

第4回 カオスと経済動学—理論と応用

時永 祥三

1. はじめに

カオス理論では、一見不規則と思われる現象が方程式により記述されることを基本としており、予測や推定に好都合となっている。経済モデル分析においても、不均衡の動学モデルの定式化に利用されている。

カオスはもともと予期しない変動に属するものであり、工学分野においても除去すべき対象として見なされ、経済動学においても、不安定な周期変動から安定的な挙動へと移行するための入力やシステムの変更について議論がなされている。以下では、次のようなことについて述べる[12]。

- (1) 経済動学モデルとカオス
- (2) カオス性の検証
- (3) カオス時系列の予測
- (4) 遺伝的プログラミングによるカオス近似
- (5) カオス制御 (OGY法とGP法)

2. 経済動学モデルとカオス

経済時系列に代表される経済データは、これまで確率過程のモデルにより解析が行われているが、カオス理論は決定論的な方程式により発生されると仮定することが異なる。この確認の方法としてはいくつか存在するが、基本的にはアトラクタの形状をもとにした方法であると言える。アトラクタは時刻 t と $t+1$ における変数 (関数) 値を2次元の横軸と縦軸にとって描いたもの (軌跡) であり、このアトラクタの形状がはっきりと見えるのがカオスの特徴である。

例えば、よく知られているカオス発生モデルとして、次を考える。

$$y(t+1) = ay(t)[1-y(t)] \quad (1)$$

ここで、 a はカオスになる領域を制御するパラメータであり、約 4.0 の値とする。このモデルの経済学的な

解釈としては、変数 $y(t)$ を広告宣伝費用とした場合、今期 t における売上 $R(t)$ は宣伝費用に比例するが、反面、これを増やしすぎると減少に転じるので、 $R(t) = ay(t)[1-y(t)]$ となる。この利益に比例して来期の宣伝をするので、式(1)で来期の宣伝費用を決めている。これをロジスティック・マップ (Logistic map) とよんでいる。図1にはロジスティック・マップにより生成した時系列の例を示している。

カオスのもう1つの大きな特徴は、初期値への依存性である。式(1)に示した方程式において、変数 $y(t)$ の最初の値 (初期値) がわずかに異なる2つのケース (例えば、1.0000 と 1.0005) を考えた場合に、時間の経過とともに、これら2つのケースでの変数 $y(t)$ の値 (挙動) は大きくずれてしまうことが理論的に証明できる。カオスの発生は決定論的な方程式によりなされるが、その微妙な変化が大きな差異をもたらすという意味で、従来の確率過程に基づく不規則変動とは異なる側面を与えている。

1990年ごろから経済学においても積極的にカオス理論を適用する試みがなされており、従来とは異なる新しい結果や解釈を生んでいる。

(1) 経済時系列のモデル化

時系列をカオスによりモデル化することが可能なら、確率過程の理論ではなく確定的な式で時系列の予測が

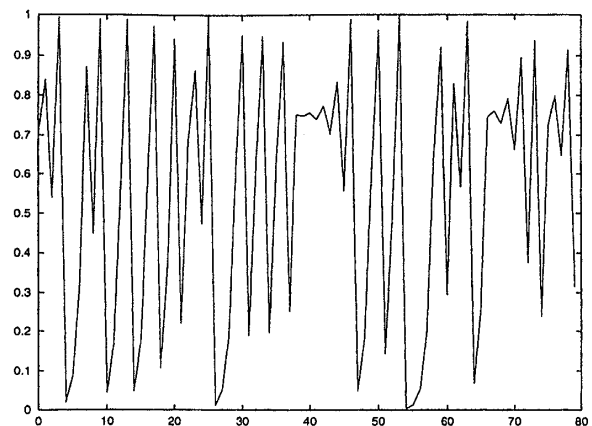


図1 ロジスティック・マップによる時系列生成

ときなが しょうぞう

九州大学 大学院経済学研究院経済工学部門
〒812-8581 福岡市東区箱崎6-19-1

可能となることが期待される。経済分野に限定すれば、その範囲は為替レート変動、株価、TBなど債券価格などから各国のGDPの成長率まで及んでいる。これらの研究の多くが、アトラクタの描画、相関次元の計算、リアプノフ指数の計算により、時系列がカオスであるかどうかを判断するものである[3, 13].

