

第1回 フラクタル理論と経済時系列予測への応用

時永 祥三

1. はじめに

今回の解説では、複雑系による経済モデル分析に関してこれまでの研究を中心にしながら、最近の話題について述べていく。この解説のベースとなっているものは、これまで発表した論文をもとに著者が編集し、最近刊行した著書であるが[9]、このあともいくつかの新しい展開があるので、これらも含めて述べていく。以下、5回にわたって、次のような内容について述べる。

- (1) フラクタル理論と経済時系列予測への応用
- (2) 遺伝的アルゴリズムによる最適化と経済
- (3) ファジイ推論システムの最適構成と推定
- (4) カオスと経済動学-理論と応用
- (5) ニューラルネットワークと複雑系

2. フラクタル理論と経済分析

複雑系の経済モデル分析の最初のテーマとして、フラクタルをとりあげる。フラクタルは自己相似性として表現されているように、部分的な現象を拡大することにより全体が見えてくる、あるいは逆のことが近似的に成立することをさしている。経済学の分野では、主として時系列の解析に適用するが、株価をはじめ典型的な時系列にフラクタルが観測されており、応用範囲も広い。

フラクタル (fractal) とは、その提唱者であるマンデルブロ (Mandelbrot) 教授による造語であるとされており、その語源はラテン語の「端切れ」とか「破片」を意味している[2, 6, 10]。すなわち、細かな破片が集まって1つの形を形成する現象を指しており、部分の集まりが全体を構成しているとも考えることができる。全体の形も部分に似ていることから、自己相似性 (self-similarity) をもつ現象や集合として

定義されたりする。どのように細かく分割しても円や直線ではなく同じような形状を用いざるを得ない (したがって、微分が定義できない)。このように、通常の幾何学的な形状とはかけ離れた図形をフラクタルとよんでいる。

複雑系による経済分析でフラクタルがもつ意味は、単純な部分の集合が特定の意味ある性質をもつことにあると言えよう。以下では、身近に観測できるフラクタルの例を示す。

(1) 自然界

海岸線や山岳風景がある。大まかに眺めた図形と、この一部分を拡大して見た図形は、その複雑さにおいて同じような形状をしている。また植物、樹木もその例で、1つの部分を拡大して同じような形状が現れる。川についても、本流を含む全体の形状が、同様に枝が広がった形状をしている。

(2) 人工物

金属結晶では樹木のように結晶が形成 (成長) されることが知られている。電話の回線を、交換局から家庭まで配線する形状も同様であるとの指摘もある。

(3) 自然現象

地震の発生状況を地球の内部で分布として描くと、大きな地震を大きな範囲で計測した結果と、小さな範囲で小さな地震を計測した関係とが同様であることが知られている (同様に、宇宙における星の分布)。

(4) 株価

株価のブラウン運動は1つの典型的なフラクタルである。大金をもっている投資家が大きな株価変動にいだく印象と、小額の資金しかもたない投資家が小さな株価変動にいだく印象は同じであると言える。

(5) 通信トラヒック、需要

インターネットなどの通信トラヒックを計測すると秒単位で計測した結果のグラフと、1時間単位で集計して描いたグラフとは同じような形状をしていることが知られている (商品の需要を一定期間にわたって集計した結果も同様)。

ときなが しょうぞう

九州大学 大学院経済学研究院経済工学部門
〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-19-1

3. コッホ曲線とフラクタル時系列

図1にはコッホ曲線とよばれる代表的なフラクタル図形を示す。この図形は、部分的に見られる王冠模様がいくつか集まることにより相似形の同じような王冠模様を形成している。もちろん、集合として形成されている王冠は部分的な図形とはまったく同じというわけではないが、極めて類似している。この曲線は自己相似性をもたせているために、平面を覆い尽くすほどの複雑さをもたない。したがって、約1.26次元という値をもつことになる。

次元の定義には数種類あるが、相似性次元とよばれる次元を用いる。ある図形が、全体を $1/a$ に縮小した相似形 b 個数によって成り立っているとき、次で定義する。

$$D = \log b / \log a \quad (1)$$

コッホ曲線の場合、王冠の形状が全体と部分をなしているため、これらの個数を数えてみると、全体を $1/3$ にした図形が4個含まれているので、

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.2618... \quad (2)$$

フラクタル時系列を考察する場合も、このようなコッホ曲線における性質を利用する。時系列は曲線とは言いがたい側面もあるが、あえて曲線とみなすと曲線全体のグラフの中に、これを縮小した曲線が複数含まれていることになる。部分を観測して、これを適当に拡大すると全体が見えてくるといった関係を用いる。

