可能性計画法：最適性問題を中心として

乾口　雅弘

1. はじめに

計画問題における不明確な係数をファジィ集合により取り扱う可能性計画問題に対して，種々のアプローチが提案されている[1]．確率計画問題が，問題の取り扱いにより，機会制約条件計画問題，リコース問題(2段問題)，分布問題と分類できるように，可能性計画問題も，それぞれ対応して，様相制約条件計画問題，リコース問題，最適性問題に分類できる．可能性計画問題では，現在までのところ，様相制約条件計画問題に関する研究が圧倒的に多く，最適性問題はある程度，リコース問題に至ってはほんの少ししか研究されていない．可能性計画法の解説[1, 2]も，他に比べて容易な様相制約条件計画問題を中心としたものが多い．

本稿では，ある程度研究が進んでいる最適性問題について，著者の研究を中心に述べたいと思う．最適性問題は，基本的には，不明確な係数が取りうる範囲(ファジィ集合)に応じた最適解の存在範囲(ファジィ集合)を考察するものである．ここでは，目的関数の係数が不明確な線形計画問題を取り上げる．まず，最適解を定義する上で誤解されがちな目的関数値間の比較について述べる．次に，可能的最適解と必然的最適解が定義され，可能的最適性テスト，必然的最適性テストが紹介される．最後に，必然的最適解を緩和した必然的ファジィ最適解が議論される．

2. ファジィ目的関数の比較

目的関数の係数が不明確な線形計画問題，

$$\text{maximize } \gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \quad \text{subject to } A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \tag{1}$$

を考える．$A=(a_{ij})$ は $m\times n$ 行列で，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ であり，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ は決定変数ベクトルである．また，$\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$ は不明確な係数ベクトルで，その取りうる範囲は有界な n 次元ファジィ集合 Γ で与えられているものとする．取りうる範囲 Γ をもつ不明確な係数ベクトル γ は，Γ に制限された可能性変数ベクトルと呼ばれる．簡便のため，問題(1)の実行可能解集合を X と記す．また，Γ のメンバシップ関数 μ_Γ は上半連続であると仮定する．ファジィ集合 Γ が有界であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n \mid \mu_\Gamma(\boldsymbol{c})\ge\varepsilon\}\subset B(r)$ なる半径 $r\in\mathbf{R}$ の超球 $B(r)$ が存在することを意味する．

解 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ が与えられたとき，この問題の目的関数値は，次のメンバシップ関数 $\mu_{Y(\boldsymbol{x})}$ をもつファジィ集合 $Y(\boldsymbol{x})$ となる．

$$\mu_{Y(\boldsymbol{x})}(y)=\sup_{\boldsymbol{c}}\{\mu_\Gamma(\boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=y\} \tag{2}$$

解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ に対しては，$Y(\boldsymbol{0})=\{0\}$ となる．

実数空間の二つのファジィ集合 Z_1 と Z_2 を比較する種々の方法が提案されている．たとえば，可能性理論に基づくと，次の二つの比較指標が得られる．

$$\mathrm{POS}(Z_1\ge Z_2) =\sup_{r_1,r_2}\{\min(\mu_{Z_1}(r_1), \mu_{Z_2}(r_2)) \mid r_1\ge r_2\} \tag{3}$$

$$\mathrm{NES}(Z_1\ge Z_2) =1-\sup_{r_1,r_2}\{\min(\mu_{Z_1}(r_1), \mu_{Z_2}(r_2)) \mid r_1< r_2\} \tag{4}$$

ただし，μ_{Z_1}, μ_{Z_2} は Z_1, Z_2 のメンバシップ関数である．$\mathrm{POS}(Z_1\ge Z_2)$ は，Z_1 が Z_2 以上となる可能性の度合いを示し，$\mathrm{NES}(Z_1\ge Z_2)$ は Z_1 が Z_2 以上となる必然性の度合いを示すように定められている．

そこで，問題(1)の二つの実行可能解 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ の目的関数値の比較指標として，$\mathrm{POS}(Y(\boldsymbol{x}^1)\ge Y(\boldsymbol{x}^2))$，$\mathrm{NES}(Y(\boldsymbol{x}^1)\ge Y(\boldsymbol{x}^2))$ を用いることが考えられるが，これは必ずしも正しくない[3]．例の前に，ファジィ集合 Z_1, Z_2 が閉区間 $[z_1^{\mathrm{L}}, z_1^{\mathrm{R}}], [z_2^{\mathrm{L}}, z_2^{\mathrm{R}}]$ に退化するとき，次式が成立することを述べておく．

$$\mathrm{POS}(Z_1\ge Z_2)=1 \Leftrightarrow z_1^{\mathrm{R}}\ge z_2^{\mathrm{L}} \tag{5}$$

$$\mathrm{NES}(Z_1\ge Z_2)=0 \Leftrightarrow z_1^{\mathrm{L}}< z_2^{\mathrm{R}} \tag{6}$$

