

# かんばん方式の数理

小島 貢利, 中島 健一

## 1. はじめに

かんばん方式は、トヨタ生産方式[1]において、需要変動、部品在庫、設備故障、出勤状況の変化等、種々の不確実性のもとで、JIT (Just-In-Time) 生産を実現するために考案された「後工程引き取り、後補充生産方式」における情報伝達・制御手段である。かんばん方式においては、各工程間で使われるかんばん枚数が決められると、かんばんルールに従いそれぞれの工程が自律分散的に生産活動を継続するという特徴をもつ。しかしその運用は現場において試行錯誤的に行われてきたため、同方式の最適化や一般的特性に関する理論的研究が海外を中心に盛んに行われてきた。

本稿では、かんばん方式の基本的なメカニズムについての解説を行い、かんばん枚数の決定法を中心としたこれまでに同方式の主な理論的研究成果について概説する。

## 2. かんばん方式

部品あるいは製品の収容箱には、1枚のかんばんが付けられ、工程内あるいは工程間を循環し、各工程における生産量や前工程からの部品の引取量を制御する。かんばんには大別して、

- ・生産指示かんばん（仕掛かんばんとも呼ばれ、工程内の部品の生産量を制御）
  - ・引き取りかんばん（工程間の部品の引取量を制御）
- の二種類がある。特に、引き取りかんばんに関しては、後工程から前工程へ部品を引き取りに行くタイミングによって、
- ・定量引き取り方式（一定枚数かんばんが溜まったら部品を引き取る）

こじま みつとし  
名古屋工業大学 生産システム工学科  
〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町  
なかしま けんいち  
大阪工業大学 経営工学科  
〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1

- ・定期引き取り方式（ある一定時間毎に部品を引き取る）

が存在し、前工程が外注工場の場合、特に外注かんばんと呼ばれている。

かんばんを運用するルールは、

1. 後工程は、前工程へはずれた引き取りかんばん分だけ引き取りに行く。
2. 前工程は、生産指示ポスト内のかんばん分だけ、その順番に生産する。
3. 良品だけを生産し、後工程へ不良品を送らない。
4. かんばんは、必ず現物に付けておき、実数と収容数が合わなければならない。
5. かんばんのない時は運ばない、作らない。
6. かんばんの枚数を減らしていく（問題を顕在化させる）。

である。したがって、生産指示かんばんの枚数がその工程の製品の収容箱単位の最大在庫量になり、引き取りかんばんの枚数が前工程からの部品の収容箱単位の最大在庫量に対応する。もしかんばん枚数を多くすれば、工程は過剰在庫を抱えることになり、逆に少なくすれば材料・製品切れを引き起こすことになる。このように、各工程におけるかんばん枚数の設定は生産システムの優劣を左右する本質的に重要な問題である[2]。次節では、従来のかんばん枚数設定法について述べる。

## 3. 従来のかんばん枚数決定法

トヨタ自動車におけるかんばん枚数の計算式[3, 4]は、生産指示かんばんの場合、

$$M = [(DL_p + I_s)/u]^+ \quad (3.1)$$

ここで、 $[x]^+$  は  $x$  以上の最小の整数であり、

$M$  : 生産指示かんばん枚数

$D$  : 平均需要量

$L_p$  : 引き取りによりかんばんがはずされてから生産が完了し、所定の位置におかれるまでのリードタイム

$I_s$  : 安全在庫量 (安全係数)

$u$  : 収容数

である。定量引き取り方式の場合、

$$N = [(DL_w + I_s)/u]^+ \quad (3.2)$$

である。ここで、

$N$  : 引き取りかんばん枚数

$L_w$  : かんばんが外されてから引き取りが完了するまでのリードタイム

である。また、定期引き取り方式の場合、

$$N = [\{D(R+L) + I_s\}/u]^+ \quad (3.3)$$

である。ここで、

$R$  : 引き取り周期、

$L$  : 引き取りを開始してから完了するまでのリードタイム

である。特に外注かんばんの場合、

$$N = [\{Da(1+c)/b + I_s\}/u]^+ \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで  $a$ - $b$ - $c$  は納入サイクルを表す定数であり、 $a$  日に  $b$  回納入し、受注後  $c$  回目に納入されることを意味する。すなわち、納入間隔 (周期) は  $a/b$  であり、納入リードタイムは、 $ac/b$  で与えられる。

