下方リスクモデルによるポートフォリオ最適化

今野　浩

1. はじめに

よく知られているとおり，ポートフォリオ理論の出発点は，ハリー・マーコビッツの平均・分散モデル[9]である．ここでマーコビッツは，ポートフォリオの収益率の期待値と分散のトレードオフ関係を分析することによって，“分散投資によるリスク低減効果”を定量的に示すことに成功した．以来50年にわたって，このモデルがポートフォリオ理論の基礎としての役割を果たしてきた．

平均・分散モデルは，各資産の収益率が正規分布にしたがう場合には，収益率分布全体を管理できるだけでなく，計算されるポートフォリオが，不確定の下での意思決定の大原則である「期待効用最大化原理」と完全な斉合性をもつ．このためひところは，平均・分散モデル以外のモデルを考えることを全く意味がない，と言われたほどである．理論家の大多数が，ごく最近まで，株式収益率は正規分布に従うと固く信じていたのが原因である．

しかし実務家たちの間では，株の収益率が正規分布から微妙にずれているという事実は，古くから良く知られていた．そのため，実務家やOR関係者たちによって，収益率の非対称性を考慮した様々なモデルが繰返し提案された．その代表的なものは，収益率の平均値以下の分散，すなわち下半分散をリスク指標とする，“平均・下半分散モデル（マーコビッツ[9]）”である．

また平均・分散モデルのように，平均とリスクという2つのパラメータを用いたモデルとは別に，リスクのみをコントロールする1-パラメータ・モデルもいくつか提案されている．その代表は，ポートフォリオ価値が，ある一定値よりも小さくなるリスクを最小化するモデル（Below Target Riskモデル[4, 5]）である．このほかにも，収益率がある一定値を下回る確率を最小化するモデル（安全第一規準モデル[14]）などもある．

しかし最近にいたるまで，これらの下方リスクモデルが，資産運用の実務に利用されることはほとんどなかった．その理由の1つは，そもそも平均・分散モデルですら，大規模な問題が解けるようになったのは1980年代半ば以降のことだったからである[13]．その上，様々な下方リスクモデルを解くための計算量は，平均・分散モデルを下回ることはないと多くの人が信じていたため，（少数の資産を対象とする場合を除けば）このモデルを実務に利用しようと考える人はほとんどいなかったのである．

また60年代以来の，均衡理論（CAPM）を下敷きとするインデックス運用（消極運用）の隆盛によって，“マーコビッツ・モデルや平均・下方リスクモデルをそのまま解く必要はない，むしろそれはあてにならない結果を導くだけだ”，と批判されることになった．さらに理論的にも，“取引コストがない完全市場での連続取引を想定すれば，平均・分散モデル以外のものを考える必要は全くない”という，ロバート・マートンの宣告[10]が，（平均・）下方リスクモデルに決定的なダメージを与えたのである．

しかし，90年代以降流れは変わった．収益率分布が明らかに非対称な，デリバティブのような商品が世の中に広く出回るようになったこと，金融工学分野へのエンジニアの参入によって，超大型問題が容易に解けるようになったこと，またBIS規制によって，金融機関の巨大ロス（巨大な下方リスク）の管理への関心が高まったことなどにより，様々な（平均・）下方リスクモデルが実務に導入されはじめている．また驚くべきことに，最近になって，それらが理論的にも，平均・分散モデルなどの対称リスク・モデルより良い性質を持つことが示されている．

そこで本稿では，下方リスクモデルの代表的なものをいくつか紹介し，それらについて最近明らかになった事実を説明することにしたい．

こんの　ひろし
中央大学 理工学部経営システム工学科
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27

2. 平均・下方リスクモデル

n 種の資産の収益率を表す確率変数を $R_1, \cdots, R_n$ とし，各資産への資金配分比率を $x_1, \cdots, x_n$ とする．そのときポートフォリオ $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ の収益率 $R(\boldsymbol{x})$ は，

$$R(\boldsymbol{x})=R_1x_1+\cdots+R_nx_n \tag{1}$$

で与えられる．$R(\boldsymbol{x})$ の期待値を $r(\boldsymbol{x})$ としたとき，$R(\boldsymbol{x})$ の下半 k 次モーメントは，以下のように定義される（図1参照）：

$$\sigma_k(\boldsymbol{x})=\{E[|R(\boldsymbol{x})-r(\boldsymbol{x})|_-^k]\}^{1/k} \tag{2}$$