例1． $n=2$ とし，$\Gamma=[1,2]\times[-2,-1]$ とする．すなわち，Γ が閉区間の直積として与えられる場合を考える．実行可能解 $\boldsymbol{x}^1=(2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}^2=(3,1)^{\mathrm{T}}$ を考える．

いぬいぐち　まさひろ
大阪大学 大学院工学研究科
〒565-0871 吹田市山田丘2-1

$Y(\boldsymbol{x}^1)=[0,3]$, $Y(\boldsymbol{x}^2)=[1,5]$ となる．式(5)より，$\mathrm{POS}(Y(\boldsymbol{x}^1)\geq Y(\boldsymbol{x}^2))=1$ となり，$\boldsymbol{x}^1$ の目的関数の値が $\boldsymbol{x}^2$ のそれ以上になる可能性があることを示す．ところが，

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1=2c_1+c_2<3c_1+c_2=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2,\quad \forall c_1\in[1,2], \forall c_2\in[-2,-1] \tag{7}$$

が成立し，実際には，$\boldsymbol{x}^1$ の目的関数値 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1$ が $\boldsymbol{x}^2$ の目的関数値 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2$ 以上となることはありえないことがわかる．このように，指標 $\mathrm{POS}(Y(\boldsymbol{x}^1)\geq Y(\boldsymbol{x}^2))$ は，正しい意味を表していない．

同様に，$\mathrm{NES}(Y(\boldsymbol{x}^2)\geq Y(\boldsymbol{x}^1))$ を考えれば，式(6)より，$\mathrm{NES}(Y(\boldsymbol{x}^2)\geq Y(\boldsymbol{x}^1))=0$ となり，$\boldsymbol{x}^2$ の目的関数値が $\boldsymbol{x}^1$ のそれ以上とならない $(c_1, c_2)^{\mathrm{T}}\in\Gamma$ があることを示している．ところが，実際には，式(7)のように，すべての $(c_1, c_2)^{\mathrm{T}}\in\Gamma$ に対して，$\boldsymbol{x}^2$ の目的関数値が $\boldsymbol{x}^1$ のそれ以上となっている．

例1のような不都合が生じた原因を考察しよう．取りうる範囲が Z_1 と与えられる可能性変数を ξ_1，取りうる範囲が Z_2 と与えられる可能性変数を ξ_2 とする．式(3)，(4)の指標では，ξ_1 が Z_1 内でいかなる値を取ろうとも，ξ_2 の取りうる範囲は変わらず Z_2 であるといった可能性変数間に相互関係がないこと（独立性）が暗黙に仮定されている．

一方，例1の場合には，$Z_1=Y(\boldsymbol{x}^1)$ と $Z_2=Y(\boldsymbol{x}^2)$ は，それぞれ，$\xi_1=\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1$, $\xi_2=\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2$ の取りうる範囲を示しており，共通の $\Gamma=[1,2]\times[-2,-1]$ に制限される可能性変数ベクトル γ を含んだ関数値である．そのため，独立性の仮定が成立しない．たとえば，$\xi_1=\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1=0$ のとき，$\gamma\in\Gamma$ であるので，$\gamma=(1,-2)^{\mathrm{T}}$ と特定され，$\xi_2=\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1=1$ と ξ_2 の取りうる値は唯一になる．一般に，$\xi_1=q$ のときには，ξ_2 の取りうる範囲は，

$$\{3c_1+c_2 | 2c_1+c_2=q, 1\leq c_1\leq 2, -2\leq c_2\leq -1\}$$

となり，q の値に応じて変化することがわかる．このように，可能性変数 ξ_2 の取りうる範囲が他の可能性変数 ξ_1 の取る値に依存するとき，ξ_2 と ξ_1 に相互関係があるという．

暗黙の仮定である独立性が成立しないため，問題(1)の目的関数値の比較に式(3)，(4)をそのまま適用することは妥当ではない．共通な可能性変数ベクトル γ の存在を考慮して定義した次の指標を使用する必要がある[3]．

$$\mathrm{POS}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1\geq\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2)=\sup_{\boldsymbol{c}}\{\mu_\Gamma(\boldsymbol{c}) | \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2\} \tag{8}$$

$$\mathrm{NES}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1\geq\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2)=1-\sup_{\boldsymbol{c}}\{\mu_\Gamma(\boldsymbol{c}) | \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1<\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2\} \tag{9}$$

このような目的関数値間に存在する相互関係は，可能性線形計画問題に限らず，ファジィ係数を含む種々の最適化問題を扱った論文の多くで無視されてきた．もちろん，ファジィ係数の解釈によるが，実現値が唯一で不明確な変数の取りうる範囲をファジィ係数が表すという解釈においては，相互関係を無視した取り扱いは妥当とはいえない．

3. 可能的最適解と必然的最適解

$\gamma=\boldsymbol{c}$ のときの問題(1)の最適解集合を $S(\boldsymbol{c})$ とする．すなわち，

$$S(\boldsymbol{c})=\{\boldsymbol{x}\in X | \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\max_{\boldsymbol{y}\in X}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\} \tag{10}$$