なおフラクタル時系列、3次元のフラクタル表面をコンピュータで生成する方法の詳細は省略するが、文献のみあけておく。

- (1) スペクトルの性質を用いるもの[6]
- (2) 逐次ランダム加算による方法[2, 13]

4. フラクタル時系列の予測

フラクタル時系列の性質として良く知られているも

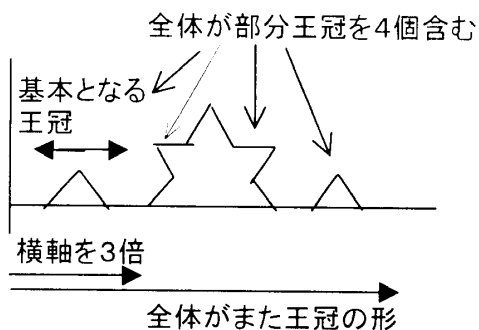


図1 コッホ曲線と相似性次元

のに、時間軸の伸長に関して統計的な性質が変わらないことがある[6]。いま、 $B_H(t)$ を代表的なフラクタル時系列であるfBm (fractional Brownian motion)としておく。fBmはブラウン運動を非整数階積分して得られる[6, 10]。このとき、次の式が成り立つ。すなわち、時系列 $B_H(t)$ をfBmとするとき

$$B_H(t+T) - B_H(t) = h^{-H}(B_H(t+hT) - B_H(t)) \quad (3)$$

ここで、 H はハーストパラメータであり、フラクタル次元 D とは $D=2-H$ の関係にある。 h は任意の正の数である。時系列の差をとっているのは、 $B_H(t) = H(t)$ は発散するケースがある理由による。つまり、時間軸を $1/h$ 倍し、スケールを h^{-H} 倍したときの波形の性質は、元のものと統計的に同じ性質をもつことを意味する。しかし、同時に、統計的な性質が同じであることを示しているにすぎないので、例えば、コッホ曲線にならって、時系列の一部分を引き延ばして拡大しても、全体に一致するなどの現象は確認できない。

以下では、我々が以前に提案したフラクタル時系列予測手法を紹介する[3, 4, 7, 11, 12]。これは時系列の時間軸をスケール変換する点は共通しているが、時系列そのものを拡大するのではなく、時系列を記述するパラメータの作用する場所を、拡大されたスケールの上で用いるようにしている。そのために、最初に時系列を記述するモデルを求め、次に、このモデルのパラメータを拡大された時間軸の上で用いるようにしている。

一般的な線形時変入出力システム

$$y(t) = \int_0^{t_0} h(t, t-\tau)x(\tau)d\tau, t > t_0 \quad (4)$$

を考察する。このシステムでは入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ が同じであるので時系列の同定モデルと考えられる。線形時変システムのインパルス応答関数 $h(t, \tau)$ がスケール関数 $\phi(t)$ を用いて次のように展開されると仮定する。

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} \phi_{N_i}(t) \phi_{N_j}(\tau) \quad (5)$$

ただし、

$$\phi_{N_i}(t) = \phi(2^{-N}t - i) \quad (6)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

以下では、特に、入出力が同じである同定問題 ($y(t) = x(t)$ の場合)を考える。

この式の解釈であるが、時刻 t における時系列の値

$x(t)$ は過去の値を積分することにより表現できるとするものである。この方法は自動制御などの工学分野ではよく用いられる。積分は加算に置き換えて計算されるので、一種の自己回帰式と解釈してもよいが、回帰係数が一定ではなく、時系列の観測時刻に依存するものとなる。

いま、式(4)による予測値 $y(t)$ と入力時系列 $x(t)$ との差の最小 2 乗近似を考え、これを最小化するようにインパルス応答関数の係数 h_{ij} を決定する。計算にあたり式(6)で $N=0$ とし、 j の範囲を $j=1\sim 4$ に限定する。最適化の方法として最急降下法を用いる。