ここで $|\cdot|_-$ は

$$|u|_-=\begin{cases}0, & u\geq 0\\ -u, & u<0\end{cases}$$

で表される関数で，$E[\cdot]$ は確率変数の期待値を表す．

平均・下半 k 次モーメントモデルは，

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & r(\boldsymbol{x})-\lambda\sigma_k(\boldsymbol{x})\\ \text{条件} & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}=1,\quad \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\end{array}\right. \tag{3}$$

で定義される．ここで $\boldsymbol{e}=(1, \cdots, 1)$ で，$\lambda>0$ はリスク回避度を表すパラメータである．この問題の最適解を $\boldsymbol{x}_\lambda$ としたとき，$(r(\boldsymbol{x}_\lambda), \sigma_k(\boldsymbol{x}_\lambda))$ の $\lambda>0$ に関する軌跡は，平均・下半 k 次モーメント・モデルの「効率的フロンティア」と呼ばれている（図2）．

因みに $k=1$ のときは，式(3)は平均・下半絶対偏差モデル，$k=2$ のときは平均・下半標準偏差モデルと呼ばれている．前者は，「平均・絶対偏差モデル」と本質的に同じものである．また後者は，1950年代末にマーコビッツ本人によって提案されたものである．

定義1 2つのポートフォリオ $\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ が与えられたとき，任意のリスク回避型効用関数 $U(\cdot)$ に対して

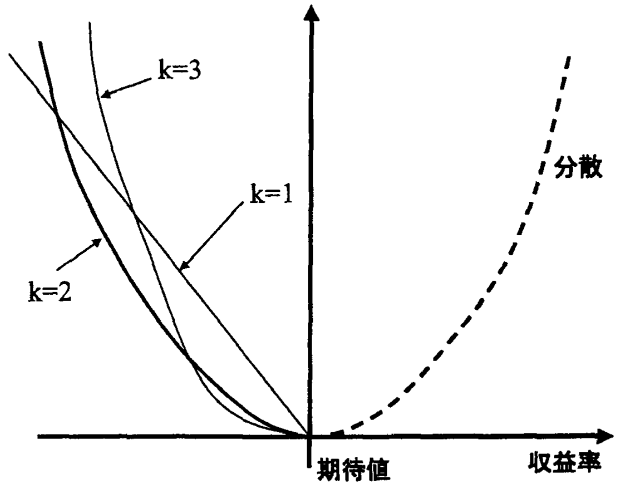

図1 下半 k 次モーメント

$$E[U(R(\boldsymbol{x}^1))]\geq E[U(R(\boldsymbol{x}^2))] \tag{4}$$

となるとき，$\boldsymbol{x}^1$ は2次確率優越の意味で $\boldsymbol{x}^2$ を優越するという．また任意のリスク回避逓減型の効用関数 $U(\cdot)$ に対して式(4)が成り立つとき，$\boldsymbol{x}^1$ は3次確率優越の意味で $\boldsymbol{x}^2$ に優越するという．またポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ は，それを k 次 $(k=2, 3)$ 確率優越するポートフォリオが存在しないとき，k 次確率優越の意味で効率的であるという．

さて1998年以降，Ogryczak-Ruszczynski[11, 12]，Gotoh-Konno[6]らによって証明されたのは，以下の定理である．

定理1 $0<\lambda\leq 1$ に対して，平均・下半絶対偏差（標準偏差）モデルの最適解 $\boldsymbol{x}(\lambda)$ が一意的に定まるならば，$\boldsymbol{x}(\lambda)$ は $\boldsymbol{R}=(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ の分布の如何に関わらず，2次確率優越の意味で効率的なポートフォリオである．

