^{P}[\beta \tilde{x}_1^{-\alpha} \cdot \tilde{x}_1] = E_0^{P}[\beta \tilde{x}_1^{1-\alpha}] \\ &= E_0^{P}[\beta (e^{\mu + \sigma \tilde{z}_1})^{1-\alpha}] = E_0^{P}[\beta (e^{\mu(1-\alpha) + \sigma(1-\alpha)\tilde{z}_1})] \\ &= \beta e^{\mu(1-\alpha)} E_0^{P}[e^{\sigma(1-\alpha)\tilde{z}_1})] \end{aligned}$$

と計算できる．ここで，資産の将来キャシュフローが一般化ガンマ分布していると仮定しよう[3]．つまり，

[3] 一般化ガンマ分布に関しては，Johnson, Kotz, and Balakrishnan[4]を参照のこと

$$f(\tilde{z}_1, \delta)=\frac{z_1^{\delta-1}e^{-\tilde{z}_1}}{\Gamma(\delta)}$$

をガンマ分布する確率変数の密度関数としたときに，式(4.1)のような変換を行ったとき確率変数 $\tilde{x}_1$ は一般化ガンマ分布に従う．

ガンマ分布する確率変数は，非負の値を取ると共に，自由度が小さいときは，右に大きくひずみ，自由度が高くなるにつれて，正規分布に近づくと言う性質を持つ．また，ガンマ分布する確率変数は，ジャンプすることを許容する．その意味で，金融資産価格に関して良く仮定される対数正規分布よりも，土地や建物の価格系列の特性をより良く表していると言えよう．

ガンマ分布を仮定すると，ガンマ分布の積率母関数から，原証券たる土地あるいは不動産価格は，

$$\begin{aligned} S_0 &= \beta e^{\mu(1-\alpha)}E_0^{\mathrm{P}}[(e^{\sigma(1-\alpha)\tilde{z}_1})] \\ &= \beta e^{\mu(1-\alpha)}[1-(1-\alpha)\sigma]^{-\alpha} \qquad (4.2) \end{aligned}$$

のように表される．さらに，1期間後に1円を支払う割引債価格も現物不動産価格と同様にして，次のように示すことができる．

$$\begin{aligned} B_0 &= E_0^{\mathrm{P}}[M(\tilde{x}_1)\cdot 1] \\ &= \beta e^{-\mu\alpha}(1+\sigma\alpha)^{-\delta}=\frac{1}{R_F} \end{aligned}$$

他方，行使価格 K，行使期間1期間のプット・オプションの均衡価格は，次のようにして計算される．

$$\begin{aligned} P_0 &= E_0^{\mathrm{P}}[M(\tilde{S}_1)\cdot C(\tilde{S}_1)] \\ &= E_0^{\mathrm{P}}[\beta\tilde{S}_1^{-\alpha}\cdot Max[K-\tilde{S}_1, 0]] \\ &= K\cdot\beta e^{-\nu\alpha}(1+\sigma\alpha)^{-\delta}(G(d_2|\delta)) \\ &\quad -\beta e^{\mu(1-\alpha)}[(1-\alpha)\sigma]^{-\alpha}(1-G(d_1|\delta)) \end{aligned}$$

ただし，

$$G(y|\delta)=\int_0^y\frac{z_1^{\delta-1}e^{-\tilde{z}_1}}{\Gamma(\delta)}dz$$

$$d_1=(\ln K-\mu)(\sigma^{-1}+\alpha-1) \qquad (4.3)$$

$$d_2=d_1+(\ln K-\mu) \qquad (4.4)$$

ここで，G はガンマ分布の累積密度関数を表している．

さらに，上でもとめた原証券である土地あるいは不動産と1期間割引債にかんする均衡価格式を用いると，不動産産を原資産とするときにデフォルトをする権利の価値：プット・オプション価格は，次のようにあらわされる．