(2) 不均衡経済モデル

現在まで、マクロ経済学を中心として経済の諸要素のバランスを前提とした、いわゆる均衡モデルが展開されてきている。これは、例えば、予算制約のもとで便益を最大化するような条件と、その場合の解をもとめる方法であり、経済の均衡を解明する問題である。しかし、現実には証券市場や資本市場における激しい変動、あるいは、そのような変動を積極的に利用する投資など、不均衡経済モデルを前提とした政策や行動が見られる。したがって、経済が変動することを前提とした不均衡モデルを積極的に活用し、決定論的なモデルの記述手段としてカオス理論が用いられている[6].

(3) 動学モデル

経済学における動学モデルとは、1つの世代だけのモデルだけではなく、次の世代までを考慮したモデルである。一般にこれを拡張すると、複数の世代にまたがった解析が可能となるので、通常は2世代にわたる解析が行われる。老年世代と青年世代の2つの世代を同時にモデルに組み込む方法（人は青年と老年の2期間だけ生存して消費する）により、カオス性が生まれることがGrandmontとGeanakoplosにより独立に理論的に証明され、これを用いた分析方法が提案されている（世代重複モデル）[2].

(4) フォン・ノイマン・モデル[2]

フォン・ノイマン・モデル (von Neumann model) とは、次の方程式で記述される離散システムを指しており、パラメータ a の選択の方法により $u(t)$ と $v(t)$ とを描いた相図がカオス的となるケースが生じる。 $y(t), u(t), w(t), v(t)$ は、それぞれ、産出、単位労働費用、賃金、雇用比率である。 $N(t), a_L(t)$ は人口と労働投入係数。

$$y(t+1)=y(t)/[a+u(t+1)] \quad (2)$$

$$u(t+1)=a_L(t+1)w(t+1) \quad (3)$$

$$v(t)=L(t)/N(t)=a_L y(t)/N(t) \quad (4)$$

(5) その他

工学分野では、最初の実験的に観測できるカオス現象として、電子回路により模擬されるファン・デル・

ポールの非線形方程式がよく知られている。経済学者のグッドウイン (Goodwin) は、このファン・デル・ポール方程式にヒントを得て、ビジネスサイクルをモデル化する方法を提案している[2].

3. カオス性の検証

カオスは、いわゆる決定論的な方程式により生成され、その中にはノイズなどの不確実な要素が含まれない。以上の事実は、カオス時系列の2つの時刻を同時に図として描くことにより明確になる。例えば、ロジスティック・マップで発生するカオスでは、時刻 t の値 $x(t)$ を用いて時刻 $t+1$ の値 $x(t+1)$ が生成されるので、 $x(t), x(t+1)$ は方程式により結ばれている。したがって、2次元平面に $x(t)$ を横軸、 $x(t+1)$ を縦軸に描くと、この方程式に対応する1つの閉じた曲線になる。

更に、変数の数が多くなった場合でも3次元平面、4次元平面に、生成されるメカニズム（正確に言えば n 次元多様体）に対応するアトラクタが描かれることになる。しかし、変数が x, y, z などのように増加した場合には、それぞれの変数に注目する必要があるので、このような多様体を簡単に取り扱うことはできないので、何らかの簡便な検証方法が必要となる。1981年にTakensにより示された定理は、現在、このような簡単化のための有力な方法となっている[11].

Takensの定理の詳細は省略するが、その原理は、空間の上をアトラクタが走っている場合に、変数 x について過去の m 個の値を組にして m 次元ベクトル $x=[x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L)]$ を求め、これを m 次元空間にプロットする（リターンマップ (return map) という）と同じ性質をたもったアトラクタが m 次元空間に再現できることによる。

【相関次元】

Takensの定理により、 m 次元空間に埋め込まれたデータに対して、明らかな形状（アトラクタ）が存在していれば、もとのデータがカオスであることが結論づけられる。そのため、空間内の図形の次元を測定する方法として相関次元 (correlation dimension) を計算する方法が良く利用される。例として、2次元空間にアトラクタが埋め込まれている場合を考察する。空間内にある1点をとり、そこを中心として半径 r の円を描き、この円の中にプロットされたデータ点がいくつ含まれるかを数える。その個数を C とする。個数 C は r の増加関数であり、 $C(r)$ とする。