定理2 $0<\lambda\leq 1$ に対して，平均・下半3次モーメントモデルの最適解 $\boldsymbol{x}(\lambda)$ が一意的に定まるならば，$\boldsymbol{x}(\lambda)$ は $\boldsymbol{R}=(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ の分布の如何に関わらず，3次確率優越の意味で効率的なポートフォリオである．
∎

Ogryczak-Ruszczynski[11]は，2次元グラフ上のOutcome-Riskダイヤグラム（O-Rダイヤグラム）という道具を導入して，初歩的な方法で定理1を証明している（拙著[7]の第11章にはその詳しい解説がある）．また $k=3$ の場合（定理2）も，類似の方法を用いて証明することができる[6, 12]．

これらの定理は，資産の収益率分布がどのようなものであっても，上記の平均・下方リスクモデルによって得られる効率的ポートフォリオを $\boldsymbol{x}(\lambda)$ とすると，$0<\lambda\leq 1$ の範囲では任意のリスク回避（逓減）的な効用関数 U に対して

$$E[U(R(\boldsymbol{x}(\lambda)))]=\max_{x\in X}E[U(R(\boldsymbol{x}))] \tag{5}$$

となる，という事実を示している（図2参照）．これは平均・分散モデルの場合には成立たない命題である．

この結果，平均・下半 k 次 $(k=1, 2, 3)$ リスクモデルが，期待効用最大化の原理との斉合性という点で，平均・分散モデルよりも良いモデルであることが明らかになったという次第である．

容易に確かめられるとおり，問題(3)は任意の自然数 k に対して凸計画問題となる．したがって，この問題を解くことは原理的に可能である．特にヒストリカル・データやシナリオ・データをもとにモデルを組み

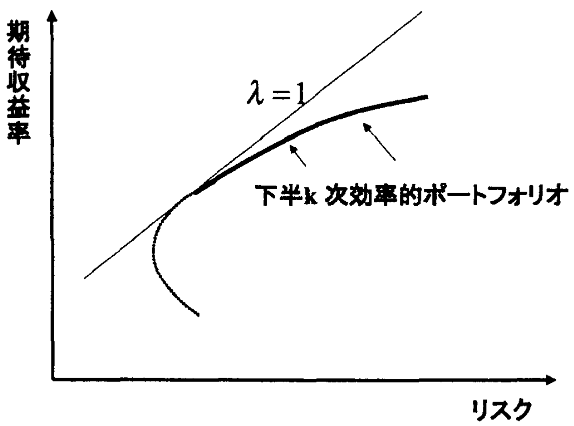

図2　平均・下半 k 次モーメントモデルの効率的フロンティア

たてる場合には，$k=1$ であれば線形計画問題，$k=2$ であれば2次計画問題となるので，効率的フロンティアを効率的に計算することができる．

一方，リスクウェイトが相対的に高い場合，すなわち $\lambda>1$ の場合に上の定理が成立するか否かは，現在のところ不明である．これまでの実証研究によれば，大域的リスク最小点（$\lambda=\infty$ の場合に対応）の近傍には，パフォーマンスの良いポートフォリオが多数存在するといわれている．したがって，この部分のポートフォリオが定理の性質を満たすか否かについて，大いに関心が持たれるところである．

余談であるが，筆者は平均・(下半) 絶対偏差モデルを提案した直後の1990年末に，ラトガーズ大学のU. Rothblumから，"平均・(下半) 絶対偏差モデルを2次確率優越の立場から分析すると，必ず面白い結果が得られるだろう"，というアドバイスを貰ったことがある．残念なことに，筆者は確率優越の概念にはほとんど馴染みがなかったため，このアドバイスを聞き流してしまった．また当時，平均・絶対偏差モデルは経済学者たちの酷評に晒されていたため，これが平均・分散モデルよりすぐれているなどとは夢にも思わなかったのである．

1998年に，ポーランド出身のOgryczak-Ruszczynskiが上の定理を証明したことを知ったとき，筆者は10年前のこの予言を思い出していた．気がつけば，RuszczynskiはRothblumの同僚である．そこで過日，当の本人に確かめてみたところ，やはりRothblumのアドバイスがこの定理を証明するきっかけになったという．

