

ダム湖の容量と流量の調節 —流量ベクトル法による取り扱い—

柳井 浩, 西村 友志

1. はじめに

河川の流量は季節によって変動し、下流における洪水や渇水の原因となる。過剰な流量を貯え、不足時に放流して、流量を平準化するためにダム湖(貯水池)が設けられるが、その容量によって、流量の平準化にも限度がある。また一方、発電、灌漑、水上交通等、多種の水利用には、望ましい流量が、時期に応じて変化する。そこで流量の変化に対して、ある一定の容量のダム湖にどのように水を貯え、どのように放流すれば、どの程度の効果が上がるのか問題になる。[1]~[5]

一方、ガンジス河の支流マハカリ河など、山地の河川にダムを築く計画が検討されている[6]。ダムの建設に先立って、候補地の選択が必要になる。しかし、地形、ハイドログラフ等のデータも、大まかにしか分からない場合も多い。問題の構造を単純な形で明確化し、全体の傾向を大きく掴んで、見積もりを与える方法がなければ、自然の大きさに対処することはできない[7]。本研究の主目的は、そのような視点から候補地の評価を支援する方法の提供である。

2. 流量とその図示

河川の流量変化は自然の現象で年々変化するのが普通であるが、それでも、年々おおよそ一定のパターンに従った変化が見られるので、この基本的なパターンに対する策を講じよう。

いま、ある河川の流量は、毎年同じように繰り返される階段関数で、図1の上部に示されるようなハイドログラフで与えられるものとする。

$$f(t) : \text{時刻 } t \text{ における流量} \quad (1)$$

$$F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi : \text{時刻 } t \text{ までの累積流量} \quad (2)$$

やない ひろし

慶應義塾大学理工学部

〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1

にしむら ともゆき

石川島播磨重工業

〒135-8322 東京都江東区毛利1-19-10, IHI 江東事務所

受付 01.5.28 採択 01.9.7

図1の下部に $F(t)$ を図示した。これを累積チャートという。また、

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 f_1 \\ \vdots \\ \tau_n f_n \end{pmatrix} : \text{流量ベクトル} \quad (3)$$

というベクトルを定義するが、これは各期の総流量を一年分並べたものである。

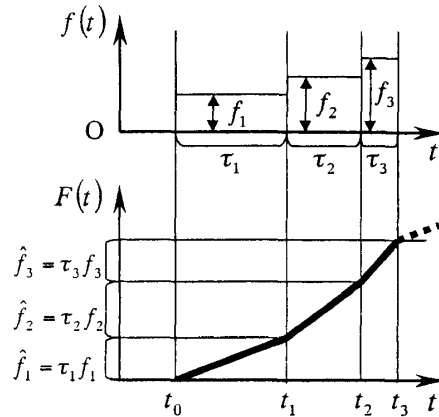


図1: 河川の流量の変化と累積流量

例2.1 マハカリ川のハイドログラフ

図2には、ガンジス川の支流マハカリ川のパンチェスワールにおける月平均水量のハイドログラフが示されており、これから算出した2年分の累積流量のグラフが図3である。さらに、図3の累積グラフには1年を3期に分けて折れ線を近似したものが重ねて画かれている。これを見ても、 $n = 3$ で充分な近似が得られることが分かるだろう。すなわち、

$$\hat{f}_1 = 131.5 \text{ (億 } m^3 \text{)} : \text{ 6月} \sim \text{ 9月末} \quad (4)$$

$$\hat{f}_2 = 21.5 \text{ (億 } m^3 \text{)} : \text{ 10月} \sim \text{ 11月末} \quad (5)$$

$$\hat{f}_3 = 31.6 \text{ (億 } m^3 \text{)} : \text{ 12月} \sim \text{ 5月末} \quad (6)$$