を考える．$S(\boldsymbol{c})$ を用いると，問題(1)の γ の取りうる範囲 Γ が通常の集合である場合には，次の二つの最適解集合 ΠS, NS が定義できる[4]．

$$\Pi S=\bigcup_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}S(\boldsymbol{c}),\quad NS=\bigcap_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}S(\boldsymbol{c}) \tag{11}$$

$\boldsymbol{x}\in\Pi S$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は少なくとも一つの $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ 対して最適となる解であり，γ の実現値によっては最適となりうるので，可能的最適解と呼ばれる．一方，$\boldsymbol{x}\in NS$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ はすべての $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ に対して最適となる解であり，γ が Γ 内でどのような値を取ろうとも必ず最適となるので，必然的最適解と呼ばれる．明らかに，$NS\subseteq\Pi S$ となる．

例2． A, $\boldsymbol{b}$ が次式で定められる問題(1)を考える．

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}42\\ 24\\ 9\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{12}$$

また，次式で定められる Γ を考える．

$$\Gamma=\{(c_1,c_2)^{\mathrm{T}} | 3.5\leq 2c_1+c_2\leq 5.5,\ 3.4\leq c_1+2c_2\leq 6, -1\leq c_1-c_2\leq 1.3,\ 1\leq c_1\leq 2, 0.8\leq c_2\leq 2.2\} \tag{13}$$

このとき，図1に示すように，$3c_2<4c_1$ なる $(c_1, c_2)^{\mathrm{T}}\in\Gamma$ に対しては，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(6,6)^{\mathrm{T}}$ が最適となり，$3c_2>4c_1$ なる $(c_1, c_2)^{\mathrm{T}}\in\Gamma$ に対しては，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(2,9)^{\mathrm{T}}$ が最適となる．また，$3c_2=4c_1$ なる $(c_1, c_2)^{\mathrm{T}}\in\Gamma$ に対しては，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(6,6)^{\mathrm{T}}$ と $(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(2,9)^{\mathrm{T}}$ を結ぶ線分が最適となる．したがって，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(6,6)^{\mathrm{T}}$ と $(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(2,9)^{\mathrm{T}}$ を結ぶ線分上の任意の点は可能的最適解となる．この場合，$\boldsymbol{c}\in\Gamma$ に依存して最適解が異

なるので，必然的最適解は存在しない．

一方，次式で定義される Γ を考える．

$$\Gamma=\{(c_1, c_2)^{\mathrm{T}} | c_1+c_2\geq 3,\ c_1\geq c_2,\ c_1\leq 2c_2,\ c_1\leq 2.5,\ c_2\leq 2\} \tag{14}$$

この場合，図2に示すように，すべての $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ に対して，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(6, 6)^{\mathrm{T}}$ が最適解となる．すなわち，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(6, 6)^{\mathrm{T}}$ は必然的最適解である．$NS\subseteq \Pi S$ より，$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(6, 6)^{\mathrm{T}}$ は可能的最適解でもある．

例2に示すように，可能的最適解は無数に存在することが多く，必然的最適解は存在するとは限らない．

引き続き，Γ が通常の集合の場合を取り上げ，可能的最適性や必然的最適性の概念がなぜ必要かを議論しよう．様相制約条件計画法[1,2]では，種々の目的関数の取り扱い方が提案されているが，それらは一つの解の目的関数値の取りうる範囲を考察し，その下限値や上限値，中心値，幅の最適化を行っていた．特に，次の上下限値を同時に最適化する2目的計画問題の完全最適解が存在すれば，最も妥当な解と考えられてきた．

$$\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{maximize}}\ (\min_{\boldsymbol{c}\in\Gamma} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

次の例は，問題(15)の完全最適解が必ずしも理想的な解であるとは限らないことを表している．

例3． 次の A，$\boldsymbol{b}$ をもつ問題(1)を考えよう．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Γ は次式で定められるものとする．

$$\Gamma=\{(c_1, c_2)^{\mathrm{T}} | 7c_1-5c_2\leq 4,\ c_2\leq 2,\ -3c_1+5c_2\geq 2,\ c_1\geq 1\} \tag{17}$$

この問題で，$(1, 1)^{\mathrm{T}}$，$(3, 3)^{\mathrm{T}}\in\Gamma$ を考えると，任意の $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ について，$(1, 1)^{\mathrm{T}}\leq \boldsymbol{c}\leq (3, 3)^{\mathrm{T}}$ が成立する．したがって，問題(15)は，

$$\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{maximize}}\ (x_1+x_2,\ 3x_1+3x_2) \tag{18}$$