しかし筆者には，依然としてなぜRothblumが上のような直観をもったのかは謎である．天才の洞察に畏怖を覚えるとともに，たちまちこの定理を証明して，平均・(下半) 絶対偏差モデルの正統性を確立し，経済学者に一矢報いてくれたRuszczynskiに最敬礼した次第である．

3.　*VaR* と *CVaR*

3.1　*VaR*（バリュー・アット・リスク）

金融商品の価格は，市場の変動によって毎日複雑に変化する．株式や債券など，様々な資産（ポートフォリオ）を管理・運用している人々にとって，このような変化に伴って自らが蒙る損失がどの程度のものになるかを知ることは極めて重要である．

ここで考案された指標が，*VaR*（バリュー・アット・リスク）である．いま個別資産の価格変動をもとに，ポートフォリオの価格変動の確率分布を求め，収益分布の下位100 α%になる点を V_α としよう（図3参照）．このとき，V_α を（100 α%の）バリュー・アット・リスクと呼ぶ．α は通常0.95，0.99などと設定されることが多い．

ポートフォリオの価格が正規分布に従うときは，収益がこの値を下回ることは極めて稀だから，たとえば自己資本が99%の *VaR* に対応する損失額を十分に上回っていれば，資産管理は安全水準にあると見ることができる．

ところが，すべての資産の価格が正規分布に従う場合を除けば，*VaR* 点を与える解析的な公式は存在しない．そこで用いられるのが，個別資産の価格変動をランダムに発生させ，これをもとにポートフォリオの価格変動を計算し，これを何万回も繰り返して，99% *VaR* 点を求める数値シミュレーションである．具体的にはこのシミュレーションを1万回実施して，損失額の大きさの上位100番目をもって99% *VaR* 点をとるというやり方である．

しかしこのようなシミュレーションには，大量な計算時間が必要となる．資産数が2～300の場合，シミュレーションを1万回繰り返すには，100時間程度の時間がかかるという．

そこで用いられているのは，各資産の分布が多次元正規分布していることを仮定した，分散・共分散法である．株式や証券の場合は，上の仮定は第1次近似としては有効である．しかし，対象となる資産が企業への貸し出し資金であるような場合にはこの方法は効力を失う．それは，貸出資金が回収できなくなるデフォルトが互いに独立でないため，損失分布が正規分布と

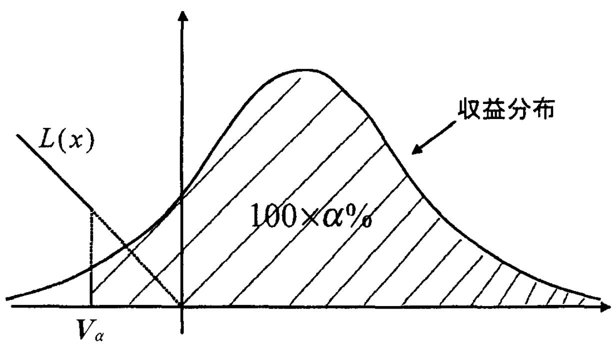

図3　*VaR* と *CVaR*

かけ離れた形を示すからである．このような分布を計算するには，簡便法を使うことはできないので，数値シミュレーションが唯一つの現実的な方法である．ところが現在では金融機関が抱える何万件もの貸し出しを対象とするシミュレーションには，何台ものスーパーコンピュータを繋いで数日かけて計算しても，十分なサンプル数が得られないという．

金融機関のリスク管理手法として *VaR* が導入されたのは，比較的最近のことである．しかし，*BIS* によるマーケット・リスクや信用リスク規制にこの指標が使われるになって以来，金融機関のリスク管理は *VaR* 一色になってしまった観がある．