$$P_0=K\cdot B_0(G[d_2|\delta])-S_0(G[d_1|\delta]) \qquad (4.5)$$

ここで，

$$d_1=\ln(Ke^{-\mu})\left[\frac{(e^{-\nu}S_0/B_0)^{-1/\delta}}{1-(e^{-\mu}S_0/B_0)^{-1/\delta}}\right] \qquad (4.6)$$

$$d_2=d_1+\ln(Ke^{-\mu})$$

この式から次のような結論が導かれる．

- **期待値パラメータ(μ)の存在**：平均パラメータ μ が d_1 と d_2 を通じて直接プットオプション価格に影響を与えている．この意味は，ガンマ分布する確率変数ではジャンプすることを許容するため，無リスクヘッジポートフォリオを，離散的な世界であっても，構築可能でない．そのため，ブラック＝ショールズモデルと異なり期待値パラメータが価格式の中に現れるものと考えることができる．このことは，不動産のように，その資産価格が外生的な「イベント」によって影響をこうむるときの，デフォルトの価値を計算することが困難であることを示している．
- **ボラタリティーパラメータ(σ)が陽に現れないこと**：通常のオプション公式では，ボラタリティーは非常に重要な役割をはたす．これに対し，この式では，ガンマ分布の自由度 δ が分布のゆがみを表しているため，それによって，ボラタリティーの代わりの役割がなされているとも考えられる．
- **現物不動産と倒産する権利の価値との関係**：式(4.2)には，投資家の時間選好率(β)やリスク回避度(α)が内在している．つまり，式(4.5)をみると，現物価格(S_0)や1期間割引債価格(B_0)を通じて，間接的にこれら，投資家のリスクや時間価値に関する態度を表すパラメータがデフォルトに影響していることがわかる．われわれのモデルでは，デフォルトするかどうかは，不動産に投資している投資家の裁量のもとにある．そのときに，こうした定式化を通じて，投資家のリスクや時間選好がデフォルトにどのような影響を与えるかを検証することが可能になる．
- **デフォルト確率**：式(4.5)の $G[d_2|\delta]$ は，倒産確率をあらわす．つまり，不動産価値が借入額を下回る確率をしめす．式(4.3)を見るとわかるように，d_1 の中に，リスク回避パラメータが間接的に入っていることは興味深い．

5. 期前償還する権利：金利オプション

住宅ローンを30年間，8%の固定金利でA銀行から借りたとしよう．時間がたち，住宅ローン金利が4%に下ったならば，当然のことながら，8%ローンの残高分をA銀行に返して，つまり借換え，期前償還(Prepayment)を行い，他の銀行から4%金利で新たに住宅ローンを借りたほうが将来の金利支払いを減らすことができる．

これは明らかに金利オプションである．つまり，これは，当初のローン金利を行使価格として，その時々の市場金利を原資産とする，金利オプションである．したがって，この借り換えを行うことができる権利は，適切な金利オプション価格決定モデルを用いて，その価値を計算できる．金融機関がみずからの住宅ローンを証券化し，期前償還リスクを投資家に転嫁する場合，この期前償還権の価値分だけ，証券化商品の価値を高くしなければならないだろう．逆に言えば，この証券化商品を購入しようとする投資家は，この部分の価値を適切に考慮しないと，期前償還リスクに対応するリターンを得られないことになる．

この期前償還価値を計算するためには，多くの金利の期間構造モデルが利用可能である．しかし，上で述べたように，倒産オプション価値を計算するときと同様，不動産市場特有の要因を考慮する必要がある．それらについて簡単に述べることにしよう．

5.1 金利差以外の期前償還に影響を与える要因

固定金利ローンの期前償還は，金利差のみで生じるわけではない．むしろその他の要因が期前償還の決定にあたって重要である．そうした「非合理的」要因と呼ばれる物には多種多様な物があり，その重要性も時とともに，また国や地域によっても異なる．期前償還に影響を与える金利以外の要因には，次のような経済環境要因や借り手属性とがある．