となる．図3に示すように，この場合，問題(15)に完全最適解 $\boldsymbol{x}^0=(6, 6)^{\mathrm{T}}$ が存在する．ところが，$\boldsymbol{x}^0$ を最適にする Γ の領域は図3の影の部分で，Γ の残りの部分に比べて小さい．また，この問題の可能的最適解集合は，点 $(6, 6)^{\mathrm{T}}$ と点 $(3, 9)^{\mathrm{T}}$ とを結ぶ線分となることから，$\boldsymbol{x}^0$ は可能的最適解集合の極端な点であることもわかる．このような観点から，$\boldsymbol{x}^0$ が必ずしも最も理想的な解とは言い切れない．

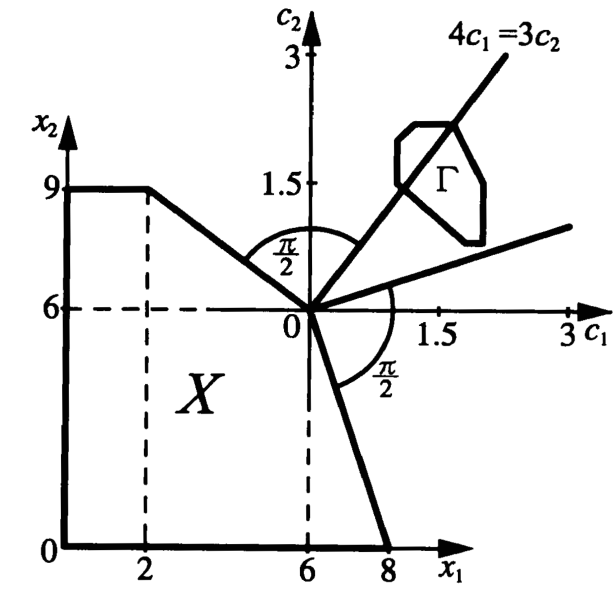

図1　可能的最適解の例

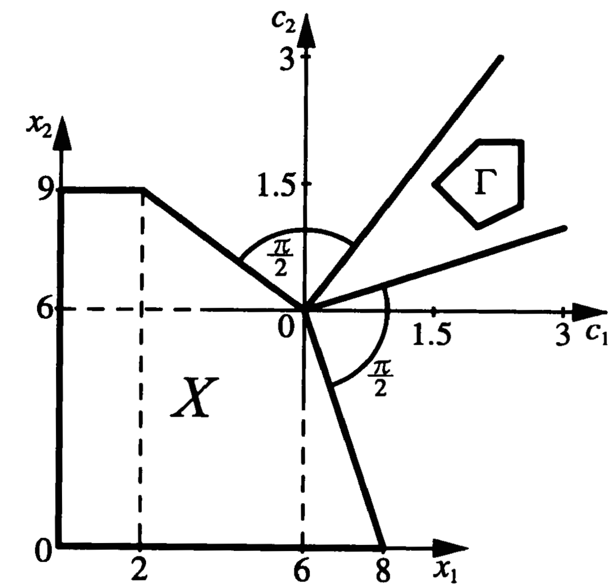

図2　必然的最適解の例

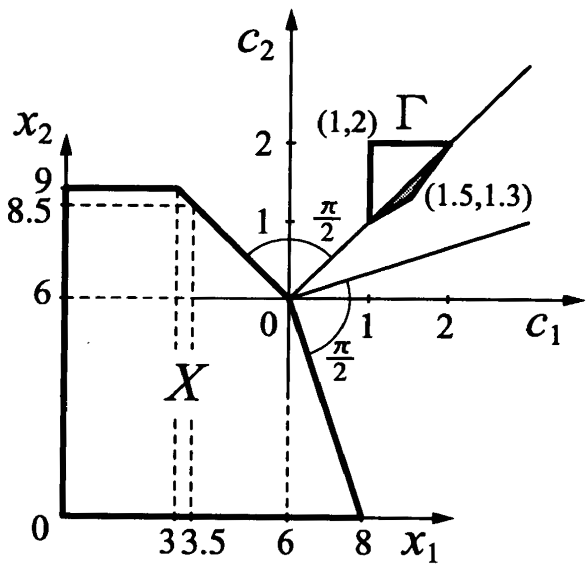

図3　例3の問題での解 $(6, 6)^{\mathrm{T}}$

例3のように，問題(15)の解は必ずしも理想的な解とは言い切れない．例3の問題には存在しないが，必然的最適解が存在する問題においては，取りうる任意の$\boldsymbol{c}\in\Gamma$に対して最適となるので，必然的最適解は最も理想的な解といえる．一方，可能的最適解は，少なくとも一つの$\boldsymbol{c}\in\Gamma$に対して最適となる解で，最低限の合理性を満たす解といえる．このように，可能的最適性は解選択の最低限の規範を与え，必然的最適性は最大限の規範を与えている．