次に、時間軸の伸長による予測について述べる。いま、 $T_s \leq t \leq T_e$ は時系列 $x(t)$ が観測される時間区間であり $T_1 = T_e - T_s$ とする。また、 $0 < t \leq T_2$ は $x(t)$ を予測する区間とする。なお、 T_1, T_2 の選び方には任意性があるが、期間 T_1 の時系列が、期間全体 T_2 の時系列とできるだけ相似であるように選択する必要がある。

次の量を定義する。

$$b = a^D, a = T_2/T_1, T_2 > T_1 \quad (8)$$

D は時系列 $x(t)$ のフラクタル次元であり、

$$1 < D < 2$$

である。 $x(t)$ がフラクタル性を持つ場合には、その自己相似性により、 $0 < t \leq T_2$ において、次の式が近似的に成立すると考えられる。

$$x(t) = b^{-1} \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) x(\tau) d\tau, t > bt_0 \quad (9)$$

この式はあくまでも経験的に成立することが予想される式であり、理論的な結果ではない。この導出には、時系列をコッホ曲線とみなして、相似関係を見出す方法を用いている。図1の例では、横軸方向に a 倍だけ曲線を引き延ばすと、相似の図形が b 個出現している。これを時系列の時間軸の伸長に適用する。すなわち、時間軸が a 倍された領域の中に b 個のフラクタル図形が入ると解釈される。

計算においては、 a = 整数となるように T_1, T_2 を選んでいる (例: $T_2 = 2T_1$)。サンプリングされた時系列を仮定し、サンプリング間隔を 1 とする。すなわち、式(4)では $t = t_0 + 1$ であり、式(9)では $t = bt_0 + b$ となるので、次の予測式となる。

$$x(bt_0 + b) = b^{-1} \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) x(\tau) d\tau, t > bt_0 \quad (10)$$

予測を議論する場合には、通常、現在までの観測テ

ータをもとにして、1ステップ先のサンプルの予測値を計算することが行われる。これを、以下では b 時刻先の予測とよぶ。

これに対して、式(10)に従って、逐次的に予測された値を観測値と見なして、予測を継続していく場合を考え、これにより n ステップ将来の値を予測する場合を nb 時刻先の予測とよんでおく。 nb 時刻先の予測においてもインパルス応答が計算されているので、線形予測をそのまま継続して用いる場合と比較して、予測誤差は極めて小さいものとなる。

なお、この計算を実際に行うには、離散時間における積分や計算の簡略化が必要である。詳しくは、文献[9]を参照されたい。

5. 予測誤差

次に、式(10)を用いて時系列を予測した結果についてまとめておく。フラクタル時系列である fBm を対象とする。

図2には本章の手法を用いて時系列を予測した場合の結果を示している。実線が観測値であり破線が予測値である。図2は 1-step 先の予測である。

予測誤差を観測された期間における時系列の最大振幅を基準とした予測誤差の相対値としておく。これら

表1 fBm の b 時刻先の予測誤差 ($a=2$)

次元 D	1.80	1.50	1.25
予測誤差	0.25	0.19	0.17

表2 nb 時刻先の予測誤差 ($D=1.5, a=2$)

	$nb = 30$	60	90	120
予測誤差	3.7	4.9	5.2	5.6

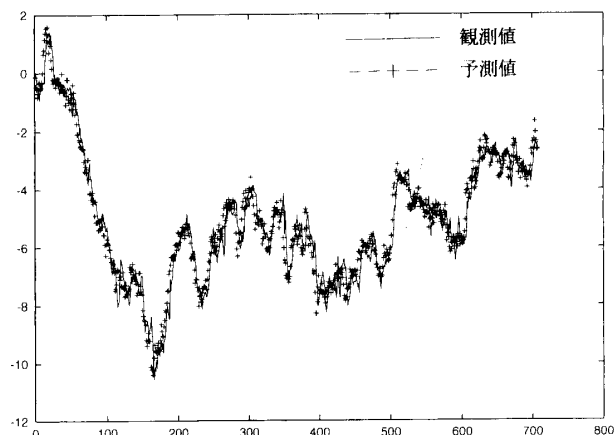


図2 fBm の 1-step 先予測 (b 時刻先)

の誤差の特性については、文献[11]と[12]にまとめている。b時刻先、nb時刻先の予測誤差の大きさは、時系列の最大振幅に対して平均して、それぞれ、0.3%、5%程度となる(表1、表2)。