## 4. 数理モデルによるかんばん方式の最適化と解析

本節では、JIT 生産システムの性能を左右するかんばん枚数の設定を中心に、その理論的解析について、需要が確定的な場合と不確定な場合にわけて概説する。

### 4.1 確定需要下での最適化

定期引き取り方式に対して、引き取りかんばん枚数  $N$  と引き取り周期  $R$  を単位時間当たり費用

$$A(N, R) = A_I \bar{I} + C_w/R \quad (4.1)$$

が最小になるように定めることができる [5]。ここで、

$\bar{I}$  : 平均在庫量

$A_I$  : 単位期間・単位量当たり在庫費用

$C_w$  : 1 回当たり引き取り費用

である。

また数理計画問題として、工程  $N$  から最終組立工程 0 に至る  $(N+1)$  工程が樹状につながった多岐分岐型生産システムを考え、各工程における生産指示かんばん枚数を決定する方法等も提案されている [6]。すなわち、 $K$  計画期間にわたる確定的な製品需要量  $D_k$ ,  $k=1, \dots, K$  を生産し、かつ総費用を最小化する問題である。

## 4.2 不確定需要下での最適化と解析

### 1) 連続観測モデル (定量引き取り方式)

はじめに、生産システムを連続的に観測し、システムの状態変化 (例えば、生産完了や部品の発注・納入時点等) に着目してシステムの解析を行う場合について概説する。

マルコフ待ち行列の問題としては、生産指示かんばんと引き取りかんばんによって制御される 2 工程からなる生産システムの定式化と解析 [7] や、製品需要の到着間隔、各工程の加工時間が指数分布に従う多工程生産システムを考え、極限確率から最適かんばん枚数を求めるアプローチが提案されている [8]。また、多段直列型システムでは、1 から  $N$  までの Cell を考え、生産指示かんばんのみにより制御されるかんばんシステムが定式化されている。そして、これを同じ初期条件のもとで、かんばんを用いない直列生産ラインと比較した場合、仕掛け品の滞留時間が短く、工程間在庫も少なくなり、生産リードタイムも短くなることが示されている。また、加工時間が指数分布に従うとき、このシステムはマルコフ待ち行列となり、各工程を分割した fixed-point equation を用いた近似解法を導き、シミュレーションと比較してその精度を検証している [9, 10]。さらに同様の、 $N$  工程からなる直列型生産システム (図 1) を考え、Cell  $k$  で  $M_k$  台の機械と  $C_k$  枚のかんばんを持つ場合の構造特性が一般化セミマルコフ過程を用いて導かれ、

- ① かんばん枚数が増加すれば、スループットも増加する。
- ②  $M_1 = \dots = M_N = 1$ ,  $N \geq 3$ , 総かんばん枚数が一定ならば、 $C_1 = C_N = 1$  のときにスループットが最大になる。
- ③ スループットは、 $C_k$  に関して確率的に凹で増加型である。

等の性質が示されている [11, 12]。また、Glasserman and Yao は、かんばん方式の一般化モデルとして  $(a, b, k)$  モデルを提案している [13, 14]。ここで、