さて，Γがファジィ集合の場合にも，可能的最適解，必然的最適解の概念を導入しよう．この場合，可能的最適解集合ΠS，必然的最適解集合NSはファジィ集合となり，それぞれ，可能性理論に基づき次のメンバシップ関数で定義される[4]．

$$\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\sup_{\boldsymbol{c}}\{\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})\mid \boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{c})\}; & \boldsymbol{x}\in X\text{のとき}\\ 0; & \boldsymbol{x}\notin X\text{のとき}\end{cases} \tag{19}$$

$$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\inf_{\boldsymbol{c}}\{1-\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})\mid \boldsymbol{x}\notin S(\boldsymbol{c})\}; & \\ \quad & \boldsymbol{x}\in X\text{のとき}\\ 0; & \boldsymbol{x}\notin X\text{のとき}\end{cases} \tag{20}$$

明らかに，$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})\leq\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})$，すなわち，$NS\subseteq\Pi S$は成立するが，より強く次式が成立する．

$$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})>0\Rightarrow\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})=1 \tag{21}$$

これは，少しでも必然であるものは完全に可能であるという必然性測度と可能性測度の性質に対応する．

目的関数$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$をもつ線形計画問題の最適解$\boldsymbol{x}$は，すべての$\boldsymbol{y}\in X$について，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$なる実行可能解，あるいは，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$なる$\boldsymbol{y}\in X$が存在しない実行可能解であるといえる．これらに対応して，式(8)，(9)を用いると，$\boldsymbol{x}\in X$とするとき，問題(1)の可能的最適解と必然的最適解について次式が成立する．

$$\begin{aligned}\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})&=\inf_{\boldsymbol{y}\in X}\mathrm{POS}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})\\&=1-\sup_{\boldsymbol{y}\in X}\mathrm{NES}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\mu_{NS}(\boldsymbol{x})&=\inf_{\boldsymbol{y}\in X}\mathrm{NES}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})\\&=1-\sup_{\boldsymbol{y}\in X}\mathrm{POS}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{23}$$

ただし，$\mathrm{POS}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1>\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2)$と$\mathrm{NES}(\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1>\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2)$は，それぞれ，式(8)，(9)で'≥'を'>'，'<'を'≤'に置き換えたもので定められる指標である．

4．可能的最適性と必然的最適性の判定

上述したように，必然的最適性，可能的最適性は，解選択の規範を与えているので，$\boldsymbol{x}\in X$を選択したとき，必然的最適性の度合$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})$および可能的最適性の度合$\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})$を知ることは，$\boldsymbol{x}$の選択の妥当性を考える上で有用となりうる．

$A_{j\cdot}$を行列Aのj行とすると，線形計画問題の最適性条件を用いれば，$\boldsymbol{x}\in X$が$\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{c})$となるための必要十分条件は，

(a) $A_{j\cdot}\boldsymbol{x}-b_j=0$となる$j\in\{1,2,\cdots,m\}$が存在する．

(b) $A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$を満たす$\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}$が存在する．ただし，$A_0$は$A_{j\cdot}\boldsymbol{x}-b_j=0$なるすべての行$A_{j\cdot}$から構成される$A$の小行列である．

なる2条件が成立することである[4]．

以下では，上の条件(a)を満足する$\boldsymbol{x}\in X$を考える．条件(b)より，次式が成立する．

$$\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})=\sup_{\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}\mu_\Gamma(A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}) \tag{24}$$

$$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{c}}(1-\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})\mid\forall\,\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0};\ A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{c}\} \tag{25}$$

Γの有界性とμ_Γの上半連続性より，$\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x})$を求めるためには，式(24)から，計画問題，

$$\text{maximize } h,\ \text{subject to } A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\in[\Gamma]_h,\ \boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0} \tag{26}$$

の最適値を求めればよいことになる．特に，

$$\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})=\min_{k=1,2,\cdots,p}\varphi(\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}) \tag{27}$$

と定められる場合を考える．ただし，$p>n$とし，$\varphi:\mathbf{R}\to[0,1]$は上半連続で非増加な関数で，$\lim_{r\to+\infty}\varphi(r)=0$となる．$\varphi$の擬逆関数$\varphi^*:[0,1]\to\mathbf{R}^n\cup\{+\infty\}$を

$$\varphi^*(h)=\sup_r\{r\mid\varphi(r)\geq h\} \tag{28}$$

と定めると，次式が成立する．

$$\boldsymbol{c}\in[\Gamma]_h\Leftrightarrow\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\leq\varphi^*(h),\ k=1,2,\cdots,p \tag{29}$$

したがって，この場合，次の線形計画問題の最適値$\hat{s}$を求めれば，問題(26)の最適値は$\varphi(\hat{s})$と得られる．

$$\begin{aligned}&\text{minimize } s\\&\text{subject to } \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leq s,\ k=1,2,\cdots,p\\&\qquad\qquad \boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{30}$$

一方，式(25)より，

$$\begin{aligned}&\mu_{NS}(\boldsymbol{x})\geq h\\&\quad\Leftrightarrow(\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})>1-h\Rightarrow\exists\,\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0};\ A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c})\end{aligned} \tag{31}$$