もし、データ点が一樣に分布していれば、2次元の場合には、 $C(r)$ は r^2 に比例する($C(r)=ar^2$)。これに対して、埋め込んだ図形が直線や曲線など線分の上に分布していれば、 $C(r)=br$ となるであろう。このようにして計算される $C(r)$ を $\log C(r)$ を縦軸、 $\log r$ を横軸として描いて、その傾きを推定すれば、これがプロットした点(埋め込まれたアトラクタ)の次元を与える。これを相関次元とよんでいる。埋め込まれたアトラクタが線状なら、上の式で計算する $C(r)$ は小さくなる。

原理的には、以上の方法で相関次元が計算できるが、 $C(r)$ をどの点を基準として行うか、 m をどのように選択するかなどの問題がある。これを1つのアルゴリズムとしてまとめたものがGrassberger-Procaccia法とよばれるものである[3]。以下、これを示す。

(ステップ1) 埋め込み次元 $m=1$ でスタートする。時系列 $x(t)$ を m 個サンプルして作成したベクトル $x_t=(x(t), x(t+L), \dots, x(t+mL))$ を T 個作成する($t=1, 2, \dots, T$)。すなわち、 m 次元空間にもとの系列を埋め込む。

(ステップ2) 異なる x_t の間のベクトルの距離を計算し、この距離が r 以下となるケース数をカウントする。すなわち $D=f(x_i, x_j)$ を距離とするとき、 $D < r$ となる i, j の組合せを、 i, j の変化する T の範囲で求める。これを $C_m(r)$ とする。

(ステップ3) 上の計算を、 r を変化させながら求める。最後に、縦軸を $\log C_m(r)$ 、横軸を $\log r$ とするグラフを描く。このグラフが直線であれば、カオス性が示される。グラフに回帰直線を当てはめると

$$\log C_m(r) = \text{定数} + d \log r \quad (5)$$

となるので、この傾きから次元 d を推定する。

(ステップ4) 上の m を変化させながら、次元 d を計算していく。すなわち、 m を1つずつ増加させて、 d が一定の値に飽和するときの m の値が求める埋め込み次元である。

図2にはロジスティック・マップにより生成される時系列の相関次元を示している。サンプル数により漸近的に相関次元が得られることが分かる。

【リヤプノフ数】

リヤプノフ数は、相関次元とならんでカオス性を検証するもう1つの数値であり、カオス系のもつ初期値に対する敏感性を示すものである。カオスの著しい性質として、初期値をわずかに違えるだけで、時間の経過とともにこれらの異なる初期値に対する軌道が指数

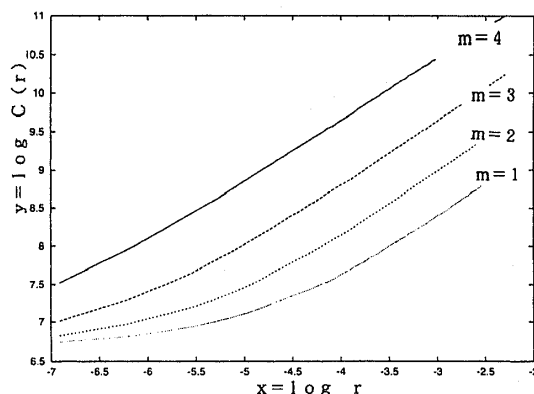


図2 相関次元の計算例($\log C_m(r)$ と $\log r$)

関数的に増加していくことをさしている。

このような初期値敏感性を指数関数で表現したものがリヤプノフ数であり、初期状態から開始された軌道が指数関数的に相互に乖離していく状況を数値として表現する。いま、アトラクタが3次元空間に埋め込まれたケース(レスラー系など)を考えた場合に、軌道の初期状態の集合が、一辺が d である立方体に含まれていると仮定する。このとき、一定時間が経過したあとには、この立方体の各辺 a, b, c は、広がっていき次のように表現される。

$$a = d \exp(\lambda_1), b = d \exp(\lambda_2), c = d \exp(\lambda_3) \quad (6)$$