$a_i$  : 工程  $i$  ( $i=1, \dots, N$ ) の加工待ちまたは加工中のジョブ数の上限

$b_i$  : 後工程 ( $i+1$ ) 工程への搬送をブロックされた工程  $i$  の加工済みジョブ数の上限

$k_i$  : 工程  $i$  の全てのジョブ数の上限

$$1 \leq a_i \leq k_i, \quad 0 \leq b_i \leq k_i, \quad a_i + b_i \geq k_i$$

である。なお、 $a_i = b_i = k_i$  の条件がかんばん方式に相当し、 $a, b, k$  の条件によって様々なブロッキングメ

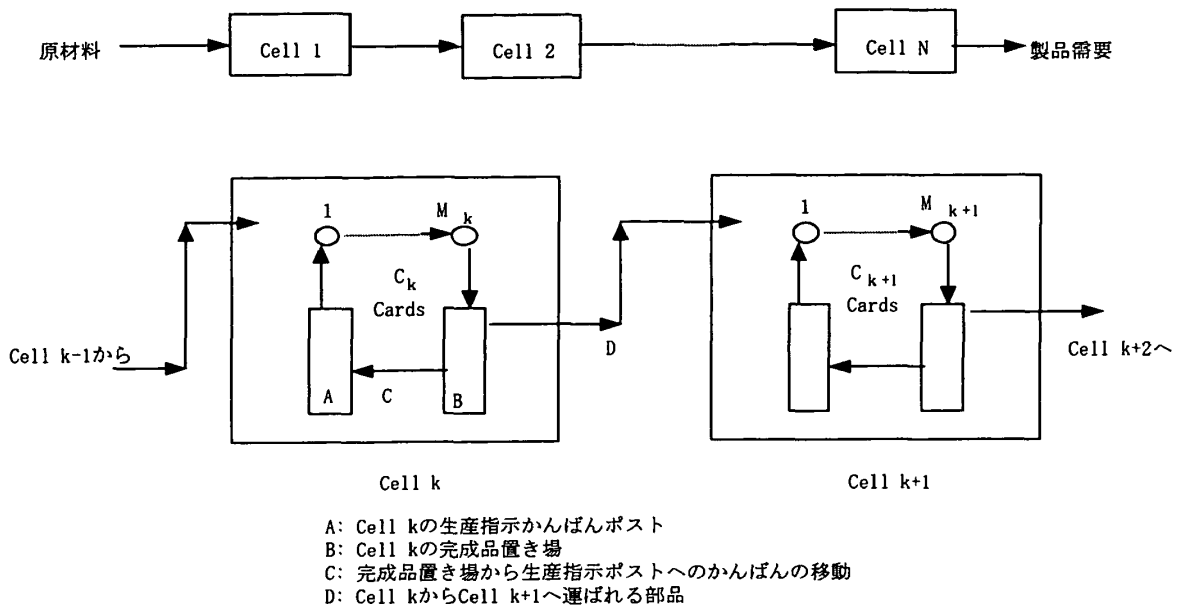


図1 生産指示かんばんモデル

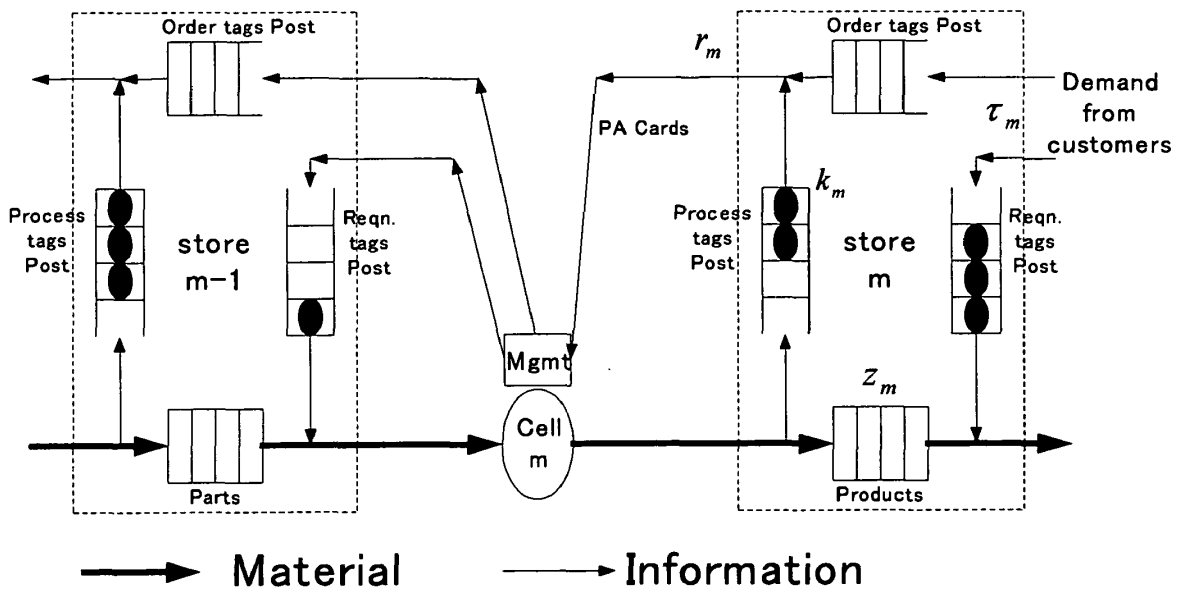


図2 PACシステム

カニズム (communication, manufacturing, kanban blocking) の表現が可能となる。さらに、一般化セミマルコフ過程を用いて、加工完了時間やスループットに関する単調性、凸性、可逆性等の性質が導かれている。また、待ち行列網モデルの適用により、Di Mascolo et al.[15]が、3段階の生産システムに対して、分解近似を行い、閉待ち行列網を用いたかんばんシステムの性能解析を行っている。

かんばん方式の拡張モデルとしては、かんばんと製品の移動が独立に行われ、特別な場合として通常のかんばん方式が含まれる Generalized Kanban System [16]や、基準在庫方式との組み合わせにより需要の情

報が最終工程だけでなく全工程に伝わる Extended Kanban System[17]、需要の非定常な変動に応じてかんばん枚数を増減させてその変化に対応する Flexible Kanban System[18]等が提案されている。

また Buzacott and Shanthikumar[19]は、原材料倉庫をもち、需要の確率的な引き取りがある単一工程生産指示かんばんモデルを考え、通常待ち行列モデルと等価であることを示している。さらに  $N$  工程直列システムに対して、

調達タグ：製品の引き取り要求に用いられる

発注タグ：製品の注文に用いられる

加工タグ：発注タグと組み合わせて、生産指示かん

ばんの発行に用いられる