が成立する．$(\Gamma)_{1-h}=\{\boldsymbol{c}\mid\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})>1-h\}$とすると，式(31)より，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\mu_{NS}(\boldsymbol{x})&=\sup\left\{h\,\middle|\,\sup_{\boldsymbol{c}\in(\Gamma)_{1-h}}\inf_{\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}|A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c}|\leq 0\right\}\\&=\max\left\{h\,\middle|\,\max_{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}}\min_{\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}|A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c}|\leq 0\right\}\end{aligned} \tag{32}$$

ただし，$\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$は$(\Gamma)_{1-h}$の閉包である．$(\Gamma)_{1-h}$の有界性，関数$|A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c}|$の連続性により，$(\Gamma)_{1-h}$を$\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$に，sup，infをmax，minに置き換えてい

る．

式(27)のメンバシップ関数で定められるΓを考える．$\bar{\varphi}^*:[0,1]\to\mathbf{R}^n\cup\{+\infty\}$を

$$\bar{\varphi}^*(h)=\begin{cases}\sup_r\{r\mid\varphi(r)>h\} & h>0\text{ のとき}\\ +\infty & h=0\text{ のとき}\end{cases} \tag{33}$$

と定義すると，次式が成立する．

$$\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}\Leftrightarrow \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\le\bar{\varphi}^*(1-h),\ k=1,2,\cdots,p \tag{34}$$

Γの有界性より，$\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$は凸多面体になる．$\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$の頂点集合を$V(\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h})$と記すと，$\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$内の任意の点は$V(\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h})$の要素の凸結合で表される．したがって，$V(\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h})\subseteq Q(h)\subseteq\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$なる$Q(h)$に対して，次式の成立が容易に示せる．

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}}\min_{\boldsymbol{v}\ge 0}|A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c}|\le 0\\ &\quad\Leftrightarrow\max_{\boldsymbol{c}\in Q(h)}\min_{\boldsymbol{v}\ge 0}|A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c}|\le 0\end{aligned} \tag{35}$$

任意の$h\in(0,1]$について，$V(\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h})\subseteq Q(h)\subseteq\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$なる$h$に関する集合値写像$Q(h)=\{\boldsymbol{c}^j(h),\ j=1,2,\cdots,u\}$が存在すれば，$\boldsymbol{c}^j(h), j=1,2,\cdots,u$に対して，計画問題

$$\text{maximize } h,\ \text{subject to } A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}^j(h),\ \boldsymbol{v}\ge 0 \tag{36}$$

の最適値h^jを計算することにより，$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})=\min_{j=1,2,\cdots,u}h^j$と求められる．

上述のような$Q(h)$を構成する$\boldsymbol{c}^j(h)$に$\{1,2,\cdots,p\}$からn個の要素を選んだ集合P_jを対応させ，P_jに応じて決まる次の線形計画問題の最適解における$\boldsymbol{c}$の値を$\boldsymbol{c}^j(h)$とすることが考えられる．

$$\begin{aligned}&\text{minimize } \sum_{k\in P_j}s_k\\ &\text{subject to } \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}+s_k=\bar{\varphi}^*(1-h),\\ &\qquad\qquad k=1,2,\cdots,p\\ &\qquad\qquad s_k\ge 0,\ k=1,2,\cdots,p\end{aligned} \tag{37}$$

P_jは${}_pC_n$個存在するので，任意の$h\in(0,1]$に対して，$Q(h)$はたかだか${}_pC_n$個の要素をもつ有限集合となる．

hを最大化することと，$\bar{\varphi}^*(1-h)$を最大化することが等価であることに注意して，問題(37)を代入すると，問題(36)は次の2段階線形計画問題になる．

$$\begin{aligned}&\text{maximize } -\sum_{k\in P_j}s_k+\varepsilon s\\ &\text{subject to } A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}\\ &\qquad \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}+s_k=s,\ k=1,2,\cdots,p\\ &\qquad \boldsymbol{v}\ge\boldsymbol{0},\ s_k\ge 0,\ k=1,2,\cdots,p\end{aligned} \tag{38}$$

ただし，εは十分小さい（非アルキメデス的な）正数である．問題(38)の最適解におけるsの値を$s(P_j)$とすると，$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})=\min_{j=1,2,\cdots,{}_pC_n}(1-\varphi(s(P_j)))$となる．

このように，$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})$は複数の線形計画問題を解くことにより求められるが，上の方法では，${}_pC_n$回も解く必要があり，必ずしも効率的とはいえない．大域的最適化手法などによる効率的な計算方法の確立が期待される．

可能的最適性，必然的最適性の度合の計算方法を述べたが，すべての可能的最適解，必然的最適解を求めることも考えられる．可能的最適基底解の列挙については，文献[5]で提案されている．これらの方法では，基底解を列挙する度に可能的最適性をテストするのではなく，隣接する基底解の可能的最適性を現在の基底解の情報を用いて判定するなど，計算効率性を上げるための工夫がなされている．必然的最適基底解の列挙については，未だ提案されていないが，かなりの計算量が予想される．