このときの $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がリヤプノフ数である。どの初期値から出発しても、最終的にはアトラクタに近づいていく(立方体のすべての点は平面的なアトラクタに吸収されてしまう)ので、初期値が含まれた立方体は体積がゼロになる。したがって、このように引き延ばされる方向へはリヤプノフ数は正であるが、その他は負となる。

このように、少なくとも1つのリヤプノフ数が正ならアトラクタに近づくので、初期値敏感性が生じるには、少なくとも1つのリヤプノフ数が正であればよい。これを観測されたデータから推定する方法としてWolfの方法がある[13]。

(ステップ1) 埋め込み次元を m と仮定して、埋め込んだ点の初期値を1つ選ぶ。これを x_1 とする。この x_1 に最も近い点 x_{t1} を計算により求める。

$$d_1 = f(x_1, x_{t1}) \quad (7)$$

$f(,)$ は距離関数。更に、時刻 q たったときの、これら2点の距離を計算する。

$$d_2 = f(x_{1+q}, x_{t1+q}) \quad (8)$$

このときの比率を計算しておく。

$$g_1(q) = d_2/d_1 \quad (9)$$

(ステップ2) この q 時刻あとの点から再度スター

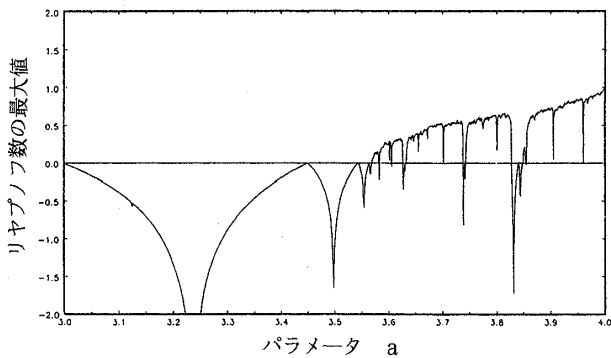


図3 リヤプノフ数 (logistic map)

トして、同じ計算をする。しかし、一般には、限られた観測データしかないので、 x_{t+q} の延長上に更に点が見いだせるか不明であるので、再度、 x_{1+q} に近い点 x_{t2} を次の方法で計算する。

$$f(x_{1+q}, x_{t2}) + w \cdot \theta f(x_{t2} - x_{1+q}, x_{t1+q} - x_{1+q}) \quad (10)$$

ここで、 $\theta(a, b)$ は空間でベクトル a, b のなす角度であり、 w は適当な重みである。すなわち、もとの線分に位置することが望ましいが、その線分からはずれる分をペナルティとして角度で加算している。 q 時刻後の $f(x_{t2}, x_{1+2q})$ を計算して、 $g_2(q)$ を求める。

(ステップ3) このような計算を繰り返し、特定の q について、以上の操作で計算された $g_i(q)$ の値を平均する。すなわち

$$\lambda(q) = \sum_i \log g_i(q) / (qI) \quad (11)$$

I はケースの総数である。

(ステップ4) 上の操作を q の値を増加させながら計算する。この過程で、 q のある範囲で、 $\lambda(q)$ が安定して正になる場合、その値を該当する範囲で平均したものがリヤプノフ数である。図3には logistic map により生成された時系列のリヤプノフ数を示す。

4. カオス時系列の予測

カオス時系列の予測手法を分類すると、以下のようになる。これらは、いずれも、カオス力学系が決定論的に得られることを基本としている。

(1) 局所線形モデル法

Framer and Sidorowich (1987) による方法が代表的であり、アトラクタの上での将来の時刻における値 (位置) から、逆に時系列の将来値を予測する。

(2) 動径基底関数 (Radial Basis Function) 法[1]

Casdagli (1989), Mess (1992) などの方法が知られており、関数の性質を用いて時系列の時間域での近似を実現する。

(3) ニューラルネットワーク法

ニューラルネットワークにより時系列を直接的に近似する方法である。

(4) GP 法[5, 6, 12]