および、生産指示かんばんを用いる PAC (Production Authorization Cards) システム (図 2) を提案し、特別な場合として MRP (Material Requirement Planning), かんばん方式, OPT (Optimized Production Technology) 等を含むことを示して、近似的な性能評価を与えている。なお、Store  $i$  の初期在庫量を  $z_i$ , 加工タグの枚数を  $k_i$ , 生産指示のバッチサイズを  $r_i$ , 注文タグと調達タグの到着時間のずれを  $\tau_i$  とおくと、

$$z_i > 0, k_i = z_i, r_i \geq 1, \tau_i = 0$$

の場合、PAC システムはかんばん方式と一致する。

## 2) 定期観測モデル (定期引き取り方式)

多段直列型の  $N$  工程からなる単一品種生産システムにおいて、製品需要の確率的変動が前工程にどのように波及するかを考察する。原材料が工程 1 から順に加工され、工程  $N$  で製品として完成する。この時、工程  $n$  において、部品収容数  $u^n$  が生産量  $P^n$  に比べて小さい場合、生産能力  $C^n$ , 部品在庫量  $I^{n-1}$  が十分大きければ、各工程  $n$  における  $P^n, I^n$  の分散は、

$$V(P^n) = V(P^{n+1}) = \dots = V(P^N)$$

$$V(I^n) = L^n V(P^N)$$

となる [20]。ここで  $L^n$  は、工程  $n$  の生産指示 (または引き取り) かんばんが収容箱からはずされてから部品の生産 (または搬送) が完了し、所定の位置におかれるまでのリードタイムである。これらの結果が、JIT 生産システムにおける、1 個流し ( $u^n=1$  で生産、引き取りを行う) や、部品引き取りリードタイムの短

縮 (自社工場、外注工場を特定地域に集中させて引き取り時間を短くすること) の重要性を示唆している。さらに多段直列型のモデルとして、離散時間マルコフ過程に基づき、生産指示かんばん枚数、機械の信頼性、需要変動、安全在庫量のシステムに与える影響が数値的に検証されている [21]。さらに、需要がポアソン到着で、加工時間が指数分布に従う多段直列かんばんシステムを、離散時間マルコフ過程として定式化し、各工程の仕掛品在庫の確率分布を利用した、decomposition による近似解法が提案され、スループットに関して厳密解との比較も行われている [22]。また、生産指示かんばん、引き取りかんばんの両方を用いた多工程直列型かんばんシステムに関しては、各工程の製品の需要量と部品の供給量の確率分布を利用した近似解法による性能評価も行われている [23]。