6. フラクタル性の検証

時系列がフラクタル(自己相似)であることは、通常、1) 時系列のm個のサンプルの平均の分散を調べる、2) 時系列のスペクトルが周波数に逆比例する、すなわち1/fスペクトルであるかを調べる、という2つのことを確認することにより行われる[5]。

(1) 時系列m個サンプルの平均の分散

もとの時系列を x_1, x_2, \dots としたとき、これらをm個ずつ合計し平均をとった系列

$$x_i(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} x_j \quad (11)$$

の分散である $var(x(m))$ が

$$var(x(m)) = \sigma m^{-\beta} \quad (12)$$

となること。ただし、 $0 < \beta < 1$ であり、 σ は $m=1$ の場合の分散である。

(2) 1/fスペクトルをもつこと

観測される時系列がフラクタルであるかを検証したり、フラクタル時系列を特徴づけるパラメータであるフラクタル次元や分散を推定する方法としてウェーブレット変換が有効である。

フラクタル時系列は非定常時系列であるので、正確な意味ではスペクトルは存在しないが、平均的な形として、次の式により与えられる[12, 14]。

$$S(\omega) = \sigma^2 \omega^{-\gamma} \quad (13)$$

$$\gamma = 5 - 2D \quad (14)$$

ここで D 、 σ^2 は時系列のフラクタル次元と分散である。なお式(13)に示すようにスペクトル $S(\omega)$ は周波数 f (ここで $\omega = 2\pi f$)の逆数になっており、これを1/fスペクトルとよぶ。

フラクタル時系列のウェーブレット変換と分散、フラクタル次元との関係を求める。与えられた時系列 $x(t)$ をウェーブレット変換する。

$$x(t) = \sum_n \sum_m x_n^m \phi_n^m(t) \quad (15)$$

$$x_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_n^m(t) dt \quad (16)$$

$\phi_n^m(t)$ はウェーブレット基本関数 $\phi(t)$ に対する次のスケール、シフト変換とにより構成される。

$$\phi_n^m(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n) \quad (17)$$

ここで、 m, n は、スケール変換、シフト変換のイン

デックスである。 $\phi(t)$ としてはDaubechiesのウェーブレットを用いる[1]。この $\phi(t)$ の波形は、 $t=0$ で最大値をとり、両方向に振動しながら減衰する形であり、 m はこの基本波形を時間軸方向に伸縮させる役割を、 n は時間軸方向に移動させる役割をもつ。

$x(t)$ がフラクタル性をもつことから、ウェーブレット係数 x_n^m の満たすべき条件として、次の関係式が得られる[12, 14]。

$$var(x_n^m) = \sigma^2 2^{-\gamma m} \quad (18)$$

この関係式は、ウェーブレット基本関数の性質などを用いると証明できる。

この両辺の対数をとると、 m について線形の関係式が得られる。この直線との2乗平方誤差 R_w の大きさによりフラクタル性を判定できる。

$$R = \left[\sum_m (\log(var(x_n^m)) - c_0 - c_1 m)^2 \right]^{1/2} / (MX_r) \quad (19)$$

ただし、 c_0, c_1 は回帰直線を当てはめた場合の係数であり、 M は添字 m の取り得る個数、 X_r は観測期間における $\log(var(x_n^m))$ の最大値と最小値との差である。fBmに対して式の係数を計算し、式(19)に従ってプロットしてみると分かるように(ここでは省略する)、対数をとったグラフは極めて直線に近くなっている。

以下では、経済分野における現実的なフラクタル時系列として、株価がフラクタルであるかどうかを検証してみる。用いたデータは日本の株式市場における電子化された日々の株価であり、CD-ROMデータである東洋経済新報社、CD株価から入手しており、その内容は1983年から1993年までの東京証券取引所一部上場企業の株式取引における日々のデータ(始値、終値、高値、安値の4つ)が記録されている。解析では、この株価に対してウェーブレット変換した場合の係数の分散の指数を m の関数として示している。スペースの関係で結果の詳細は省略するが、全体的に R は0.02程度となっている。この広がり(R の分散)については極めて小さく、ほぼ、 $R=0$ とみなせ、また、銘柄による差は大きくない。これより株価が強いフラクタル性をもっていることが予想できる。