われわれのほか、GP の研究者が示したによる方法でありカオス時系列から直接これを生成する方程式を推定しこれを用いて予測する。

以下では、局所近似法を中心として述べていく。その基本的な考え方はアトラクタの上での将来の時刻における値 (位置) を近似的に求め、これを逆に時間域に写像して、このアトラクタ軌道を生成する力学モデルを推定することにより予測を行う方法である。

いま、 n 次元におけるヤコビ行列 (微分値行列) が計算されているとする。すなわち、もとのカオスのダイナミックスを

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (12)$$

としたとき、変数 $x(t)$ の微小変化 (摂動項) が次のように書けるときの、この最初の $Df(x)$ がヤコビ行列である。

$$\Delta x(t+1) = Df(x(t)) \Delta x(t) \quad (13)$$

まず、観測された時系列 $x(t)$ が得られている場合に、Takens の定理を用いてアトラクタを構成するため、 m 次元ベクトルの系列を生成する。

$$X(t) = [x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L)] \quad (14)$$

いま、時刻 t までの時系列の観測データ $x(t)$ が得られているとき、 p 時刻先の値 $x(t+p)$ を予測する問題を考える。アトラクタ上での $x(t)$ に対応する点 $X(t)$ が与えられているときに、 p 時刻後のアトラクタ上での点 $X(t+p)$ を $X(t)$ を用いて予測する問題となる。

$$X(t+p) = F(X(t)) \quad (15)$$

ここで、関数 F は予測を行うための近似関数である。

いま、時間間隔 p が十分に小さい場合には、アトラクタの時間変化は、ほぼ $X(t)$ の近傍点の時間変化により近似できると考えられるので、近傍の点を複数個適当に選んで、これらの平均的な推移を最小2乗法などにより求めて、動きを推定する。

なお、ここでは、時刻 $t+p$ の時系列の値だけ、すなわち、 m 次元空間の第1番目の要素 $x(t+p)$ だけを予測すればよく、その他の要素は予測する必要がないので、近似的な予測式は次のようになる。

$$x(t+p) = F(X(t)) \quad (16)$$

最も簡単な予測式として次のものを用いる。

$$x(t+p) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x(t-(k-1)L) \quad (17)$$

この式における係数は、 $X(t)$ を除くすべての $X(i)$ についての $X(t)$ とのユークリッド距離を計算し、この小さい順に n 個の点を $X(t)$ の近傍点として採用し、 $X(\tau_1), X(\tau_2), \dots, X(\tau_n)$ としておく。このもとで、次の式を最小にする係数を求める。

$$\sum_{i=1}^n (X(\tau_i+p) - F(X(\tau_i)))^2 \rightarrow \min \quad (18)$$

この計算は、具体的には、 $X(\tau_i+p)$ の1番目の要素 $x(\tau_i+p)$ を n 個集めたベクトル x と、 $n \times (m+1)$ 列のヤコビ行列と、 $m+1$ 個の要素からなる係数ベクトルを用いて次の観測方程式をたてることになる。

$$x = Ga \quad (19)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & x(\tau_1) & x(\tau_1-L) & \dots & x(\tau_1-(m-1)L) \\ 1 & x(\tau_2) & x(\tau_2-L) & \dots & x(\tau_2-(m-1)L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x(\tau_n) & x(\tau_n-L) & \dots & x(\tau_n-(m-1)L) \end{bmatrix} \quad (20)$$

この係数 $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ を式(17)に代入することにより、時系列に値 $x(t+p)$ を予測する。

5. GPによるカオス近似

遺伝的プログラミング (GP) により、観測された時系列からその時系列を生成する方程式を推定する方法については前回の解説で述べている。この詳細は、ここでは繰り返さないが、必要な範囲で簡潔にまとめておく。

GPではカオス力学系の方程式が、計算する演算記号、数学関数、およびこれらの対象となる変数を含んだ木構造で表現されている。最終的な方程式を得るまで、さまざまな形の木構造を発生しておいて、どの木構造が適切であるかを計算する。具体的には、方程式の形が分かっているので、変数に値を代入して $x(t+1)$ の推定値を求め、これが観測したデータである $x(t+1)$ に近いかどうかで、その木構造の性能が判断できる。これを、GAにおける個体の選択のケースと同様に適応度とよんでおく。