5．必然的ファジィ最適解

先に述べたように，$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})>0$なる必然的最適解は理想的な解である反面，必ず存在するとは限らない．存在しても，$\mu_{NS}(\boldsymbol{x})$の値が極めて小さいことが多い．これは，係数が変動しても厳密な意味で最適解になるという強い条件を課しているためである．

現実問題では，完全な最適解でなくともそれに近い準最適解であれば十分であることも少なくない．この考え方に基づき，最適性を緩和したソフトな最適解として，ファジィ最適解が考えられる[6]．目的関数の係数ベクトルを$\boldsymbol{c}$とする線形計画問題に対するファジィ最適解集合$\tilde{S}(\boldsymbol{c})$は，メンバシップ関数，

$$\mu_{\tilde{S}(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mu_{Dif}\left(\max_{\boldsymbol{y}\in X}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right), & \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x}\in X\text{ のとき} & \\ 0,\quad\text{その他} & \end{cases} \tag{39}$$

により定められる．ただし，$\mu_{Dif}:\mathbf{R}\to[0,1]$は半連続な非増加関数である．式(39)では，目的関数値の最適値からの差（リグレット）に基づいているが，最適値との比に着目すれば，$\forall\boldsymbol{c}\in\Gamma$; $\max_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$の場合には，

$$\mu_{\tilde{S}(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mu_{Rat}\left(\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\max_{\boldsymbol{y}\in X}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}\right), & \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x}\in X\text{ のとき} & \\ 0,\quad\text{その他} & \end{cases} \tag{40}$$

と定めることもできる．ただし，$\mu_{Rat}:(-\infty,1]\to[0,1]$は上半連続な非減少関数である．

厳密な最適性の代わりに上で定義されるファジィ最

適性を用いると，必然的ファジィ最適解集合 $\widetilde{NS}$ が，次のメンバシップ関数で定義される[6].

$$\mu_{\widetilde{NS}}(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{c}} \max\left(1-\mu_{\Gamma}(\boldsymbol{c}), \mu_{\tilde{S}(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x})\right) \tag{41}$$

ただし，式(40)で $\tilde{S}(\boldsymbol{c})$ が定められる場合には，$\mu_{\Gamma}(\boldsymbol{c})>0$ なる $\boldsymbol{c}$ に対して $\max_{\boldsymbol{y}\in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0$ が成立すると仮定される．$\tilde{S}(\boldsymbol{c})$ が式(39)で定義される場合，次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\mu_{\widetilde{NS}}(\boldsymbol{x})\geq h\\ &\Leftrightarrow \max_{\boldsymbol{y}\in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leq \mu_{Dif}^{*}(h),\ \forall \boldsymbol{c}\in(\Gamma)_{1-h}\end{aligned} \tag{42}$$

ただし，$\mu_{Dif}^{*}(h)=\sup\{r|\mu_{Dif}(r)\geq h\}$ である．式(42)は，$\mu_{\widetilde{NS}}(\boldsymbol{x})\geq h$ であれば，$\mu_{\Gamma}(\boldsymbol{c})>1-h$ なる任意の $\boldsymbol{c}$ に対して，最適値からの差が $\mu_{Dif}^{*}(h)$ 以下となることを表している．h が高ければ高いほど，$\boldsymbol{c}$ の広い範囲の変動が捕らえられ，また，最適値からの差 $\mu_{Dif}^{*}(h)$ も小さくなることがわかる．式(40)で定義される場合も同様なことがいえる．

以上より，必然的ファジィ最適性に基づけば，最も合理的な解は次のように定義できる．

$$\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{maximize}}\ \mu_{\widetilde{NS}}(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

この解は最良必然的ファジィ最適解と呼ばれる．

ここで，Γ が通常の集合である場合を考察しよう．式(39)および(40)の場合に，問題(43)を考えると，μ_{Dif}, μ_{Rat} の具体的な設定に依存せず，それぞれ，次の問題の最適解が最良必然的ファジィ最適解になる．

$$\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{minimize}}\ R(\boldsymbol{x})=\max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma,\boldsymbol{y}\in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{44}$$

$$\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{maximize}}\ F(\boldsymbol{x})=\min_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\max_{\boldsymbol{y}\in X}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \tag{45}$$

問題(44)は最大リグレット最小化問題と呼ばれ，その最適解は最大リグレット最小解と呼ばれる．一方，問題(45)の解は最悪達成率最適化問題と呼ばれ，その最適解は最悪達成率最適解と呼ばれる．

これらの解は次の望ましい性質をもつ．

(a) $R(\boldsymbol{x})=0, F(\boldsymbol{x})=1$ のとき，かつそのときに限り，$\boldsymbol{x}$ は必然的最適解である．

(b) $R(\boldsymbol{x})\geq 0, \forall \boldsymbol{x}\in X$ とおよび $F(\boldsymbol{x})\leq 1, \forall \boldsymbol{x}\in X$ が成立する．