としておけばよい。

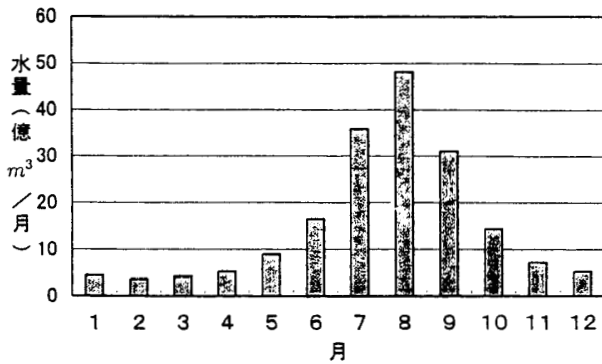


図2: 月平均水量-ハイドログラフ

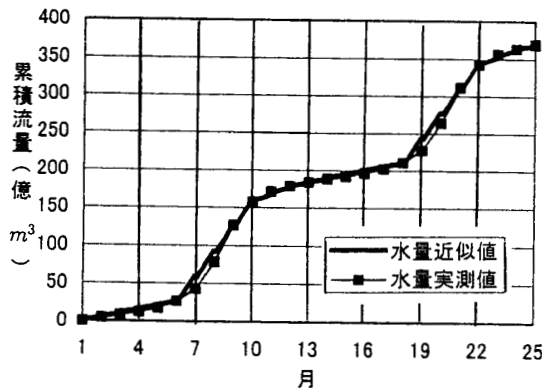


図3: 累積流量 (2年分)

3 ダム湖による流出量の制御

いま、この河川に容量 C のダム湖を設け、時刻 $t = 0$ から流出量の制御をすることを考える。上流からの水をすべてこのダム湖に導けば、前節で述べた流量が、このダム湖への流入量ということになる。

一方、流出量は流入量と同期して毎年同じように繰り返されるものとする。

$$g(t) : \text{時刻 } t \text{ における流出量} \quad (7)$$

$$G(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi : \text{時刻 } t \text{ までの累積流出量} \quad (8)$$

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \vdots \\ \hat{g}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 g_1 \\ \vdots \\ \tau_n g_n \end{pmatrix} : \text{流出量ベクトル} \quad (9)$$

このとき、年間流入量および年間流出量は、それぞれ、

$$F_Y = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \cdots + \hat{f}_n : \text{年間流入量} \quad (10)$$

$$G_Y = \hat{g}_1 + \hat{g}_2 + \cdots + \hat{g}_n : \text{年間流出量} \quad (11)$$

であるが、長年にわたる収支を考えれば、これらは互いに等しくなければならない。

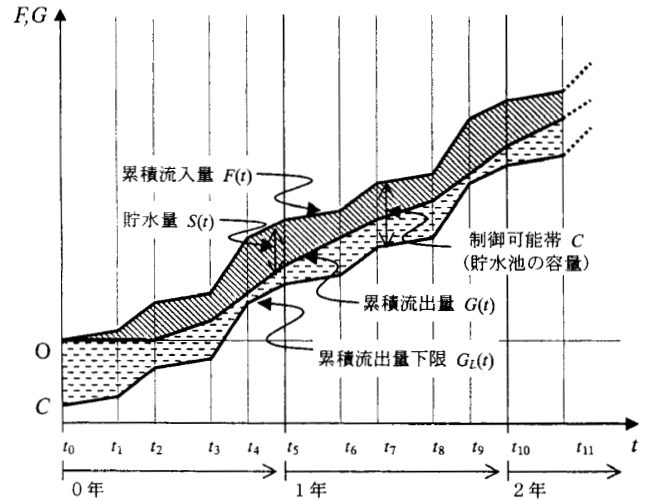


図4: ダム湖への流入量と流出量の関係 ($n = 5$)

$$F_Y = G_Y \quad (12)$$

このような条件のもとで、ダム湖をめぐる流量の制御の問題を流入流出量ベクトルによって取り扱う方法を流量ベクトル法とよぶ。

4. 制御の可能性

ところで、図4からもわかるように、容量 C のダム湖が溢水もしくは枯渇しないためには、

$$F(t) \geq G(t) \geq F(t) - C \quad (13)$$

が常に成立していなければならない。ここに、(13)式の右辺を

$$G_L(t) = F(t) - C : \text{累積流出量下限} \quad (14)$$

とよぶことにする。

いいかえれば、ダム湖の容量が C であるとき、流出量の制御が可能なのは、累積流出量 $G(t)$ が、累積流出量下限 $G_L(t)$ と累積流入量 $F(t)$ の曲線にはさまれる“帯”(図4参照)の範囲である。この帯を制御可能帯とよぶことにしよう。

