解説

離散最適化とその応用

第3回　離散最適化と協力ゲーム(1)

毛利　裕昭

1.　はじめに

1.1　なぜ協力ゲームか？

本連載「離散最適化とその応用」で，今回と次回にわたって「離散最適化と協力ゲーム」に関するアプリケーションを念頭においた解説を行う．「**協力ゲーム**」と絞らずとも，近年は，「**非協力ゲーム**」と関わる離散最適化問題も存在する．しかし，本連載においてはあえて外した．その理由は，以下の2点による，

・「Nash Program によって，協力ゲームは非協力ゲームによって記述可能である」という考え方はあるが，これから取り上げる問題に対して Nash Program はまだ強力なツールにはなっていない．

・経済学からの視点から，近年「非協力ゲーム」がかなり進展し MBA 等の教科書で「協力ゲーム」が取り上げられることは少なく，その有効性の片鱗を紹介したい．

1.2　離散最適化問題を元問題とする協力ゲームの応用例

アプリケーションを意識するという観点からは，所謂「名称のついた離散最適化問題」はなんらかのアプリケーションを意識した（それが Real Problem に直結するかどうかは，その各問題のヴァリエーションの広がり方に依存するのでここでは議論しない）問題である．それらを元にした協力ゲームの解を考えるということは，各離散最適化問題の値が協力ゲームでの**提携値**（**結託値**）に等しい状況を考え，そこで求められる費用や利潤の配分について考えることに他ならない．具体的には以下の二つの問題を考えてみよう．

・あなたは新規に開業したケーブルテレビ会社のケーブル敷設設備担当である．あなたの会社でサービスできる地域で加入者を募集したところ多くの希望者が地域に存在した．ケーブルの敷設コストは1m当たり固定とし，結節部分はその費用に含まれるものとする．希望者にケーブルテレビネットワークを提供し，各顧客からどのくらいの費用を徴収するのが適当か？

・あなたはある会社のビル管理会社のエレベータチェックを行う担当である．そして，定常業務として1日で回れる指定された範囲のビルのエレベータをすべてチェックする．各ビルのチェック費用は固定としてあとにかかるのは交通費である．あなたが，効率的に各ビルを順に訪問したとき，各ビルのオーナからどのように費用を回収すべきか？

前者が，離散最適化問題「最小全域木（全張木）問題」（以降，本稿では「最小全域木」問題）を元にする「**最小全域木ゲーム**」の配分解を求める問題，後者は，「巡回セールスマン問題」を元にする「**巡回セールスマン・ゲーム**」の配分解を求めることに相当する．

これらの具体的例から離散最適化問題を元にした協力ゲームが，様々なシステムの分割および配分の問題の定性的定量的な性質を明らかにするかわかるであろう．

1.3　特性関数形ゲームの予備知識

ここでは，本解説論文で用いる**特性関数形ゲーム**の予備知識について述べる．協力ゲームにおいては，ゲームに参加する参加者のことを**プレイヤー**と呼ぶ．このプレイヤーの集合を N と表現する．N の部分集合のことを**提携**と呼ぶ．v は，すべての提携に対してその提携の結果得られた利潤および費用の値を求める関数である．

$$v : 2^N \to R \tag{1}$$

ただし，$v(\phi)=0$ とする．

多くの教科書では，利潤の観点から協力ゲームを記述している．本解説では，利潤と費用両方の観点が混在している．前者に関するゲームは**利潤ゲーム**(Profit Game)，後者に関するゲームは**費用ゲーム**(Cost Game)と呼ばれる．この二つのゲームはその性質を記述する際，集合の包含関係や不等式の向きが逆になる等があり注意を要する．一般的な教科書では利潤ゲームで記述されている．ここでは，教科書ではあ

もうり　ひろあき
早稲田大学 商学部
〒169-8050 新宿区西早稲田 1-6-1

まり用いられない費用ゲームの形で用語の記述をする．N と v によって表現される協力ゲームを**特性関数形ゲーム**（N, v）と呼ぶ．なお，ここではプレイヤー間で効用の譲渡が可能な場合のみを考える．

特性関数形ゲームの解のいくつかの良く知られた解を紹介しておく．

1.3.1 コア

コアとは，次の式で定義される費用配分集合である．x_i を各プレイヤーの費用配分とする．そのベクトル表現を x とする．

$$\left\{x \in R^{|N|} \middle| \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \forall S \subseteq N\right\}$$