筆者の印象では，*VaR* が急速に普及した理由は，第1に多くの人が資産の収益率分布は“ほぼ”正規分布に従っているので，*VaR* を十分に大きく押さえておけば，下方リスクの管理の上では十分だと考えていること．第2に，一般の人々にとっては，2-パラメータ・モデル（平均・リスクモデル）より1-パラメータ・モデルの方がより分かり易い，という長所があるためである．

しかしこの指標を用いて資産を運用しようとする立場からは，直ちにいくつもの問題が浮上する．

いまポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ のリスクを一般に $V(\boldsymbol{x})$ と書いたとき，任意の2つのポートフォリオ $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ に対して

$$V(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)\leq V(\boldsymbol{x}^1)+V(\boldsymbol{x}^2)$$

が成立するならば，$V(\boldsymbol{x})$ は劣加法性を満足するという．

ファイナンス理論においては，マーコビッツ以来「分散投資によるリスク軽減」が大原則である．したがって理論的な立場からは，リスク指標は劣加法性をみたすことが強く求められている[1]．ところが下の例でみるとおり，*VaR* はこの性質を満足しないのである．

例[16]　市場に100銘柄の1年もの社債が存在し，それらのクーポン・レートはすべて2%．デフォルト率は1%とする．またデフォルト時の回収率は，満期まで一定値0を取るものとし，デフォルトはすべて独立であるものとする．

このときすべての社債に100万円ずつ，合計1億円投資するポートフォリオ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^1+\cdots+\boldsymbol{x}^{100}$ を考えよう．1年間に2つ以上の社債がデフォルトして損失が発生する確率は26%となる．したがって95% *VaR* は正の値をとる．一方，1社に1億円集中投資したポートフォリオを考えると，損失が発生する確率は1%なので，95% *VaR* はマイナスとなる．この結果 $\boldsymbol{x}$ の100 α%バリュー・アット・リスクを $V_\alpha(\boldsymbol{x})$ と書くと

$$V_\alpha(\boldsymbol{x}^1+\cdots+\boldsymbol{x}^{100})\geq V_\alpha(\boldsymbol{x}^1)+\cdots+V_\alpha(\boldsymbol{x}^{100})$$

となって $V_\alpha(\boldsymbol{x})$ は劣化法性を満たさないことが分かる．

3.2　*CVaR*（条件付き *VaR*）

既にのべたとおり，*VaR* は損失額（収益の符号を逆転させたもの）の分布が正規分布に近い場合には，適切なリスク指標である．ところが損失額が正規分布から外れている場合，*VaR* はリスク指標としての妥当性を欠いたものとなる．なぜならば，それは劣加法性を満たさないだけでなく，99% *VaR* 点の左側に巨大な損失が隠されている可能性があるためである．

そこで，このような欠点を持たない下方リスク指標として，最近は注目を集めているのが *CVaR*（条件付き *VaR*，期待ショートフォールともいう）である．

ポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の損失を $L(\boldsymbol{x})$ としたとき

$$CV_\alpha(\boldsymbol{x})=\frac{1}{1-\alpha}\boldsymbol{E}[L(\boldsymbol{x})|L(\boldsymbol{x})\geq -V_\alpha(\boldsymbol{x})] \quad (6)$$

をポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の100 α%の *CVaR* という（図3参照）．これは，損失の上位 $(1-\alpha)\times 100\%$ の部分の損失の条件付き期待値である．また，$CV_\alpha(\boldsymbol{x})$ は劣加法性を満たす（したがって凸関数となる）[15]ので，現実可能なポートフォリオ集合 $\boldsymbol{X}$ 上でこれを最小化することは原理的に可能である（これに対して $V_\alpha(\boldsymbol{x})$ は凸関数とはならないので，*VaR* を $\boldsymbol{X}$ 上で最小化することは極めて難しい）．

例えば，m 個のシナリオの下でのポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の損失を $L_j(\boldsymbol{x}), j=1,\cdots,m$ としたとき，$CV_\alpha(\boldsymbol{x})$ を最小化する問題は

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f(\beta, \boldsymbol{z}) \equiv \beta + \dfrac{1}{m(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{m} z_j \\
\text{条件式} & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \\
 & z_j \geq L_j(\boldsymbol{x}) - \beta \\
 & z_j \geq 0, \quad j=1, \cdots, m.
\end{array}\right. \tag{7}
$$

として定式化される[15]. そして, この問題の最適解を $(\beta^*, \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)$ とおくと, $f(\beta^*, \boldsymbol{z}^*)$ と β^* がそれぞれ $CV_\alpha(\boldsymbol{x})$ の最小値及び $V_\alpha(\boldsymbol{x})$ の最小値の近似値を与えるのである.