これを各期の流入・流出量に翻訳してみよう。数学的に言えば、

$$\max_{i,j} \{ \hat{F}_i^j - \hat{G}_i^j \} \leq C \quad (15)$$

という条件を満たす範囲の流出が可能である。(証明略)ここに、

$$\hat{F}_i^j = \sum_{k=i}^j \hat{f}_k, \quad \hat{G}_i^j = \sum_{k=i}^j \hat{g}_k \quad (16)$$

すなわち、 \hat{F}_i^j, \hat{G}_i^j は、第 i 期から第 j 期までにわたる流入量および流出量である。

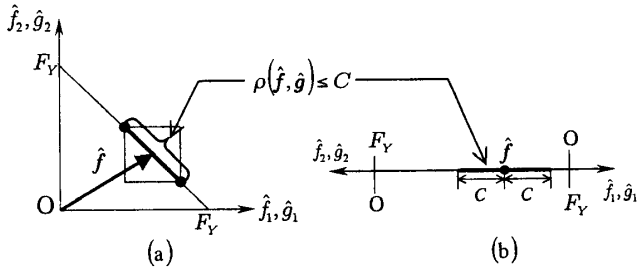


図 5: 実現しうる流出量ベクトル \hat{g} の等高線 ($n = 2$)

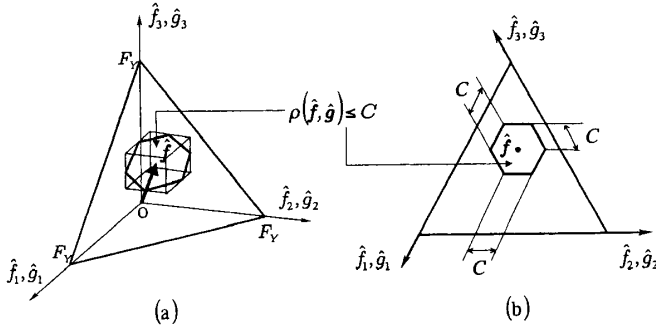


図 6: 実現しうる流出量ベクトル \hat{g} の範囲 ($n = 3$)

$n \geq 4$, すなわち, 1年を4期以上に分割する場合には, (15)式をそのまま用いるしかないが, $n = 2, 3$ のときには, (15)式の左辺が, $\hat{f} - \hat{g}$ のチェビシェフ・ノルムに帰着するので, (15)式は

$$\rho(\hat{f}, \hat{g}) = \max_i (|\hat{f}_i - \hat{g}_i|) \leq C \quad (17)$$

となることが, 詳しい計算から分かる(計算略).

$n = 2, 3$ の場合には, また, この議論を図5,6のように図解できる. すなわち, 年間流入量 F_Y と年間流出量 G_Y は等しいから, ベクトル \hat{f}, \hat{g} の終点が動く範囲は, 成分の和が一定の直線や平面の第1象限部分である. 特に, $n = 3$ の場合には, 三角図表をもちいると便利である.

また, ダム湖の容量 C , および, 流入量ベクトル \hat{f} が与えられれば, 流出量ベクトル \hat{g} の実現可能な範囲が定まるが, その $n = 2, 3$ の場合の具体的な形は, 図5,6に示されているように, \hat{f} を中心とする $\pm C$ の線分, あるいは, 一辺の長さが三角図表の目盛りで C の正六角形になる. これを, 制約区間あるいは制約六角形とよぶ.

例題4.1 パンチェスワール多目的ダムの容量

例2.1でとりあげたマハカリ河のパンチェスワールに多目的ダムを建設する場合について, 流出量を与えられた範囲に調節するための, 最低限必要なダム湖の容量を調べてみよう. ここでも例2.1と同様, 1年を3期に分けて考えることにすれば, 流入量ベクトル \hat{f} は, 各期の総流量を成分

とするベクトル

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} 131.5 \\ 21.5 \\ 31.6 \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる.

いま, すべての月における平均流量 g を

$$5(\text{億} m^3/\text{月}) \leq g \leq 25(\text{億} m^3/\text{月}) \quad (19)$$

という範囲に調節することが希望されているものとして, これを各期の流出量に直せば,

$$20 \leq \hat{g}_1 \leq 100 \quad (20)$$

$$10 \leq \hat{g}_2 \leq 50 \quad (21)$$

$$30 \leq \hat{g}_3 \leq 150 \quad (22)$$

となる. これらの共通部分が, 希望する流出量ベクトルの終点の範囲である. これを調節希望領域と呼ぶことにしよう. 図7に \hat{f} とこの領域を示すが, これを見れば分かるように, 求める最小のダム湖は, 調節希望領域と容量制約六角形がかろうじて共通部分をもつようなものになる. 図7には, そのような容量制約六角形を描いてみた. このダム湖の容量は, $31.5 \text{億} m^3$ で, 年間総流量の17%にあたる. この容量のダム湖があれば, 調節希望領域の中での流量の調節が可能になる.