この定義式は，「プレイヤーのいかなる提携に対してもその提携が実現する値 $v(S)$ を費用配分の和を上回ることがない」ことを意味する．コアに属する費用配分を各プレイヤーが受け取ることは，この費用ゲームのプレイヤーに対して提携する根拠の一つを与えている．

1.3.2 Shapley 値

Shapley 値とは，プレイヤー i の限界貢献度の重みづけによって表現され

$$x_i = \sum_{S: i \in S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} \times \{v(S) - v(S - \{i\})\}$$

と表現され一意解である．この解は，四つの公理（公準）から導出される．また，様々な条件を満たす解として知られている．

1.3.3 仁

仁とは，提携 S の費用 $v(S)$ とそのプレイヤーの費用配分の和の差 $e(S, x) = \sum_{i \in S} x_i - v(S)$ を不満と定義し，「最大不満の最小化」によって得られる費用配分の解である．この不満は，ある x に対して N の提携すべてについて定義できるから，その $2^{|N|}-1$ 個の不満を不満の大きいものから順番に並べたベクトル

$$\theta(x) = (e(S_1, x), e(S_2, x), \cdots, e(S_{2^{|N|}-1}, x))$$

$\theta(x)$ を不満ベクトルという．任意の二つの最大の不満同士を比較することを考える．この比較にするため，以下に述べる辞書式順序（Lexicographic Order）で考える．二つのベクトル $x = (x_1, \cdots, x_{|N|})$ と $y = (y_1, \cdots, y_{|N|})$ に対して，辞書式順序の意味で大きいとは

$$\exists k \in \{1, \cdots, |N|\} x_i = y_i,$$
$$i = 1, \cdots, k-1 \ \ and \ \ x_k > y_k$$

が成り立つことである．y が x よりも受容的であるとは，$\theta(x) >_L \theta(y)$ で表現する．この否定は $\theta(x) \leq_L \theta(y)$ とする．仁とは，全体合理性（$\sum_i x_i = v(N)$ が成り立つ）および個人合理性（各 i に対して $x_i \leq v(\{i\})$ が成り立つ）を満たす費用配分ベクトルの集合を H として

$$\{x | \theta(x) \leq_L \theta(y) \ \ \forall y \in H\}$$

を満たす解である．この仁も一意解であり，コアが非空の場合コアに属する．これは線形計画法を有限解繰り返して得ることができる．具体的な解の導出については鈴木[20]を参照されたい．

1.4 1回目の問題の対象

離散最適化問題に多少でも心得がある読者諸氏は，ある離散最適化問題が**計算の複雑性の理論**における $\mathcal{NP}$ **困難**な問題であるのか，そうでないのかが重要であることをお分かりであろう（**計算の複雑性の理論**に関しては，渡辺[22]を参照されたい）．さらに，既存のよく知られた協力ゲームの解を直接計算するためには，全部の提携に対する値が必要とされる．そのためにはプレイヤーの集合を N とすると，$2^{|N|}-1$ 回対象となる「離散最適化問題」を解かねばならない．これは，プレイヤーの数が多ければ，このプレイヤーの数に対して指数的に増加する計算回数を克服する手段があれば望ましい．元の離散最適化問題が，多項式オーダー（つまり $\mathcal{P}$ に属する）の問題である方が，扱いやすい問題である．1回目では，以下の元問題が多項式オーダーの問題を取り上げ解説を行う．

(1) **最小全域木ゲーム**

(2) **生産計画ゲーム**

(3) **フローゲーム**

特に，**最小全域木問題ゲーム**については問題設定もわかりやすくその研究の歴史も長いため本解説の多くを割く．

2. 最小全域木ゲーム

2.1 最小全域木問題

最初に取り上げる離散最適化問題は，**最小全域木問題**である．この問題は，単純な連結グラフ $G(N, A)$ 上で，アーク集合 A の要素である各アークには，費用が定義されており，すべてのノード集合 N のすべての要素を最小費用で結合させる木を構成するものである．

この問題に関しては，Kruskal や Prim の多項式オーダーのアルゴリズムが，標準的なグラフ理論や離散数学の教科書に紹介されている（例えば，伊理[18]を参照）．教科書では，**最小全域木問題**や**最小全張木問題**ではなく**最小木問題**という名で記述されていることもある．