連続観測を含め、以上の確率モデルにおけるほとんどは、生産指示かんばんに関する解析である。そこで以下では、外注かんばん (引き取りかんばん) 方式にも焦点をあてた解析結果について概説する。

## 3) 生産指示・外注かんばんモデル

外注工場からの部品を用いて製品を完成させる生産指示・外注かんばんモデルを考える (図 3)。生産指示かんばん枚数を  $M$ , 外注かんばん枚数を  $N$  とおく。さらに、部品あるいは製品の収容箱の収容数は 1 とするが、この条件が成立しない場合も以下と同様な議論が可能である。自社工程は単一品種製造工程であり、単位時間当たりの工程の生産能力を  $C$  とおく。また単位時間当たりの需要は平均  $D$  をもつ独立かつ同一

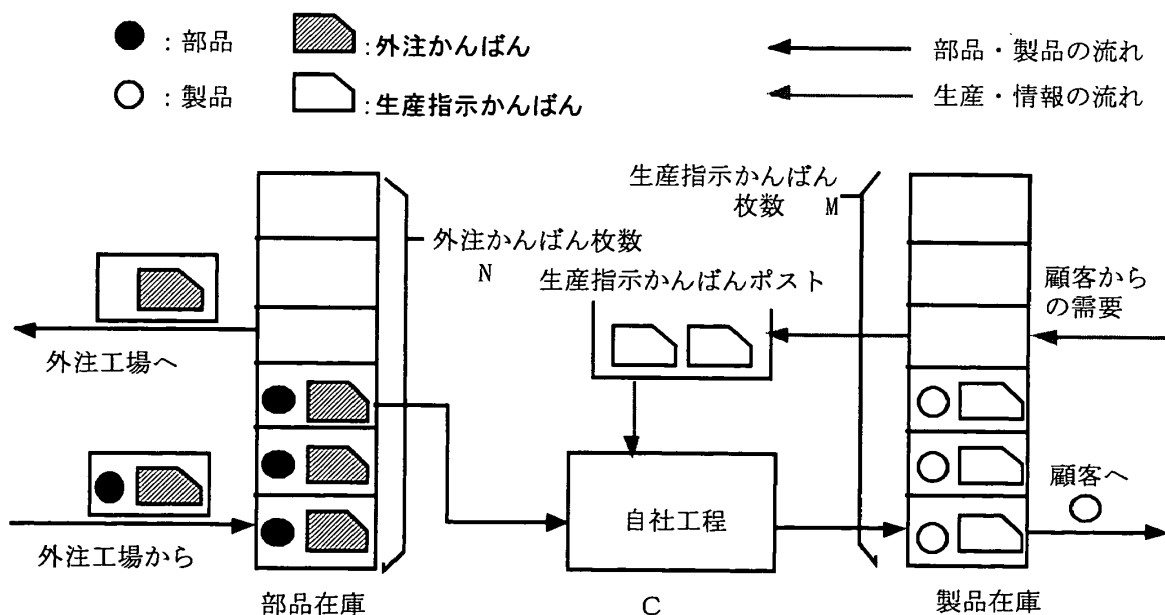


図 3 生産指示・外注かんばんモデル

の分布に従うものとし、満たされなかった需要は繰り越されるものとする。以下、納入リードタイムを  $L$  で表す。生産指示・外注かんばん方式では第  $k$  期首の発注が第  $(k+L)$  期首に納入される。すなわち外注かんばん方式では、かんばんの回収（発注）と同時に  $L$  期前に発注された部品の納入が行われる。この生産指示・外注かんばんを考慮した JIT 生産システムでは、待ち行列理論を用いて、以下の安定条件が導かれている [24]。