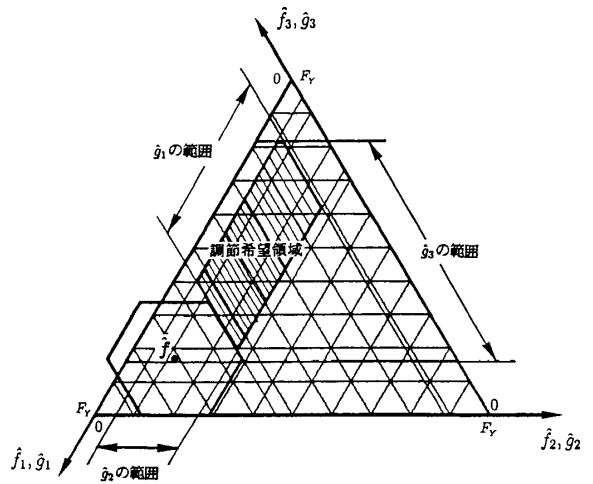


図 7: パンチェスワール多目的ダムの三角図表

例題4.2 土砂堆積による貯水池機能の低下と貯水池の寿命

上流から水とともに流れてきた土砂が堆積すれば, 貯水池の実質的な容量が減る. 流量調節が目的のダムならば, その機能が低下する.

三角図表上でいえば, 容量制約六角形が縮小され, 可能な流出量の範囲が狭くなり, 容量に余裕がなければ, 所期の流出量を実現することが出来なくなってしまう.

治水目的の貯水池は、容量制約六角形が縮小し、その機能を失うまでの期間が寿命と考えられる。

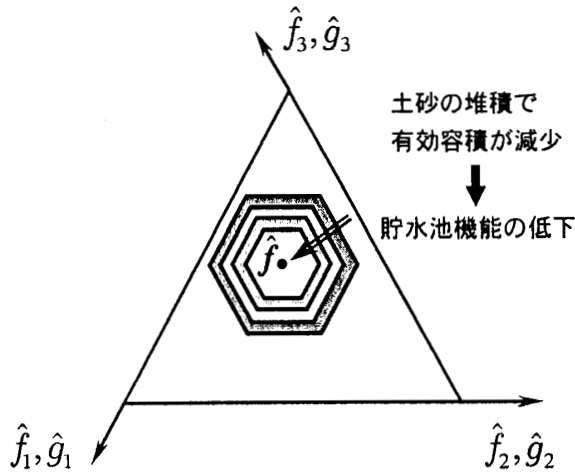


図 8: 土砂堆積による貯水池機能の低下

例えば、例 4.1 において、必要最小容量は 31.5 億 m^3 と計算されたが、いま仮に、それを上回る 50 億 m^3 の貯水池を建設したとする。そのとき、年間 1.2 億 m^3 の土砂が堆積すれば、このダム寿命は、

$$\frac{50 - 31.5}{1.2} = 15.41 \text{ (年)} \quad (23)$$

と計算される。

5. 流量ベクトル法による各種問題の取り扱い

さて、流量ベクトル法によるダムの容量、制御などをめぐる問題の取り扱いをいくつかの例題を通じて示すことにしよう。

例 5.1 合流河川の流量調節 2つの河川 L, M が合流して河川 N となる。このとき、上流の河川 L および M に、容量が C^L および C^M のダム湖を設け、河川 N の流量を調節する問題を考える。

河川 L, M の流入量を \hat{f}^L, \hat{f}^M とすれば、上流にダムがなければ、河川 N に流れ込む流入量は、

$$\hat{f}^N = \hat{f}^L + \hat{f}^M \quad \text{河川 } N \text{ の流入量ベクトル} \quad (24)$$

となるが、上流のダムによって、河川 L, M の流出量が \hat{g}^L, \hat{g}^M に調整されたとすれば、河川 N への流出量は、

$$\hat{g}^N = \hat{g}^L + \hat{g}^M \quad \text{河川 } N \text{ の流出量ベクトル} \quad (25)$$

