

相互評価の下での可能性定理

小原 朱理

(筑波大学大学院社会工学研究科システム情報数理専攻 現所属・日本アイ・ピー・エム(株))

指導教官 山本芳嗣 教授

1. はじめに

アローはその可能性定理で、社会の意思決定に「民主的」な方法が存在しないことを証明した。本研究では、アローの枠組みを相互評価に置き換え、民主的な社会的決定法の非存在を導いた。

アローの定理の設定では投票者全体が選択肢全体に対して選好順序を表明するのに対し、相互評価では投票者が自分自身を除いた他の投票者に対して選好順序を表明する点が両者の間の顕著な相違点である。

以下、アローの定理とその変形の幾つかを紹介し、それと対比させながら本研究の枠組みと結果を示す。

2. アローの可能性定理

2.1 個人の選好順序付けの方法と記号

投票者をプレーヤーと呼ぶ。プレーヤーの全体集合を $|N|$ とし、 $|N| \geq 2$ 、選択肢の個数は3つ以上とする。また、 $<$ 、 $>$ 、 \simeq で選好順序を表す。 $x > y$ は選択肢 x は選択肢 y よりも好ましい、 $x \simeq y$ は x と y は同程度に好ましいことを表す。 $x \geq y$ は $x > y$ または $x \simeq y$ であることとする。全プレーヤーの選好順序の組合わせをシチュエーションと呼ぶ。プレーヤー i がシチュエーション a において、 $x > y$ という選好を表明していることを $x >_{ia}y$ または $y <_{ia}x$ と表記し、 a において社会的選好順序が $x > y$ となることを $x >_{sa}y$ または $y <_{sa}x$ と表記する。 $<$ 、 \simeq についても同様とする。

2.2 一般可能性定理

まず、決定方式が満たすべき民主主義の公理系と一般可能性定理を紹介する。

公理1 (弱順序性) 各プレーヤーの選択肢に対する選好順序は弱順序である。また、結果として導かれる社会的選好順序も弱順序である。

公理2 (個人の選好の無制約性) 全てのプレーヤーは全ての選択肢に対して、弱順序である限りどのような選好順序を表明することも許される。

公理3 (無関係対象からの独立性) 全ての選択肢

x と y について、選択肢対 (x, y) に関する社会的選好順序は各プレーヤーの表明する (x, y) に関する選好順序のみによって決定される。

公理4 (パレート最適性) 選択肢対 (x, y) に対し $(\forall i)(x >_{ia}y)$ ならば $x >_{sa}y$ となる。

公理5 (非独裁性) 独裁者が存在してはならない。アローの可能性定理は以上の公理を満たす社会的決定方式が存在しないことを主張している。

定理1 (アローの可能性定理) 公理1, 2, 3, 4, 5の全てを満足する社会的決定方式は存在しない。

3. 可能性定理の関連研究

次にアローの公理以外の公理とそれらの組合せによって導かれる結果の一例を紹介する。

公理6 (社会的評価と個人的評価の非負の関連性) 選択肢 x, y がシチュエーション a で $x >_{sa}y$ となっているときシチュエーション b が任意の i と任意の $x', y \in N \setminus \{x\}$ に対して $((x \geq_{ia}y \Rightarrow x \geq_{ib}y) \wedge (x >_{ia}y \Rightarrow x >_{ib}y) \wedge (x' \geq_{ia}y \Leftrightarrow x' \geq_{ib}y))$ を満たすならばシチュエーション b では $x >_{sb}y$ となる。

公理7 (市民主権性) あらゆるシチュエーション a で常に $x \geq_{sa}y$ となる選択肢対 (x, y) は存在しない。

定理2 公理1, 2, 3, 5, 6, 7を満足する社会的決定方式は存在しない。

公理8 (非抑圧性) 常に $(\forall a)((x >_{ia}y) \Rightarrow (y >_{sa}x))$ となるプレーヤー i は存在しない。

公理9 (非安定性) $(\forall a)(x >_{sa}y)$, $(\forall a)(x \simeq_{sa}y)$, $(\forall a)(x <_{sa}y)$ のどの条件についてもそれを満たす選択肢対 (x, y) は存在しない。

定理3 (ハンソンの可能性定理1) 公理1, 2, 3, 5, 8, 9の全てを満足する決定方式は存在しない。

4. 相互評価における可能性定理

4.1 相互評価のルールと記号

ここでは選択肢をプレーヤー自身とする相互評価の下で同様の公理の組合せから導かれる結果を調べる。

各プレイヤーは自分以外のプレイヤー全員を評価の対象とすることにする。上に従い、全プレイヤーによる自分自身を除いたプレイヤー対の全体に対する選好順序の組合せをシチュエーションと呼ぶ。