2.2 最小全域木ゲーム既存研究の概略

最小全域木ゲームを考えるとき，CATV や電力供

給のような例が想定されている．そのため根付き木が前提とされておりそのルート（根）として考えているものは，電力やその他のものを供給するノードである．プレイヤーとしては，このルートノードは含まれず，他の顧客に対応するノード集合がプレイヤーとなっている．この問題に対する最初の重要な研究は，Bird [2]によるものである．ここでは，この問題を協力ゲームの枠組みのなかで明確に定式化して，いくつかの重要な性質を証明し，費用配分法の提案を行っている．また，Granot and Huberman[9]は，この問題に関して，Bird の費用配分法がコアにあることを示した．また，計算量の理論の立場からは，Megiddo[15]の論文が，全部の提携の値を求めなければいけないという困難な問題に関して，特定の問題のクラスに対しては仁が，多項式のオーダーで計算可能という結果を出している．しかし，一般には仁の計算に関してそれが $\mathcal{NP}$困難であることを Faigle et al.[7]では示している．一方，計算量の問題とは直接には結びつかないが，Birdの解の公理論的な性質を論じたものは，Feltkamp et al.[8]である．このような解の公理系の議論はゲーム論では重要である．

2.3 特性関数形ゲーム表現

最小全域木ゲームの特性関数形表現は以下のとおりである．

単純な連結グラフ $G(N\cup\{0\}, A)$（ここで，0はルートノードである）Nはルートノードを除くすべてのノード集合で，プレイヤー集合でもある．ここですべてのアークには費用 c_{ij} が定義されているものとする．すべての提携 $S\subseteq N$ に対して上記のグラフ上で $S\cup\{0\}$ に関して最小全域木のアーク集合を $T(S)$ とすると，特性関数（費用関数）val は以下のように表現できる．

$$val(S)=\sum_{(i,j)\in T(S)} c_{ij} \tag{2}$$

図1に最小全域木ゲームを考察するための図を示す．この例では，$val(\{3\})=5\leq val(\{2,3\})=4$ は成立しない．つまり，このゲーム (N, val) においては，提携集合が拡大されることによって費用が増加しないことがわかる．

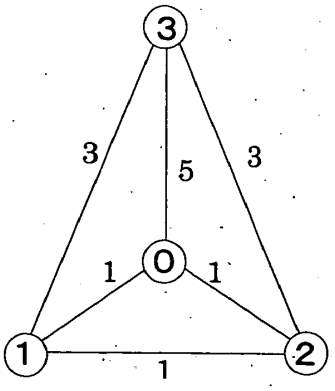

図1　最小全域木ゲームのためのグラフ例

ゲーム (N, v) **が，** monotone であるとは，以下のことが成立することである．つまり提携が拡大するにつれ費用が増加するという単純でよい性質である．

$$v(S)\geq v(T)\,\forall S, T\subset N,\ T\subset S \tag{3}$$

図1は，monotone ではないゲームの例であることが分かる．monotone であるように val を修正するには，以下のようにすればよい．

$$v(S)=\min\{val(M):\ S\subseteq M\subseteq N\} \tag{4}$$

元のゲーム (N, val) においても，上記のように修正したゲーム (N, v) においても subadditive である．

ゲーム (N, v) **が，** subadditive であるとは，以下のことが成立することである．二つの任意の $S\cap T=\phi$ を満たす提携 S と T に対して $S\cup T$ を考えたとき，$S\cup T$ の提携値は，S の提携値と T の提携値の和以下という性質である．

$$v(S)+v(T)\geq v(S\cup T)\ \ \forall S, T\subseteq N \tag{5}$$

さらには，このゲームに関しては，totally balanced であることが，Granot and Huberman[9]によって証明されている．離散最適化の立場から，Curiel [4]が Edomonds[5]の結果を元に別の証明を与えている．

ゲーム (N, v) **が，** totally balanced であるとは，このゲームの各サブゲームが balanced なことである．実は，balanaced **であることとコアが非空であることは同値**であるのでこの性質は非常に重要である．つまり，totally balanced **が，最小全域木ゲームについて成立する**ことによって**最小全域木ゲームにおいて協力ゲームの集合解の一つであるコアの存在する**ことが証明される．

さて，離散最適化理論（特にマトロイド理論）において非常に重要でかつエレガントな性質は，対象とする関数が**劣モジュラ性を持つ**ことである．ある関数 c が劣モジュラであるとは以下の式が成り立つことに他ならない．

$$c(S)+c(T)\geq c(S\cup T)+c(S\cap T)\ \ \forall S, T\subseteq N \tag{6}$$

協力ゲームの理論でこれを解釈しなおせば，提携が大きくなるにつれ費用は非増加であることに他ならない．経済学的な意味がこの解釈には含意されている．Shapley[17]は，Edomonds[6]が**劣モジュラ関数（マトロイド）の理論**を研究するのとは独立にこの**凸（この場合は費用で考察しているので凹）ゲーム**の理論をほぼ同時期に打ち立てていた．