7. 株価予測の傾向

実際に観測された株価(終値)をフラクタル時系列としてモデル化し、ここで示す手法によりその将来の値を予測して、実際に観測された時系列との比較を行

う。

表3には、株価予測の nb 時刻先の子測誤差について、平均値と、いくつかの個別銘柄に対する結果を示している。予測誤差は期間内の最大振幅に対する誤差の割合（パーセント）としている。 $N=2000$ の場合を考察している。予測期間については、 nb 時刻先について、 $nb=28$ から $nb=140$ までをとり、この場合の子測誤差を示している。

なお、 b 時刻先の子測誤差についての結果は省略しているが、極めて小さく、平均して、振幅に対して 0.6%程度となっている。

これらの結果より分かるように、全体的に nb 時刻先の子測誤差については銘柄により差が大きく誤差が小さい場合には 0.3%程度であるが、大きい場合には 14%程度まで拡大している。この平均値は 4%ないし 6%程度である。これらは定常波に対する予測誤差より十分に小さい。

予測誤差が 84 時刻先の場合には 5%前後、140 時刻先の子測の場合には 7%前後となっており、実際に予測を用いて投資決定をするには大きな違いはないと考えられる。なお、140 時刻先の子測は、例えば 500 日間の観測された株価から 140 日先の株価を予測するものであり、その誤差が 7%程度であることは、この予測方式が有効であることを示している。通常行われるブラウン運動のモデル、あるいは線形予測では、このような精度は得られない。

8. 需要予測への応用

通信トラヒックのモデル化に関連して、最近、ON/OFF ソースを重ね合わせることにより、フラクタル時系列が生成できることが理論的に示され、LAN などのトラヒック解析に利用されている [5, 8]。ON/OFF ソースとは、ON 区間と OFF 区間が交互に現れるモデルであり、ON 区間では一定の間隔でパケット系列が発生している。

パケット系列は LAN などの通信においてはネット

表3 nb 時刻先の先測誤差 (%)

銘柄	$nb=28$	56	84	112	140
富士電機	4.0	4.7	4.3	5.4	6.2
日立工機	4.4	4.1	5.5	5.6	6.6
極洋	4.5	4.6	5.2	5.6	6.6
ラサ工業	5.9	4.6	6.7	6.2	7.0
平均	4.2	4.5	5.1	5.5	6.5

ワークを介して送信されるコンピュータデータであるが、製品需要の発生としてモデル化することも可能であろう。ON/OFF ソースの重ね合わせがフラクタルとなることの基本的な考え方は、統計的に独立である ON/OFF ソースを統計的に多重化するとガウシアン・ノイズとなり、これを一定の時間区間にわたって積分すると fBm になることを利用している [5, 8]。

以下では同様な考え方により、日々の需要データがガウシアン・ノイズとして近似でき、これを数日間にわたり集計することにより fBm となることを用いている。すなわち、それぞれの日に発生する需要はランダムであるが、これを、例えば、ある日を含めて 8 日前までを集計して時系列として表現すると、フラクタル性をもつことが示される [7]。この理由としては、日々の需要がランダムに（ガウシアン・ノイズとみなす）発生しており（ON/OFF ソースであると考える）、これを数日間にわたり累計することにより多重化され、fBm となると解釈される。

建材の種類を 60 種類とり、それぞれについて次のようなデータ集計を行い、ウェーブレット係数から計算した R_w の平均値を求めた。

(ケース 1) 日々のデータ

(ケース 2) 週単位の集計データ

(ケース 3) ある日を含めて 8 日前までを集計しその日の値とする

(ケース 4) ある日を含めて 15 日前までを集計しその日の値とする

需要を示す時系列データに対し、 m を横軸に $\log(\text{var}(x_m^n))$ を縦軸にとった場合の図に当てはめた回帰直線から得られる R を求めたのが表 4 である。

この表 4 より分かるように、ケース 3, 4 を除いては時系列にはフラクタル性が見られない。すなわち、日々の需要値は Gaussian であり、週単位の集計値も同様の性質を示すが、日々の需要を最低 8 日間累計してその日の値とした場合には、フラクタルとみなすことができる。なお、表 4 では平均値を示しているが、ほとんどの建材で、ケース 3, 4 について顕著なフラクタル性を示していることが分かる (R の分散は 0.013 であり極めて小さい)。この現象は、需要の時系列がフラクタルであることを示しており、予測を従来の線形予測により求めることができない理由を間接的に示している。