そして、アローの公理に基づいて、相互評価における公理を以下のように設定する。

公理 10 (相互評価における弱順序性) 各プレイヤーの自分自身を除く全プレイヤーに対する選好順序は弱順序であり、社会的選好順序も弱順序である。

公理 11 (相互評価における個人の選好の無制約性) 全てのプレイヤーは弱順序性 (公理 10) を満たしている限り、自分自身を除く全てのプレイヤーに対してどのような選好順序を表明することも許される。

公理 12 (相互評価における無関係対象からの独立性) 全てのプレイヤー対 (k, l) について、 (k, l) に関する社会的選好順序は k と l 以外のプレイヤーの表明する k と l に関する選好順序のみによって決定される。

公理 13 (相互評価におけるパレート最適性) 選択肢対 (k, l) に対して $(\forall i \in N \setminus \{k, l\})(k >_{ial})$ ならば $k >_{sal}$ となる。

ところが、これらの公理から以下の定理が導かれる。

定理 4 公理 10, 11, 12, 13 を満足する社会決定方式は存在しない。

従って別の公理系を考える必要がある。

公理 14 (相互評価における非負の関連性) 選択肢 i, j がシチュエーション a で $i >_{saj}$ となっているときシチュエーション b が任意の k と任意の $i' \in N \setminus \{k\}$ に対して $((i \geq_{kaj} \Rightarrow i \geq_{kbj}) \wedge (i >_{kaj} \Rightarrow i >_{kbj}) \wedge (i' \geq_{kaj} \Leftrightarrow i' \geq_{kbj}))$ を満たすならば $i >_{sbj}$ である。

公理 15 (相互評価における市民権性) どのようなシチュエーション a でも常に $i \geq_{saj}$ となる選択肢対 (i, j) は存在しない。

しかし、公理 14, 15 を導入しても以下の結果となった。

定理 5 公理 10, 11, 12, 14, 15 を満足する社会決定方式は存在しない。

次に、パレート最適性に関して $k >_{sal}$ を $k \geq_{sal}$ と緩め、以下のように設定し直してみる。

公理 16 (相互評価におけるパレート最適性) 選択肢対 (k, l) に対して $(\forall i \in N \setminus \{k, l\})(k >_{ial})$ ならば $k \geq_{sal}$ となる。

ところが、このパレート最適性 (公理 16) の設定では以下の様な事態が起こることが示せた。

表 1 公理系と社会的決定方式

公理	10	11	12	13	14	15	17	16	決定方式	
	✓	✓	✓	✓					非存在	
	✓	✓	✓		✓	✓			非存在	
	✓	✓	✓					✓	全て無差別	
	✓	✓	✓				✓		非存在	
公理	1	2	3	4	5	6	7	9	8	決定方式
	✓	✓	✓	✓	✓					非存在
	✓	✓	✓		✓	✓	✓			非存在
	✓	✓	✓		✓			✓	✓	非存在

定理 6 (社会的選好順序の無差別性) 社会的決定方式が公理 10, 11, 12, 16 を満たすならば $(\forall a)(\forall (k, l))(k \simeq_{sal})$ となる。つまり、必ず全ての選択肢を無差別とする社会的決定が導かれる。

この結果も意味のある社会的決定の存在を否定している。次に、パレート最適性 (公理 16) の代わりに以下の非安定性を導入する。

公理 17 (相互評価における非安定性) $(\forall a)(k >_{sal}), (\forall a)(k \simeq_{sal}), (\forall a)(k <_{sal})$ のどの条件についてもそれを満たすプレイヤー対 (k, l) は存在しない。

その結果やはり肯定的でない次の定理を得た。

定理 7 公理 10, 11, 12, 17 を満足する社会的決定方式は存在しない。

5. 結論

以上の結果を表 1 にまとめた。相互評価 (表 1 上部) においてはそうでない場合 (表 1 下部) よりも少ない公理の組み合わせから矛盾や好ましくない結果が導かれている。これは、相互評価では民主的な決定方式がより存在し難いことを示唆している。

参考文献

- [1] Arrow, K. J.: *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1963.
- [2] Hansson, B.: "Group Preferences", *Econometrica*, Vol. 37, 1969, 50-54.
- [3] Hansson, B.: "The Independence Condition in the Theory of Social Choice", *Theory and Decision*, Vol. 4, 1973, 25-49.
- [4] ケネス J. アロー (長名寛明 訳): 「社会的選択と個人的評価」, 日本経済新聞社, 1977.
- [5] 今野浩: 「数理決定法入門 キャンパスの OR」, 朝倉書店, 1992.
- [6] 佐伯胖: 「「きめ方」の論理」, 東京大学出版会, 1980.
- [7] 松井知己: "Arrow の一般可能性定理の証明の解説", *オペレーションズ・リサーチ*, Vol. 46, No. 2, 2001, 93-97.