2.4 Birdによる配分解

上述した(4)により val を v に修正した最小全域木ゲーム (N, v) では，コアつまり集合解が常に存在する．これは，ゲームとして特定のよい性質の一つである．しかし，コアや安定集合のような集合解は実際のReal Problemに直面する実務家にとってはその中のどこを特定すればよいのか迷ってしまうであろう．Bird[2]は，以下のような配分解の提案をしている．これをBird Allocationと呼ぶ．図1における，プレイヤー1, 2, 3のBird Allocationは，(1, 1, 3) である．

「まず，各プレイヤー i に対して与えられた単純な連結グラフ $G(N\cup\{0\}, A)$ における最小全域木 T_{min} でルートノード0から i のパスを考える．このパスは，一意に決定されることは容易に分かる．このことを利用してBird Allocationは，そのノードがユニークに支払うべきアーク費用を支払うもの」として提案された．しかし，これには欠点がある．今，最小全域木を T_{min} と書くこととする．この T_{min} に一意性があることが保証されていないことが問題である．しかし，Bird Allocationはその構成方法から明らかにコアに属している．これは，T_{min} が一意であるときには，実用的かつ理論的によい性質をもっていることを裏づけることに他ならない．また，T_{min} が一意に決まらないとしても，コアだけの情報よりも有効であることには違いない．ちなみに，図1において T_{min} は，一意に定まらない例である（構成するアーク集合が $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ と $\{(0, 2), (1, 2), (2, 3)\}$ の二つの場合がある）．

2.5 一意解に関する計算量の克服

Megiddo[15]は，協力ゲームの一意解を求めるにあたっての計算量の問題を非常に意識したものであった．これは，Megiddoが内点法の業績をあげる以前の仕事であることも注目しておくべきことであろう．Megiddoは，最小全域木ゲームの特定のクラスの問題では，そのShapley値と仁が多項式時間で求められることを示した．仁はコアが存在すればその中に必ずあることは既知の事実であるのでこの研究の意義は大きい．このことに刺激を受けたと思われるGranot and Huberman[10]は，最小全域木ゲームが鎖(chain)である問題に関して一意解である仁が実質的に多項式オーダーで求めることができることを示している．ただ，一般的に最小全域木ゲームで仁の計算量は，$\mathcal{NP}$困難であることがFaigle et al.[7]によって証明された．最小全域木ゲームは，離散最適化とゲームの狭間の問題で一番最初に手がつけられたものであるが，Megiddo[15]とFaigle et al.[7]の発表年代の差からはいかにこの問題に結論を得るのが難しかったか，または，ゲーム理論と離散最適化双方の分野で独立した形で研究が進められたことの結果ではないかと想像される．この節の最後に，上記で述べたsub-modular性の議論を考慮して凸ゲームの仁が多項式時間で求まることを述べたKuipers[14]は一読に値すると筆者は評価している（ただ，発表した当時で最新の結果を引用していない）．

3. 生産計画ゲーム

ここで取り上げる「**生産計画ゲーム**」は，英文では“Linear Production Game”であるが，習慣的にそのように呼ばれているのでこの日本語名称を用いる．離散最適化に直接は関係しないが，次に述べる「**フローゲーム**」との関係上重要かつ，解説を行う上では基礎的なものなので取上げる．この**生産計画ゲーム**は，Owen[16]に端を発するものである．

3.1 生産計画問題

元問題の**生産計画問題**は，以下のような典型的な線形計画問題である．

(記号)

p：生産物の種類数

m：原材料の種類数

e_j：生産物 j の一単位生産することによる利益

a_{ij}：生産物 j を一単位生産するために必要な原材料 i の量

b_i：利用可能な原材料 i の量

(定式化)

$$\max \quad \sum_{j=1}^{p} e_j x_j \tag{7}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1, \cdots, m \tag{8}$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, \cdots, p \tag{9}$$