この適応度の大きな2つの木構造を親として、交叉処理によりこれらの2つの子供 (offspring) を生成する。交叉処理では、2つの木構造の交換可能な部分を選択して入れ替える。この場合、*StackCount*を利用して、意味のある切断を選択する。個体の長さは一般に異なるので、乱数を用いて、最初に親1の切断場所を決定し、その場所の*StackCount*を計算する。次に、親2について、同じ*StackCount*の値の点を選択

表1 GPにより求めた方程式による予測誤差

| name | 2乗平方誤差 | 求解までのGPステップ数 |
|----------|--------|--------------|
| Logistic | 1.7e-7 | 9 |
| Henon | 7.2e-8 | 15 |
| Ushiki | 2.6e-7 | 10 |

しておき (一般に複数個となる)、切断と交叉の場所を決める。交叉処理により2つの木構造の部分を交換する操作を繰り返す。途中に、突然変異により枝の部分を強制的に変更する。

以下では、既知のカオス力学系で生成された時系列データに対して、GPによりカオス力学系を推定するため、次に示すHenon mapも用いる。

$$x(t) = 1 + y(t-1) - ax(t-1)^2 \quad (21)$$

$$y(t) = bx(t-1) \quad (22)$$

また、やや複雑な時系列として、次に示すUshiki mapにより生成された時系列を用いる。

$$x(t) = [3.7 - x(t-1) - 0.1y(t-1)]x(t-1) \quad (23)$$

$$y(t) = [3.7 - 0.15x(t-1) - y(t-1)]y(t-1) \quad (24)$$

表1にはGPにより求めた方程式による予測誤差を示している。

6. カオス制御 (OGY法とGP法)

カオス制御とはカオスを生成するシステムのパラメータを変化させるのではなく、カオス的な挙動をするシステムを、外部から入力を加え制御することにより、カオス的な挙動をするシステムをカオス的ではない状態に移行させる方法である。

カオス制御が必要とされる分野やその意義については次のように整理される。不均衡経済モデルに見られるように、カオス的な状況のもとでは経済モデルに変動要因が含まれ、システムはいつまでたっても安定しない。しかし、課題として、ある経済政策をとることにより、不規則に変動する経済モデルから、安定した挙動へと移行させる方法を見いだす必要があったとする。例えば、混乱する市場や経済環境を、政府の政策で鎮静化するなどの例が考えられる[6]。

カオス制御により不動点に移行させるほかに、周期的な振動に対応するアトラクタを目標とする場合もある。もちろん、アトラクタにこのような周期振動が含まれている必要がある。周期振動へのシステムの移行は、経済動学では季節的な変動を許した上での経済の安定化などとして解釈できるであろう。

【OGY法によるカオス制御】

カオス制御の方法に関しては制御工学を中心として

研究がすすめられ、現在ではその方法は次の2つの方法に集約されている。

第1番目はフィードバック制御による方法であり、古くから用いられているシステム安定化手法である。しかし、この方法は工学的には振動の発生を抑制したりシステムが発散するのを防止する意義があるが、システム構成が変化するため、経済モデルなどの挙動を見ながら制御する場合には適していない。

第2番目はOGY法とよばれる方法であり、OGYは手法の開発者の頭文字(Ott, Grebogi, Yorke)に由来している[9]。OGY法は、カオスアトラクタに埋め込まれた多くの不安定軌道が存在する場合、局所安定化が達成できる近傍に近づいたときに、適切な制御入力を加えることにより安定化された周期軌道へと導く方法である。この方法では、システムの構造を変形させることなく、必要とされる短時間にシステムへの入力を加えるだけで安定化を達成できるメリットがある。ただし、一方では、システムに対する即応性がないことや、制御入力をすべき時間が初期値に依存するなどの問題ももっている。

カオスは周期的な変動と不規則な変動の両方を含んでいるので、アトラクタは1つの曲線ではなく、複数の曲線の集合として記述される。点 x_f に収束する方向に進む線分がある一方で、これから離れていく線分、あるいは x_f に近づきながら、結局は x_f には至らない線分から成り立っている。このような、 x_f としては不動点がある。不動点に収束するアトラクタを安定多様体とよび、不動点には至らない、あるいは離れていく線分を不安定多様体とよんでいる。