1. **燃え付き効果**：ローンを借りた人には，2種類の借手がいると考えられる．できるだけ，借金を減らそうとする人とそうでない人である．燃え尽き効果は，前者の借手が早い時期にローンの返済を行うことにより，ある一定の期間がたつと，期前償還が行われるローンの割合が減ることを意味する．これをどう測定するかは，さまざまな考え方があるが，ローン残高が最も簡単な要因であろう．
2. **借り手の職業**：所得が高い階層はそうでない職業に比べて，期前償還を行うためのキャシュフローが豊かであるはずであり，結果として期前償還は多くなる．また，地域あるいは社会的移動の高い職業では，新規の住宅購入のための期前償還が多くなることが知られている．
3. **地域**：ローンの発生した地域によって，期前償還確率が異なることが知られている．異なる地域の経済格差，気候などの違い，特に米国では，州ごとに異なる期前償還に関する手数料や税金の違い，などによるものと思われる．
4. **残存期間**：ローンの満期が近づくにつれて，返済すべき金額は少なくなる．したがって，残存負債額を一括返済しようと言う誘因は高くなるであろう．
5. **季節効果**：日本のように6月と12月にボーナス収入がある場合は，その月に期前償還をする確率が高くなる．また多くの日本の企業は3月年度末に職位の移動が行われる．そのため住み替えが行われる可能性が高く，新規の住宅を購入するために借り換えを行う可能性が高くなるであろう．アメリカでは，春夏の移動しやすい時期に借り換えが行われる可能性が高いことが知られている．
6. **借り手の年齢**：ローンの借り手は，結婚や子供を持つことによる世帯数の増加，子供の独立による世帯数の減少，つまりライフサイクルに応じて家を買いかえる傾向がある．買い替えに応じた期前償還の可能性がある．
7. **抵当不動産のタイプ**：マンションと一戸建て住宅を比較してみよう．多くの人は，若いときにマンションを購入し，その後家族数の増加に伴い一戸建てを購入する．そうであれば，マンションを抵当とする住宅ローンでは，一戸建て住宅購入のために期前償還をする可能性が多いといえる．
8. **その他の要因**：そのほかさまざまな要因が期前償還に影響をあたえる．離婚のしやすさ，人種の違い，「マスコミ効果」と呼ばれるマスコミが金利に関する報道をどのくらい増やしたかどうか，などさまざまな要因が，その時々新たに考えられている．

5.2 期前償還確率の推定

期前償還確率とそれに影響を与える要因との間の関係を推定する試みがこれまで多数行われてきた．もっとも単純なものは，将来のある「特定時点」の期前償還確率を，定性的従属変数回帰モデル（ロジットあるいはプロビット分析）を用いて推定する．より進んだモデルは，将来の「任意の」時点の期前償還確率，いわば，期前償還の期間構造を推定できるようなモデルである．つまり，将来に任意の時点 t まで期前償還が行われないで，それから微少期間の間 $t+\Delta t$ で期前償還が行われる確率を推定する．これが次に述べる，生存分析を用いた期前償還確率の期間構造推定である．

5.3 Coxの比例ハザード・モデル

このような関係を推定するための統計モデルとしては，生存分析におけるCoxの比例ハザードモデルがある．j番目のローンについて，$z_j(t)$を時点(t)における説明変数（共変量）の行ベクトル，βをそれに対応するパラメータの列ベクトルとすると，ハザード関数$h(t)$は，次のように定義される．

$$h(t\,;\,z_j(t))=h_0(t)\cdot\exp(z_j(t)\beta) \qquad (5.1)$$

ここで，$h_0(t)$は，$z_j(t)$が0ベクトルとなったときのハザード関数であり，説明変数の影響を排除した純粋にローンの時間経過に伴う期前償還確率の変化をしめす．その意味でベースライン・ハザード関数と呼ばれる．このモデルから，j番目のローンがt期までに期前償還が行われない，言い換えれば，生存している確率は以下のように表される．

$$S(t)=\exp\left(-\int_0^t h_0(u)\exp(z_j(t)\beta)du\right) \qquad (5.2)$$

$z_j(t)$が0ベクトルとなったときの$\left(S(t)=\exp\left(-\int_0^t h_0(u)du\right)\right)$はベースライン生存関数と呼ばれ，$S_0(t)$と表記する．