この基本的線形計画問題は，m 種類の原材料から n 種類の生産物を生産して最大利益をあげるための問題である．

3.2 生産計画ゲームの定式化

元の最適化（線形計画）問題から，どのようなゲームを想定するのかを述べる．このゲームでは，各プレイヤー l が自分の持っている原材料 b_i^l を提供するものとする．よって，任意の提携 $S\subseteq N=\{1, \cdots, n\}$ に対して，原材料 i の総量は以下のようになる．

$$b_i(S)=\sum_{l\in S} b_i^l \tag{10}$$

式(8)の制約式を式(10)で置き換えることに得られる生

産計画問題の目的関数の値を $v(S)$ とする特性関数とするゲーム (N, v) が**生産計画ゲーム**である．ここでは，実際に何者が生産物を作るかは議論しないこととする．よってその生産コストも同様に詳細には議論しない（しかし，暗に e_j が生産コストを含むと考えることはできる）．

3.3　コアの存在と計算

集合解であるコアが非空か，その計算は具体的にどうするかという問題を双対性を考えることによって簡単に示せる．以下の双対問題を考えればよい．

$$\min \quad \sum_{i=1}^{p} b_i(S) y_i \tag{11}$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq p_i \quad j=1, \cdots, m \tag{12}$$

$$y_i \geq 0 \quad i=1, \cdots, p \tag{13}$$

この双対問題の最適解 y_i^* は，シャドウプライスであるからプレイヤー l にとっての原材料 i の価値は以下のとおりである．

$$\sum_{i=1}^{p} b_i^l y_i \quad l=1, \cdots, n \tag{14}$$

これが，双対定理からコアに属した配分であることは容易に証明できる（今野[19]を参照）．

上記の結果から双対問題に解が存在する生産計画問題を元にした**生産計画ゲームは** totally balanced であることは明らかである．つまり，このことでコアの存在の有無は議論できる．

3.4　生産計画ゲームその後

Granot[11]では，Owen[16]の以下の条件を一般化したものである．**一般化生産計画ゲーム**（Generalized Linear Production Game）と名付けている．

$$b_i(S) = \sum_{l \in S} b_i^l \tag{15}$$

各原材料の和という考え方を取り払っているGranot[11]では，例として各プレイヤーが提携すれば各プレイヤーの原材料の単純な和ではなくそれ以上になる方が自然であることを述べている．さらには，このゲームがあとで述べるフローゲームへのつながりを持つことについても言及している．この論文の一番主たる結果は，**一般化生産計画ゲームも totally balanced** であることの十分条件を与えたことである．生産計画という OR の基本に言及しているこの問題は，次節のフローゲームとともに**線形計画ゲーム**として主な性質はまとめることができる．ここでは，応用での立場を考えて意図的に節を別立てにした．

4.　フローゲーム

上記に述べたように，**「フローゲーム」**も線形計画ゲームの一種であるが，元問題が離散最適化問題ということが明確になるので応用の視点から定式化と主たる性質を述べる．

4.1　フローゲームの定式化

フローゲームの元となる離散最適化問題は**最大流問題**である．この問題に関しては，読者諸氏には説明が必要もないと思われるので最大流問題に対してどのようなゲームを考えているかを述べる．**有向**グラフ $G(N, A)$ において各アークに対しては，所有権がありその所有権を持つものをプレイヤーとする．各アークには容量制約がついている．提携するプレイヤーが所有権を持つアークによってグラフが構成されるためそのグラフを G_S と書くことにする．各 G_S に対する最大流を提携値 $v(S)$ と考えるゲーム (N, v) がフローゲームである．

4.2　フローゲームの性質

まず，最大流問題自身が線形計画問題で記述できることは言うまでもない．生産計画問題の節で述べた線形計画問題を一般化すれば，すぐにその結果が適用できることは明らかである（鈴木・武藤[21]参照）．その議論から**線形計画ゲームは，totally balanced である**という結論はすぐに得られ，フローゲームにも適用でき，コアの存在が議論可能なことは明らかである．このことは，上記に述べた Granot[11]にも触れられており，その参照文献である Kalai and Zelmel[13]で十分に論じられている．Granot and Granot[12]は非常に重い論文であるが，問題に対するモチベーションそして必要なゲーム理論の必要事項もまとめられている上で多くの例をあげながら数学的な性質が議論されている．この論文は Granot[11]の参考文献から，元となる Working Paper は1984年に発表されており正式に掲載されるまで多くの年月が費やされたことが分かる．ここでは十分にそのエッセンスを紹介しきることができないので興味がある読者諸氏は論文を手に入れられて直にその目でご覧になることをお薦めする．