カオス制御とは、 x_f の近傍に近づいたときに、外力を加えることにより不動点 x_f へと収束させる方法であると言える。いま、入力を含む n 次元非線形離散時間システムを考える。

$$x(t+1)=f(x(t), u(t)) \quad (25)$$

ただし、 $x(t)$ は時刻 t でのシステムの状態、 $u(t)$ は制御入力であるとする。 x_f を $u(t)=0$ であるときのシステムの不動点であるとする。すなわち、 $x_f=f(x_f, 0)$ 。不動点での線形化システムは、次のようになる。

$$x(t+1)-x_f=A[x(t)-x_f]+bu(t) \quad (26)$$

$$A=D_x f(x_f, 0), b=D_u f(x_f, 0) \quad (27)$$

なお、 D_u, D_x は、関数 $f(\cdot, \cdot)$ の変数 u, x について求めた偏微分の $x=x_f, u=0$ における値である。

いま、2次元のシステムを考え、不動点 x_f がこの

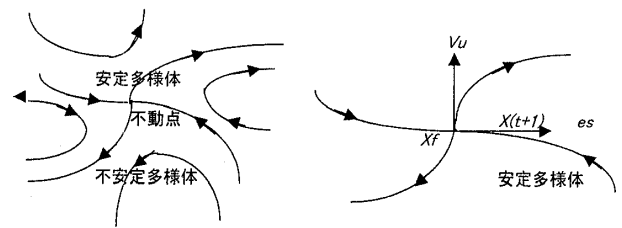


図4 不安定多様体, 安定多様体の接ベクトル

カオスアトラクタに埋め込まれており、双曲形不安定不動点であるとする。すなわち、 A の固有値 λ_u, λ_s はともに実数であり

$$|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s| \quad (28)$$

これらの固有値に対する長さ1の固有ベクトルを e_u, e_s とする。これらのベクトルは不動点 x_f の局所不安定および安定の方向を表わしている。すなわち、図4に示すように、安定多様体、不安定多様体のそれぞれに接する接ベクトルとなる。

これらのベクトルを1列目、2列目とする行列 P を考え、この逆行列 P^{-1} の行ベクトルを v_u, v_s とする。これらを反変ベクトル(contravariant vector)とよぶ。

$$P=[e_u, e_s], P^{-1}=[v_u, v_s]^T \quad (29)$$

したがって、 $v_u e_s = v_s e_u = 0, v_u e_u = v_s e_s = 1$ である。ベクトル $\delta x(t+1) = x(t+1) - x_f$ はベクトル e_s と並行になるので、直交の条件に代入すると

$$v_u [x(t+1) - x_f] = 0 \quad (30)$$

となる。したがって、 $x(t)$ が x_f の近傍にあり、式(30)が成り立つならば、 $x(t+1)$ は x_f の局所安定多様体に収束する。この条件を書き直すと、次のような入力を印加することにより安定化できることがわかる。

$$u(t) = -\lambda_u v_u \delta x(t) / (v_u b) \quad (31)$$

$u(t)$ はシステムの状態が不動点の近くまで接近するまでゼロにしておき、不動点の近傍にきたときに式(31)の入力をシステムに加える。

文献[9]ではエノン写像(Henon map)により生成された時系列のカオス制御の例題が示されている。

【GPによるシステム同定とカオス制御の結合】

GPによりカオス力学系を直接近似する方法を用いれば簡単な制御方法が適用できる。いま、システムの挙動を

$$x(t+1) = f(x(t)) + u(t) \quad (32)$$

と仮定しておく。システムの入力 $u(t)$ がゼロのときの $f(x(t))$ をGPにより近似し、これを $\hat{f}(x(t))$ とする。方程式が推定されているので数値計算によりシステムの不動点が求まる。このとき、現在の状態 $x(t)$