表4 建材需要の時系列の R

ケース	1	2	3	4
R	0.118	0.053	0.019	0.011

表5 建材需要の b 時刻先の予測誤差 ($a=2$)

	$T_1 = 200$	300	400
予測誤差	1.21	1.39	1.17

表6 建材需要の nb 時刻先の予測誤差 ($a=2$)

	$nb = 10$	20	30	40
予測誤差	5.7	6.9	7.2	15.6

9. フラクタル表面の推定への応用

ここでは、フラクタル時系列の予測手法をフラクタル表面 (3次元フラクタル信号) に拡張する方法を示す[3]。モデルとしては雲の分布の推定などがある。いま、一般的な線形入出力システム (線形推定式)

$$\bar{z}(x, y) = \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} h(x, x-\tau, y, y-\mu) \times z(\tau, \mu) d\tau d\mu \quad (20)$$

を考察する[3]。ここで、 x_0 と y_0 は $z(x, y)$ を推定する時に X 座標、 Y 座標のどの範囲まで用いるかを示すもので、 $0 < x_0 < x, 0 < y_0 < y$ の値をとる。インパルス応答関数 $h(x, \tau, y, \mu)$ の推定において、 $h(x, \tau, y, \mu)$ がスケール関数 $\phi(t)$ を用いて次のように展開されると仮定する。

$$h(x, \tau, y, \mu) = \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl} \phi_{N_i}(x) \phi_{N_j}(\tau) \times \phi_{N_k}(y) \phi_{N_l}(\mu) \quad (21)$$

ただし、

$$\phi_{N_i}(t) = 2^{-N/2} \phi(2^{-N}t - i) \quad (22)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

この場合には、インパルス応答関数の推定は係数 h_{ijkl} の推定と同等となる。

詳しい計算結果は省略するが、フラクタル表面の推定誤差は、表面の最大振幅に対して 0.5% 程度であり、極めて小さい。今後、雲の移動、集中豪雨予測などへ

の応用が考えられる。

参考文献

- [1] Daubechies. I. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", Commun. Pure Appl. Math, vol. 41, no. 7, pp. 909-996 (1988).
- [2] J. フェダー著 (松下真, 早川美穂, 佐藤信一訳): 『フラクタル』, 啓学出版.
- [3] 池田欽一, 時永祥三: "スケール伸長変換を用いたフラクタル表面の推定とその応用", 信学論(A), vol. J 81-A, no. 8, pp. 1127-11 (1997).
- [4] 池田欽一, 時永祥三: "フラクタル時系列の予測手法を用いた株価予測とその応用", 日本オペレーションズリサーチ学会論文誌, vol. 40, no. 1, pp. 18-31 (1999).
- [5] 小沢利久: "いろいろな入力過程モデル (講座-待ち行列研究の新しい潮流(4))", オペレーションズリサーチ, vol. 43, no. 12, pp. 680-686 (1998).
- [6] 高安秀樹: 『フラクタル』, 朝倉書店 (1986).
- [7] 竹林渉, 植村芳雄, 時永祥三: "フラクタル時系列の性質を用いた需要予測の一手法", 日本オペレーションズリサーチ学会誌, 2000年2月号, no. 2, pp. 51-59 (2000).
- [8] M. S. Taqqu, W. Willinger and R. Sherman: "Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling", Computer Communication Review 27, pp. 5-23 (1997).
- [9] 時永祥三: 『複雑系による経済モデル分析』, 九州大学出版会 (2000).
- [10] B. Mandelbrot: The fractal geometry of nature, Freeman, San Francisco (1982).
- [11] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: "時系列のフラクタル性を用いた予測手法とその応用", 信学論(A), vol. J 79-A, no. 11, pp. 1793-1800 (1996).
- [12] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: "スケール伸長変換およびウェーブレット変換によるパラメータ推定を用いた時系列予測", 信学論(A), vol. J 79-A, no. 12, pp. 2054-2062 (1996).
- [13] R. F. Voss: "The fractal dimension of percolation cluster hulls", J. Phys. A. Math. Gen., vol. 17, no. 1, pp. 373-377 (1984).
- [14] G. W. Wornell: "Wavelet-based representation for the 1/f family of fractal process", Proc. IEEE, vol. 81, no. 10, pp. 1428-1450 (1993).