となり、これが調節の対象となる。

三角不等式からただちに導かれるように、

$$\begin{aligned} \rho(\hat{f}^N, \hat{g}^N) &= \rho(\hat{f}^L + \hat{f}^M, \hat{g}^L + \hat{g}^M) \\ &\leq \rho(\hat{f}^L, \hat{g}^L) + \rho(\hat{f}^M, \hat{g}^M) \end{aligned} \quad (26)$$

であるから、

$$\rho(\hat{f}^N, \hat{g}^N) \leq C^L + C^M \quad (27)$$

すなわち、これが河川 N の流量を調節することができる範囲である。この式からすれば、河川 N の調節可能な範囲は、河川 L および M の合流後、容量 $C^L + C^M$ のダム湖が設けられた場合と同等である。

例 5.2 放流による利益とその最大化 ダムの放流する水が、その期に応じて単位量当たり、

$$\text{水の価格} : p_1, p_2, p_3 \quad (28)$$

で“売れる”ものとしよう。各期の流出量を

$$\text{流出量} : \hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3 \quad (29)$$

とすれば、年間の売上は、

$$P = p_1 \hat{g}_1 + p_2 \hat{g}_2 + p_3 \hat{g}_3 \quad (30)$$

となる。そこで、これを

$$\begin{aligned} \text{年間流出量} : G_Y &= \hat{g}_1 + \hat{g}_2 + \hat{g}_3 \\ \hat{g}_1 \geq 0, \hat{g}_2 \geq 0, \hat{g}_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{ダム湖の容量} : C \quad (32)$$

という条件の下で最大にする問題を考えよう。すなわち、

$$\text{価格ベクトル} : p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\text{流出量ベクトル} : \hat{g} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

とすれば、

$$P = p^T \hat{g} = \max! \quad (35)$$

制約条件

$$\hat{g}^T n = \sqrt{3} G_Y \quad (36)$$

$$\rho(\hat{f}, \hat{g}) \leq C \quad (37)$$

という問題になる。ここに、

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

は三角図表を載せている平面的な法線ベクトルである。

これは、 P を目的関数とする、3変数 $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3$ に関する線形計画問題であり、許容領域は(36)式によって与えられる三角図表上の(36)および(37)式によって与えられる容量制約六角形である。したがって、最適解は、この正六角形上の頂点の一つに存在するが、そのいずれになるのかは目的関数 P の係数 p_1, p_2, p_3 の大小関係によって次のように定ま

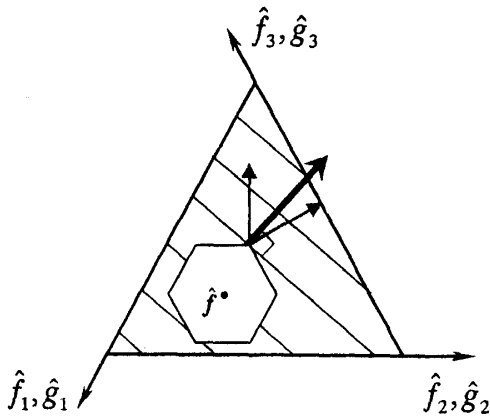


図 9: 容量制約六角形の頂点と目的関数増加の方向

る(計算略).

- $p_1 \leq p_2 \leq p_3$: $V_1(\hat{g}_1 = \hat{f}_1 - C, \hat{g}_2 = \hat{f}_2, \hat{g}_3 = \hat{f}_3 + C)$
- $p_1 \leq p_3 \leq p_2$: $V_2(\hat{g}_1 = \hat{f}_1 - C, \hat{g}_2 = \hat{f}_2 + C, \hat{g}_3 = \hat{f}_3)$
- $p_3 \leq p_1 \leq p_2$: $V_3(\hat{g}_1 = \hat{f}_1, \hat{g}_2 = \hat{f}_2 + C, \hat{g}_3 = \hat{f}_3 - C)$
- $p_3 \leq p_2 \leq p_1$: $V_4(\hat{g}_1 = \hat{f}_1 + C, \hat{g}_2 = \hat{f}_2, \hat{g}_3 = \hat{f}_3 - C)$
- $p_2 \leq p_3 \leq p_1$: $V_5(\hat{g}_1 = \hat{f}_1 + C, \hat{g}_2 = \hat{f}_2 - C, \hat{g}_3 = \hat{f}_3)$
- $p_2 \leq p_1 \leq p_3$: $V_6(\hat{g}_1 = \hat{f}_1, \hat{g}_2 = \hat{f}_2 - C, \hat{g}_3 = \hat{f}_3 + C)$