(c) 最大リグレット最小解および最悪達成率最適解は，可能的最適解である．

これらの性質より，最大リグレット最小解および最悪達成率最適解は，必然的最適性からの乖離が最小となる可能的最適解であるといえる．

ファジィ必然的最適解，あるいは，最大リグレット最小解，最悪達成率最適解の計算方法を考えよう．紙面の都合上，Γ を通常の集合として，最大リグレット最小解の計算方法を簡単に紹介しよう．

最大リグレット最小化問題(44)は，制約式分離型の min-max 問題であるので，緩和法を適用すると，次のアルゴリズムで解けることになる．ただし，$\varepsilon>0$ は許容誤差を表している．

アルゴリズム

手順1． $\boldsymbol{c}^1\in\Gamma$ を選び，$\underset{\boldsymbol{y}\in X}{\text{maximize}}\ \boldsymbol{c}^{1\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ を解き，最適解を $\boldsymbol{y}^1$ とする．

手順2． $\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{y}^1, r^0=\infty, k=2$ と設定する．

手順3． 次の計画問題を解き，最適解 $\langle \boldsymbol{c}^k, \boldsymbol{y}^k\rangle$ と最適値 r^k を求める．

$$\underset{\boldsymbol{c}\in\Gamma,\boldsymbol{y}\in X}{\text{maximize}}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 \tag{46}$$

手順3． $r^k\leq r^0+\varepsilon$ ならば，終了する．このとき，最適解は $\boldsymbol{x}^0$ で，最適値は r^0 となる．

手順4． $\boldsymbol{x}^0$ と r^0 を，次の線形計画問題の最適解で更新した後，$k=k+1$ として，手順3へ戻る．

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\ \ r\\ &\text{subject to}\ \ \boldsymbol{c}^j\boldsymbol{y}^j-\boldsymbol{c}^j\boldsymbol{x}\leq r,\\ &\qquad\qquad\qquad j=1,2,\cdots,k\\ &\qquad\quad\ \ \boldsymbol{x}\in X\end{aligned} \tag{47}$$

手順1，4の問題は線形計画問題であるので，手順3の計画問題の解法がこのアルゴリズムの効率性を決める．この計画問題は凸最大化問題であるので，外部近似法や切除平面法などの大域的最適化手法を適用する必要がある．各反復でこの問題が解かれるが，制約条件は変化しない．したがって，同じ制約条件をもつ問題を繰り返し解くのに適した解法が有効である．

最悪達成率最適解も同様な方法で解くことができるが，多少，問題に対する仮定が必要になる．一方，Γ がファジィ集合の場合は，上の緩和法と二分法を併用する必要がある．緩和法と二分法を同時に収束させるアルゴリズムが提案されている[6].

6. おわりに

本稿では，可能性計画法における最適性問題について述べさせて頂いた．特に必然的最適解や必然的ファジィ最適解に関する問題は非凸計画問題となることが多い．より高速な解法や，合理性を多少損なっても計算面で優れた近似アプローチなどが期待される．本稿で述べたアプローチは多目的計画問題へも適用されている[1].

最後に，可能性計画法の他のアプローチの現状を述べよう．様相制約条件計画法は，帰着問題が確率計画法の場合より簡単になるので，種々の応用が期待される．しかし，不明確なパラメータ間の従属性があまり考慮されていなかった．最近では，帰着問題の容易さを損なわない範囲で，パラメータ間の従属性が考慮できるモデルが提案されている[7]．一方，リコース計画法は，最近ようやく研究され始めるようになった．

可能性計画法はかなり発展していながらも，未開発の部分も多いので，応用面と理論面の両方での今後の展開が期待される．

参考文献

[1] 乾口，井田："多様な決定を支援する可能性計画法 第1回～第4回"，日本ファジィ学会誌，Vol. 12, No. 1, 10-18, No. 2, 210-217, No. 3, 377-381, No. 4, 507-514 (2000).

[2] Inuiguchi, M. and Ramík, J.: "Possibilistic linear programming", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, 3-28 (2000).

[3] 乾口，久米："可能性分布間の相互関係を考慮したファジィ関係の拡張とファジィ線形計画問題への応用"，システム制御情報学会論文誌，Vol. 3, No. 4, 93-102 (1990).

[4] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: "Possible and necessary optimality tests in possibilistic linear programming problems", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 67, 29-46 (1994).

[5] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: "Enumeration of all possibly optimal vertices with possible optimality degrees in possibilistic linear programming problems", *Proc. of 4th AFSS*, Vol. 1, 386-391 (2000).

[6] 乾口，坂和："ファジィ線形計画問題におけるロバストでソフトな最適化"，日本ファジィ学会誌，Vol. 8, No. 6, 1125-1133 (1996).

[7] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: "Possibilistic linear programming with fuzzy if-then rule coefficients", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 1, No. 1, 65-91 (2002).