このモデルを強力にプロモートしているフロリダ大学のUryasevによれば, 米国においてはポートフォリオ構築にあたって, *CVaR* をリスク指標として採用するやり方が標準になりつつあるという. それは

(1) 理論的には *CVaR* が劣加法性をみたすこと,

(2) 実用的には, 問題(6)が線形計画問題なので容易に解けると考えられること

が原因である.

そこで, わが国の市場データを用いて, シミュレーションを行ってみたところ, 収益分布の歪みが余り大きくないときは, 平均・*CVaR* モデルと平均・下半絶対偏差モデルは, ほぼ同一のポートフォリオを生成するが, 歪みが大きい場合には, 下方リスクを管理する上で平均・*CVaR* モデルの方がより適切であることが示された.

ところが, 実際に $m=1000$, $n=1000$ 程度の問題を市販のソフトウェア (たとえばNUOPT 4.0) を用いて解いてみると, HP 9000/B 180 L (HP-UX 11.0) 上で約1000秒程度の計算時間が必要となる[8]. それは1次式 $L_j(\boldsymbol{x})$ のほとんどすべての係数が非ゼロであるため, 式(6)は稠密な線形計画問題となるからである. したがって, $m=1000$, $n=10000$ といった大規模な問題(7)を解くには, 従来とは異なる数値計算上の工夫が必要とされるものと考えられる.

参考文献

[1] Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber, and D. Heath, "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, 9(3) (1999), 203-228.

[2] Bawa, V. S., "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects", *Journal of Financial Economics*, 2(1975), 95-121.

[3] Bawa, V. S., and E. B. Lindenberg, "Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework", *Journal of Financial Economics*, 5(1977), 189-200.

[4] Fishburn, P. C., "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns", *American Economic Review*, 67(1977), 116-126.

[5] Fishburn, P. C., "Stochastic Dominance and Moments of Distribution", *Mathematics of Operations Research*, 5(1980), 94-100.

[6] Gotoh, J. and H. Konno, "Third Degree Stochastic Dominance and Mean-Risk Analysis", *Management Science*, 46(2000), 289-301.

[7] 今野浩, "理財工学II: 数理計画法による資産運用最適化", 日科技連出版社 (1998).

[8] 今野浩, 結城淳, "下方リスク指標を用いたポートフォリオ最適化", ISE 01-04, 中央大学理工学部経営システム工学科 (2001).

[9] Markowitz, H., "*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*", John Wiley & Sons. (1959).

[10] Merton, R., "Optimum Consumption and Portfolio Rules in Continuous Time Model", *J. of Economic Theory*, 3(1971), 373-413.

[11] Ogryczak, W. and A. Ruszczynski, "From Stochastic Dominance to Mean-Risk Models", *European J. of Operational Research*, 116(1999), 33-50.

[12] Ogryczak, W. and A. Ruszczynski, "On Consistency of Stochastic Dominance and Mean-Semideviation Models", *Mathematical Programming*, Ser. B. 89 (2001), 217-232.

[13] Perold, A., "Large Scale Portfolio Optimization", *Managemanet Science*, 36(1984), 1143-1160.

[14] Roy, A. D., "Safety-First and the Holding of Assets", *Econometrica*, 20(1952), 431-449.

[15] Rockafellar, T. and S. Uryasev, "Optimization of Conditional Value at Risk" *J. of Risk*, 2(2000), 21-41.

[16] 山井康浩, 吉羽要直, "バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について", IMES ディスカッションペーパー, 日本銀行金融研究所 (2000).