4.3　フローゲームのその後

この問題に関しては，数学的な性質に関しては，先の生産計画ゲームとともに線形計画ゲームということでかなりのことが調べられている．派生したモデルとしてアプリケーションの立場から興味深いのではないかと考えられるのは以下のものがある．

(1)　容量が1で各プレイヤーは一つのアークしか所有できないというシンプル・フローゲーム

(2)　アークの所有権をそのときに組んだ提携でコントロールできるフローゲーム

ただ，どういったReal Problemに発展する可能性があるかはこれからの仕事になろう．

5．おわりに

本連載の中では2回にわたるテーマであるが，最先端の解説をするという動機ではなく余り知られていない重要な結果を手に入れるための指針となればと思い本稿を執筆した．離散最適化とゲーム理論の境界分野は，重要なアプリケーションを多々持ちながらあまり知られていないのではないかというのが筆者の認識であるためである．今回，最小全域木ゲームには多くの紙数を割いたが，それでも十分ではなかったと考えている．2回目は，元となる離散最適化問題が$\mathcal{NP}$困難である場合の協力ゲームであるが，これはまさに発展途上の研究領域でエレガントな結果を容易に得るのは困難であるが，アプリケーションの需要は非常に大きいというのが筆者の認識である．

謝辞　本稿は早稲田大学特定課題研究助成費2002 A-063の成果の一部である．

参考文献

[1] J. M. Bilbao, *Cooperative Games On Combinatorial Structures,* Kluwer Academic, 2000.

[2] C. G. Bird, On Cost Allocation for a Spanning Tree, *Networks*, Vol. 6, pp. 335-350, 1976.

[3] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications,* Kluwer Academic, 1997.

[4] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications,* Doctororal Dissertation, Katholieke Universieit van Nijmengen, 1988.

[5] J. Edomonds, Optimun Branchings, *Natational Bureau of Standards Journal Research.,* Vol. 71 B, pp. 233-240, 1967.

[6] J. Edomonds, Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedra, *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Stuructures and Their Applications,* Gordon and Breach, New York, N. Y., pp. 69-87, 1970.

[7] U. Faigle, W. Kern and J. Kuipers, Computing the Nucleolus of Min-Cost Spaning Tree Game is NP-hard, *International Journal of Game Theory,* Vol. 27-3, pp. 443-450, 1998.

[8] V. Feltkamp, S. Tijs and S. Muto, Bird Tree Allocation revisited, *CentER Discussion Paper 9435,* Tilburg University, Tilburg, The Netherlands.

[9] D. Granot and G. Huberman, Minimum Cost Spanning Tree Games, *Mathematical Programming,* Vol. 21, pp. 1-18, 1981.

[10] D. Granot and G. Huberman, On The Core and Nucleolus of Minimum Cost Spanning Tree Games, *Mathematical Programming,* Vol. 29, pp. 323-347, 1984.

[11] D. Granot, A Generation Linear Production Model, *Mathematical Programming,* Vol. 34, pp. 212-222, 1986.

[12] D. Granot and F. Granot, On Some Network Flow Games, *Mathematics of Oerations Research,* Vol. 17, pp. 792-841, 1992.

[13] E. Kalai and E. Zemel, Genaralized Network Problems Yieding Totally Balanced Games, *Operations Research,* Vol. 30-5, pp. 998-1008, 1982.

[14] J. Kuipers, A Polynomial Time Algorithm for Computing the Nucleolus of Convex Games, *Maastricht University, Mathematics Reports in Operations Research and Syetems Theory,* Report M 96-12, pp. 1-18, 1996.

[15] N. Megiddo, Computational Compulexity of the Game Theory Approach to Cost Allocation for a Tree, *Math. Oper. Res.,* Vol. 3, pp. 189-196, 1978.

[16] G. Owen, The Core of Linear Production Games, *Mathematical Programming,* Vol. 9, pp. 358-370, 1975.

[17] L. Shapley, Cores of Convex Games, *Int. J. Game Theory,* Vol. 9, pp. 358-370, 1975.

[18] 伊理，白川，梶谷 他，演習グラフ理論，コロナ社，1983.

[19] 今野浩，線形計画法，日科技連，1987.

[20] 鈴木光男，新ゲーム理論，勁草書房，1994.

[21] 鈴木光男，武藤滋夫，協力ゲームの理論，東京大学出版会，1985.

[22] 渡辺浩，計算可能性・計算の複雑さ入門，近代科学社，1992.