これらは、次のようにまとめることができる。すなわち、目的関数の係数のうち値が最も大きいものに対応する変数を取り上げ、容量制約六角形でこの値が最大になる辺に注目する。さらに、係数のうちで値が次に大きいものに注目して、辺上でその値が最大になる頂点を求めれば、これが売上を最大にする流出量を示している。

例題 5.3 流量ピークの平準化

毎年ある一定の期間に大きな増水が見込まれ、これが洪水の原因となる場合には、それに先立つ期における貯水量を極力減らし、増水期には水をたくわえ、下流への流量の平準化をすることが求められる。すなわち、高々2~3期にわたる水量調節の問題である。これを考えよう。

増水期を第*i*期として、第*i*および*i+1*期の流量をハイドログラフに画いたのが図10である。

ここで、ダム湖に水を導くことによって、流量がピークになる第1期における下流の流量 \hat{g}_i をできるだけ小さくしたい。そこで、流量を次のようなベクトル

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \hat{f}_i \\ \hat{f}_{i+1} \end{bmatrix} : \text{流入量ベクトル} \quad (39)$$

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} \hat{g}_i \\ \hat{g}_{i+1} \end{bmatrix} : \text{流出量ベクトル} \quad (40)$$

で表すことにし、これらを第*i*および*i+1*期の流量を軸とする直交座標平面に描くことにする。(図11)

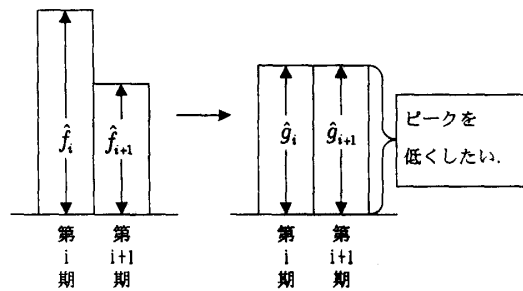


図 10: 増水期のハイドログラフ

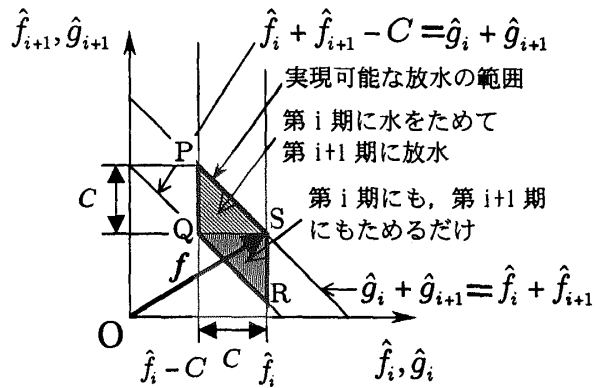


図 11: ハイドログラフのベクトル表示
ダム湖の機能 (2期の場合)

いま、第*i-1*期までに水が極力放流され、ダム湖が空になっているものとしよう。すなわち、第*i*期の期首においては、ダム湖の容量*C*が第*i*期以降の水量調節のために準備されているものとする。

したがって、第*i*期においては、流入量中*C*までの水をダム湖に導くことができるから、流出量 \hat{g}_i は、

$$\hat{f}_i - C \leq \hat{g}_i \leq \hat{f}_i \quad (41)$$

にすることができる。

同様に、第*i*および*i+1*期にわたる流出量 $\hat{g}_i + \hat{g}_{i+1}$ についても

$$\hat{f}_i + \hat{f}_{i+1} - C \leq \hat{g}_i + \hat{g}_{i+1} \leq \hat{f}_i + \hat{f}_{i+1} \quad (42)$$

が成立しなければならない。

(41),(42)式で与えられる範囲は図11にも示されているように、PQRSによって囲まれる平行四辺形である。これが、流出量 \hat{g}_i, \hat{g}_{i+1} を調節できる範囲である。

次に、増水期を第*i*期として、第*i*, *i+1*および*i+2*期の3期にわたる場合について考えよう。この場合について

も、流量を次のベクトル

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \hat{f}_i \\ \hat{f}_{i+1} \\ \hat{f}_{i+2} \end{bmatrix} : \text{流入量ベクトル} \quad (43)$$