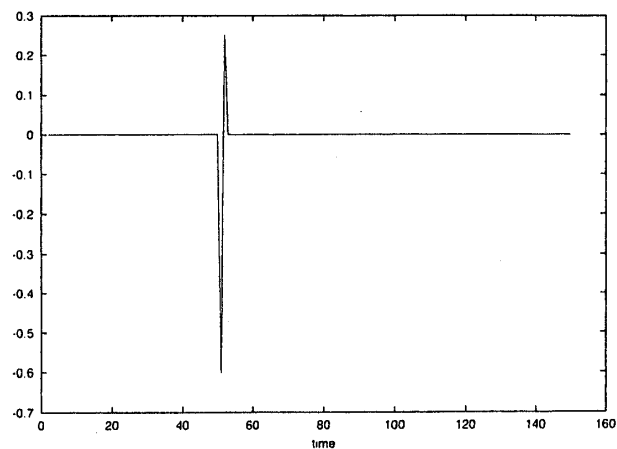
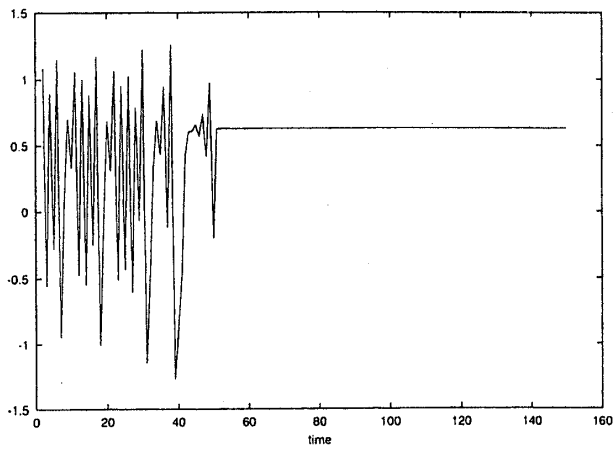


図5 カオス力学系推定と制御 (上：安定化された時系列, 下：入力)

から制御を始めて、次の状態が不動点 x_f に移行すればよいので $x_f = \hat{x}(t+1) = \hat{f}(x(t)) + u(t)$ となるように制御 $u(t)$ を加える。

このようにして求められる次の時刻 $t+1$ における状態について、元のシステムでは $x(t+1) = f(x(t))$ となるが、これを近似されたシステムにより求められる望ましい状態、 $\hat{x}(t+1) = \hat{f}(x(t)) + u(t)$ により置き換える。

図5には Ushiki map により生成された時系列に対して、ここで述べている制御方法を適用した場合の収束状況を示している。

参考文献

- [1] M. Casdagli: "Nonlinear prediction of chaotic time series", *Physica*, vol. 35, pp. 335-356 (1989).
- [2] R. M. Goodwin: *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford University Press (1990) (邦訳: 有賀裕二訳『カオス経済動学』, 多賀出版 (1998)).
- [3] P. Grassberger and I. Procaccia: "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica D* 9, pp. 23-48 (1983).
- [4] Y. Ikeda and S. Tokinaga: "Approximation of system equations for the chaotic dynamics by using the Genetic Programming", *Trans. IEICE*, vol. EA-83, vol. 8 (2000).
- [5] Y. Ikeda and S. Tokinaga: "Controlling the chaotic dynamics by using approximated system equations obtained by the genetic programming", *Trans. IEICE*, vol. E 84-A, no. 9, pp. 2118-2127, 2001.
- [6] L. Kass: "Stabilizing chaos in a dynamic macroeconomic model", *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 33, pp. 313-332, 1998.
- [7] T. Y. Lee and J. A. Yorke; "Periodic three implies chaos", *Am Math Mon.*, vol. 82, pp. 985-992 (1975).
- [8] E. N. Lorenz: "Deterministic non-periodic flows", *Journal of Atmos. Science*, 20, pp. 130-141 (1968)
- [9] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke: "Controlling chaos", *Physical Rev. Letters*, Vol. 64, No. 11, pp. 1196-1199 (1990).
- [10] O. E. Rossler: "An equation of continuous chaos", *Physical Letters*, 57 A, p. 397 (1976).
- [11] F. Takens: "Detecting strange attractors in turbulence", in *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, No. 898, D. Land and L. Young (eds.), Springer-Verlag, 1981.
- [12] 時永祥三: 『複雑系による経済モデル分析』, 九州大学出版会 (2000).
- [13] A. J. Wolf, J. Swift and J. Vastano: "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D* 16, pp. 285-317 (1985).