$$\text{安定条件 } \min\{C, M, N/(L+1)\} > D. \quad (4.2)$$

ここで、JIT 生産システムが安定であるとは、第  $k$  期の繰り越し需要量を  $B_k$  とした場合、 $k \rightarrow \infty$  のとき  $B_k$  が極限分布をもつことを意味する。上式は  $(L+1)$  期間の平均需要量  $(L+1)D$  がその期間の生産能力  $(L+1)C$ 、最大生産指示量  $(L+1)M$  または外注かんばん枚数  $N$  未満であることがシステムの安定条件であることを示している。この結果、繰り越し需要量の確率母関数による解析から平均費用を最小化する最適生産指示かんばん枚数と外注かんばん枚数を求めることができる。また数値実験の結果、分散が小さくなるにつれ総費用が減少し、いわゆる平準化の効果が示され、最適政策との違いが明らかとなっている [25]。

さらに、上述の生産指示・外注かんばんモデルを、多段直列型工程に拡張することができる。工程  $j$  の生産指示かんばんを  $M_j$ 、引き取りかんばんを  $N_j$  とし、工程  $(j-1)$  から  $j$  への部品の引き取りリードタイム  $L_j$  を考慮した、多工程 JIT 生産システムの性能評価が、近似解法を用いて行われている [26]。この近似解法では、多段直列型モデルの解析でよく用いられる離散時間マルコフ過程、各工程の decomposition に加えて、生産量や総繰り越し需要量の漸化式を適用することによって、システムの状態数  $O\left(\prod_{j=1}^n (N_j^{L_j} \times (M_j + N_{j+1}))\right)$  を、 $O(\max_{j=1, \dots, n} (N_j) \times (M_j + N_{j+1}))$  まで大幅に削減することが可能となる。

ついで、外注かんばんのみを用いた JIT 生産システムを考える。生産指示・外注かんばんシステム同様、安定条件が導かれ、その条件が満たされるものと仮定する。確率順序及び凸順序理論 [27] により、次の定理が示される。

定理 1：外注かんばん枚数あるいは生産能力が増加するにつれ、平均品切れ費用が減少する。

定理 2：需要の分散が減少すれば、製品繰り越し需要

量の平均品切れ費用も減少する。

定理 1 に関連して、かんばん枚数あるいは生産能力の増加に伴い、品切れ費用が減少することや、生産能力が増加するにつれ、最適かんばん枚数が増加することが、過去の研究で数値的に示されている。また定理 2 より、平準化生産により需要変動をおさえることの重要性が理論的に裏付けられている。さらに、かんばん政策と最適発注政策とはよく一致しているが、引き取り周期が大きくなるにつれ、両政策間に差が生じており、引き取り周期の大きさも外注かんばん方式の最適性に影響することが示されている [28]。

## 5. おわりに

本稿では、JIT 生産システムにおけるかんばん方式について、その基本的メカニズムとこれまでの主な理論的研究の概説を行った。企業活動のグローバル化により、生産・物流活動拠点が世界中に分散し、部品の発注、納入に要するリードタイムは増加傾向にある。また、多品種少量生産が加速する中で、膨大な種類数に及ぶ（物理的な）かんばんを最適運用することは、困難になりつつある。これらの諸問題を解決するため、電子かんばんなどが実際に運用段階に入っている。しかし、かんばん方式における「必要なものを、必要な時に、必要なだけつくる」という基本概念は不変である。かんばん方式に代表される日本独自のものづくりから生産された製品は、性能・品質において世界のトップに立ったが、これからはものづくりの方式自体の世界的規模での適応能力が、海外の優れた生産方式と比較されることになる。今後、時代の要請に応じてどのような形態で「かんばん方式」が進化していくのか見守りたい。

## 参考文献

- [1] 大野耐一：「トヨタ生産方式—脱規模の経営をめざして」、ダイヤモンド社、(1978)。
- [2] 大野勝久：JIT 生産システム、オペレーションズ・リサーチ、Vol. 43, pp. 272-278 (1998)。
- [3] 小谷重徳：かんばん方式の数理、オペレーションズ・リサーチ、Vol. 32, pp. 730-738 (1987)。
- [4] 門田安弘：「新トヨタシステム」、講談社、(1991)。
- [5] 宮崎茂次、西山徳幸：トヨタ生産システムにおけるかんばん方式の最適運用法、日本経営工学会誌、Vol. 38, pp. 126-131 (1987)。
- [6] Bitran, G. R., and Chang, L.: "A mathematical programming approach to a deterministic kanban