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} \hat{g}_i \\ \hat{g}_{i+1} \\ \hat{g}_{i+2} \end{bmatrix} : \text{流出量ベクトル} \quad (44)$$

で表すことにし、これらを第*i*, *i*+1および*i*+2期の流量を軸とする3次元空間に描くことにしよう。(図12)

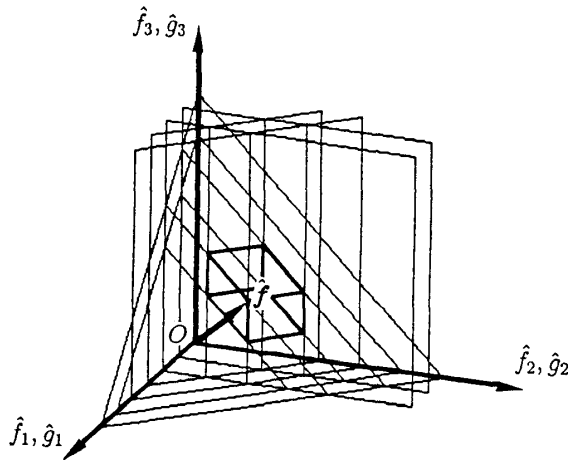


図 12: ハイドログラフのベクトル表示とダム湖の機能 (3期の場合)

この場合の流出量 \hat{g} の範囲は、(41),(42)式で与えられた条件に加え、第*i*, *i*+1および*i*+2期にわたる流出量 $\hat{g}_i + \hat{g}_{i+1} + \hat{g}_{i+2}$ に関する条件

$$\begin{aligned} \hat{f}_i + \hat{f}_{i+1} + \hat{f}_{i+2} - C \\ \leq \hat{g}_i + \hat{g}_{i+1} + \hat{g}_{i+2} \\ \leq \hat{f}_i + \hat{f}_{i+1} + \hat{f}_{i+2} \end{aligned} \quad (45)$$

を満たさなければならない。

したがって、この範囲は図12に示されるような平行6面体になる。

6. おわりに

本研究では、ハイドログラフを階段関数で近似しベクトルとしてまとめて考える“流量ベクトル法”を展開してきた。紙幅の関係で割愛したが、さらに、年間流入量の変化などについても、多少の修正をほどこせば、この方法の適用が可能である[8]。このようないくつかの例題から分かるように、実際の計画問題に対しても、十分な支援を与えると考えている。

本研究は日本オペレーションズ・リサーチ学会と日本グローバル・インフラストラクチャー研究財団との協同研究部会「インフラストラクチャー問題」の活動の一環として行われたものである。この研究会のメンバーの方々からは、

多くの貴重な助言をいただいた。ここに感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] 多々納 裕一, 岡田 憲夫, 河合 一「残留域流出量を考慮した利水用貯留システムの信頼性評価モデル」土木計画学研究・論文集No.7, 1989年12月, pp.99-106
- [2] 多々納 裕一, 岡田 憲夫, 河合 一「渇水の継続期間を明示的に組み込んだ貯水池運用計画モデル」土木計画学研究・論文集No.9, 1991年11月, pp.173-180
- [3] 多々納 裕一「貯水池システムの統合操作ルール設計のための分権的アルゴリズムの開発」土木計画学研究・論文集No.15, 1998年9月, pp.31-40
- [4] Otto J. Helweg and Thanakorn Uan-On "Nonlinear Reservoir Analysis with Risk-Benefit Objectives" Water International 13,1988,pp.80-84
- [5] Abdulmohsin Alshaikh and Saud Taher "Optimal Design of Irrigation Canal Network Under Uncertainty Using Response Surface Method" Water International 20,1995,pp.155-162
- [6] 建設省・(財)日本グローバル・インフラストラクチャー研究財団平成10年度報告書,「東ヒマラヤ水系河川管理基礎調査」,平成11年3月
- [7] 伊藤 弦, 柳井 浩「ダム建設の最適位置と最適容量」オペレーションズ・リサーチ, 1996年4月号, pp.228-235
- [8] 柳井 浩, 西村 友志「貯水池の容量と流量の調節—流量ベクトル法による取り扱い—」Technical Report No.00-001, 慶應義塾理工学部管理工学科, 17.V.2000