5.4 推定例

日本の住宅ローンに関し，その詳細な期前償還確率の推定結果は公表されていない．ここでは，実際の銀行の貸出しデータをもとにし，説明変数が時間と共に変わりうることを許容したモデルを試みた，一条・森平[1]による推定結果を示すことにしよう．

本分析に使用したデータは，1995年1月から2000年6月の5年6ヶ月の間に観測された住宅ローンの返済に関わるデータ（約定返済，一部繰上返済，全額繰上返済，団体信用生命保険による返済，代位弁済），約13百万件（債権数約37万件）を対象としている．つまり，様々な借入開始時期を持つ住宅ローンに関する，ある一定期間に観測された取引データの集合である．

住宅ローン残高1万円を1件としたときの約90万件のランダムサンプリングデータからの推定結果を，表1にしめそう．借換えの金利効果は契約上の約束固定金利（適用金利）と6ヶ月物市場金利との比の係数（+0.1289）がそれを示している．たとえば，8%固定金利ローンに対し，市場金利が4%に下がったとすると，exp(0.0289×8/4)だけ，その住宅ローンは期前償還確率が高くなる．

金利比のみならず，5.1節で示されたようなその他数多くの要因が期前償還に影響を与えていることがわかる．

表1 推定結果（固定金利特約付）

共変量の種類	共変量名		係数(β)推定値	標準誤差	Waldカイ2乗統計量	P-Value
一般共変量	融資比率(LTV)	z_1	-0.0059	0.00003	47,005	0.0001
	返済比率	z_2	-0.0052	0.00007	5,120	0.0001
	家族数	z_3	-0.0675	0.00043	24,196	0.0001
	担保順位	z_4	-0.0241	0.00136	313	0.0001
	他借入年間返済額	z_5	-0.0259	0.00042	3,807	0.0001
	一部繰上返済回数	z_6	0.6095	0.00167	133,973	0.0001
時間依存性共変量	残存 Loan Age	z_7	-0.0020	0.00001	96,615	0.0001
	債務者年齢	z_8	0.0116	0.00007	26,090	0.0001
	適用金利／6ヶ月金利	z_9	0.0289	0.00011	64,918	0.0001
月別ダミー（時間依存性）	1月	z_{10}	-0.1419	0.00253	3,158	0.0001
	2月	z_{11}	-0.2227	0.00252	7,836	0.0001
	3月	z_{12}	0.0154	0.00236	42	0.0001
	4月	z_{13}	0.0886	0.00233	1,440	0.0001
	5月	z_{14}	-0.1612	0.00246	4,279	0.0001
	6月	z_{15}	-0.2976	0.00267	12,408	0.0001
	7月	z_{16}	0.0539	0.00265	413	0.0001
	8月	z_{17}	-0.0572	0.00268	457	0.0001
	9月	z_{18}	-0.4748	0.00298	25,472	0.0001
	10月	z_{19}	-0.3767	0.00284	17,584	0.0001
	11月	z_{20}	-0.4210	0.00282	22,320	0.0001
資金使途ダミー	土地のみ購入	z_{21}	0.8883	0.00206	186,769	0.0001
職業ダミー	職業 A	z_{22}	-0.4787	0.00386	15,365	0.0001
	職業 B	z_{23}	0.3807	0.00113	114,145	0.0001
	職業 C	z_{24}	0.4002	0.00165	58,595	0.0001
	職業 D	z_{25}	0.4771	0.00344	19,193	0.0001
地域ダミー	地域 A	z_{26}	0.3067	0.00242	16,066	0.0001
	地域 B	z_{27}	0.1300	0.00239	2,966	0.0001
	地域 C	z_{28}	0.1585	0.00248	4,088	0.0001
	地域 D	z_{29}	0.0312	0.00294	113	0.0001