- system”, *Management Science*, Vol. 33, pp. 427-441 (1987).
- [7] Karmarkar, U. S., and Kekre, S.: “Batching policy in kanban systems”, *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 8, pp. 317-328 (1989).
- [8] Wang, H., and Wang, H.-P.: “Determining the number of kanbans: a step toward non-stock-production”, *International Journal of Production Research*, Vol. 28, pp. 2101-2115 (1990).
- [9] Mitra, D., and Mitrani, I.: “Analysis of a kanban discipline for cell coordination in production lines. I”, *Management Science*, Vol. 36, pp. 1548-1566 (1990).
- [10] Mitra, D., and Mitrani, I.: “Analysis of a kanban discipline for cell coordination in production lines. II.”, *Operations Research*, Vol. 39, pp. 807-823 (1991).
- [11] Tayur, S. R.: “Properties of serial kanban systems”, *Queueing Systems*, Vol. 12, pp. 297-318 (1992).
- [12] Tayur, S. R.: “Structural properties and a heuristic for kanban-controlled serial lines”. *Management Science*, Vol. 39, pp. 1347-1368 (1993).
- [13] Glasserman P. and Yao D. D.: *Monotone Structure in Discrete-Event Systems*, John Wiley & Sons (1994).
- [14] Yao D. D. ed.: *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, Springer-Verlag (1994).
- [15] Di Mascolo M., Frein Y and Dallery Y.: “An analytical method for performance evaluation of kanban controlled production systems”, *Operations Research*, Vol. 44, pp. 50-64 (1996).
- [16] Frein Y., Di Mascolo M and Dallery Y.: “On design of generalized kanban control systems”, *International Journal of Operations and Production Management*, Vol. 15, pp. 158-184 (1995).
- [17] Chaouiya C. Liberopoulos and Dallery Y.: “The extended kanban control system for production coordination of assembly manufacturing systems”, *IIE Transactions*, Vol. 32, pp. 999-1012 (2000).
- [18] Gupta, S. M., Al-Turki, Y. A. Y., and Perry, R. F.: “Flexible kanban system”, *International Journal of Operations and Production Management*, Vol. 19, pp. 1065-1093 (1999).
- [19] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G.: *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, Prentice-Hall (1993).
- [20] Kimura, O., and Terada, H.: “Design and analysis of pull system, a method of multi-stage production control”, *International Journal of Production Research*, Vol. 19, pp. 241-253 (1981).
- [21] Deleersnyder, J. L., Hodgson, T. J., Muller (-Malek), H., and O’Grady, P. J.: “Kanban controlled pull systems: an analytic approach”, *Management Science*, Vol. 35, pp. 1079-1091 (1989).
- [22] Kirkavak, N., and Dinçer, C.: “Performance evaluation model for single-item periodic pull production systems”, *Journal of Operational Research Society*, Vol. 44, pp. 239-250 (1996).
- [23] Berkley, B. J.: “A decomposition approximation for periodic kanban-controlled flow shops”, *Decision Science*, Vol. 23, pp. 291-311 (1992).
- [24] Ohno K., Nakashima K. and Kojima M.: “Optimal numbers of two kinds of kanbans in a JIT production system”, *International Journal of Production Research*, Vol. 33, pp. 1387-1401 (1995).
- [25] 中島健一, 小島貢利, 大野勝久: JIT 生産システムと最適化, 第 12 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 139-149 (2000).
- [26] Ohno K., Kojima M. and Nakashima K.: “Performance evaluation of a multi-stage JIT Production system by decomposition technique”, *Journal of Decision Systems*, Vol. 9, pp. 25-40 (2000).
- [27] Stoyan, D.: *Comparison methods for queues and other stochastic models*, Akademie-Verlag Berlin: John Wiley & Sons (1983).
- [28] 中島健一, 大野勝久: 外注かんばん方式の確率的性質と最適性, 日本経営工学会誌, Vol. 47, pp. 100-106 (1996).