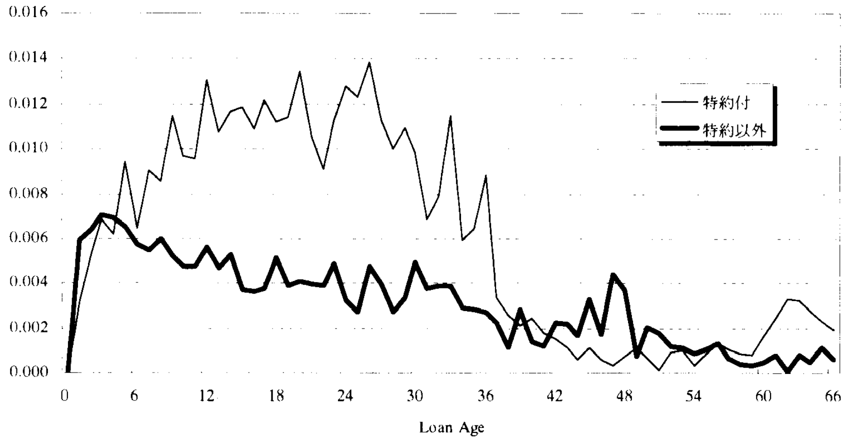

図2　推定されたベースライン・ハザード関数：$S(t)$，横軸の単位は月をしめす．特約付とは，ローン開始後固定金利借入を，変動金利借入に変更できるオプションがついた住宅ローンのことを指す．

またこの結果にもとづいて推定されたベースライン・ハザード関数は，図2に示されている．

6. おわりに

日本において不動産ファイナンス研究はまだ始まったばかりである．バブル時の異常な地価の上昇とその後の長期低落傾向が日本経済に与えた影響は深刻なものがある．このことは研究者の立場から言えば，不動産の公正価値（Fair Value）を適切に判断する理論と仕組みがなかったから起こったことであるとも言える．そうであれば，不動産価格やそのデリバティブズの価格に関する理論である「不動産ファイナンス研究」は，今後ますますその重要性が高まるであろう．

不動産ファイナンス研究は，すぐれて学際的な研究である．この論文では，ファイナンス理論で発展してきたオプション理論がどのようにして，不動産抵当貸付の「信用リスク」と「期前償還リスク」を説明し，測定できるかをしめした．

参考文献

[1] 一條裕彦，森平爽一郎，「住宅ローンのプリペイメント分析」，日本金融・証券計量工学学会2001年夏季大会予稿集，221-239，2001年7月

[2] Case, Karl E. and Robert J. Spiller, "Mortgage Default Risk And Real Estate Prices: The Use of Index-Based Futures and Options in Real Estate", *Journal of Housing Research*, 1996, 7(2), 243-258

[3] Heston, Steven L, "Invisible Parameters in Option Prices", *Journal of Finance*, 1993, 48(3), 933-947

[4] Norman L. Johnson, Samuel Kotz, N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions*, (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).

[5] Lentz, George H. and K.S. Maurice Tse, "An Option Pricing Approach to The Valuation of Real Estate Contaminated with Hazardous Materials", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 1995, 10(2), 121-144

[6] Schwartz, Eduardo S. and Walter N. Torous, "Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities", *Journal of Finance*, 1989, 44(2), 375-392

[7] Schwartz, Eduardo S. and Walter N. Torous, "Mortgage Prepayment and Default Decisions: A Poisson Regression Approach", *American Real Estate and Urban Economics Association*, 1993, 21(4), 431-449

[8] Shilling, James D., C.F. Sirmans and John D. Benjamin, "On Option-Pricing Models in Real Estate: A Critique", *American Real Estate and Urban Economics Association*, 1987, 15(1), 742-752

[9] Vandell, Kerry D, "How Ruthless Is Mortgage Default? A Review And Synthesis Of The Evidence", *Journal of Housing Research*, 1995, 6(2), 245-264