解説

離散最適化とその応用

第4回　離散最適化と協力ゲーム(2)

毛利　裕昭，岡本　吉央

1．はじめに

「離散最適化とその応用」の連載も今回で4回目となるが，今回は前回に引き続き「離散最適化問題から生じる協力ゲーム」の解説を行う．前回は，多項式時間で解ける離散最適化問題から生じる協力ゲームについて取り上げたが，今回は$\mathcal{NP}$困難である離散最適化問題から生じる協力ゲームを扱う．特に，本稿では応用を念頭において以下の協力ゲームを紹介したい（$\mathcal{NP}$困難性など，計算量に関する用語については渡辺[22]などを参照されたい）．

(1) 巡回セールスマンゲーム
(2) 施設配置ゲーム
(3) 箱詰めゲーム（これのみProfit Gameで，その他はCost Game）
(4) ネットワークデザインゲーム

これらの協力ゲームの応用については，そのゲームの名前からすぐに想像できるであろう．紙面上の制約により，多くの読者に馴染み深いと思われる(1)について詳しく説明し，他の協力ゲームについては簡単な説明にとどめる．

個々のゲームの解説に移る前に，離散最適化問題から生じる協力ゲームの解を求める際の，計算量の観点から見た困難さについて再確認したい．コア，仁，Shapley値などに代表される協力ゲームの解を直接計算するためには，一般にすべての提携情報が必要である．これは元の離散最適化問題の最適解をすべての提携に関して求めることに対応する．しかし，今回扱う協力ゲームのように，元の離散最適化問題が$\mathcal{NP}$困難な場合には，短時間で最適解を求めることが絶望視されている．さらに，プレイヤーがn人の場合には提携が2^n-1通り存在するため，協力ゲームの解を単純なやり方で求めるには元の離散最適化問題を指数回解く必要が生じる．したがって，たとえ元の離散最適化問題が$\mathcal{NP}$困難でなかったとしても，全体として多大な計算量が必要となる．このように，協力ゲームの解を求める際には計算の困難さが二重に伴うことを念頭において，以下の解説を読んで頂きたい．

2．$\mathcal{NP}$困難な離散最適化問題から生じる協力ゲーム

本節では，$\mathcal{NP}$困難な離散最適化問題から生じるいくつかの協力ゲームについて紹介するとともに，それらのゲームのプレイヤー集合と特性関数を明確にする．

2.1　巡回セールスマンゲーム

ご存じのように，巡回セールスマン問題は，セールスマンがいくつかの都市を巡回する際の経路の長さを最小にしようという問題である．ここでセールスマンを政治家，芸能人などの著名人に置き換えて，各都市ごとに講演をするような場合を考えてみよう．この場合，その講演者は各都市から依頼されて講演に行くので，その移動費用は訪問先の都市が負担するのが当然である．このとき，講演者の総移動費用を各都市がどのように分担するが適当か，ということを考えるのが巡回セールスマンゲームである．このゲームにおいては，プレイヤー集合Nは訪問先の都市全体となり，Nの部分集合Sに対する特性関数$v(S)$の値は，Sに含まれる都市のみを巡回する際の経路の最小距離によって定められる．このゲームについては，節3にてより詳しく説明を行う．このゲームにおける費用分担の発想は，「巡回セールスマンゲーム」という名前が論文に登場する以前に存在しており，Fishburn and Pollak[10]の論文に見受けられる．なお，この論文

もうり　ひろあき
早稲田大学 商学部
〒169-8050 新宿区西早稲田1-6-4
おかもと　よしお
スイス連邦工科大学
Institut für Theoretische Informatik, ETH Zürich, CH-8092, Zürich, Switzerland

の著者の一人であるPollakは，上記で説明した巡回セールスマンゲームにおける著名人の立場に立って飛行機でいろんな都市を回って講演することがあったらしく，このゲームのことを「エアプレーン問題」と呼んでいたとのエピソードがAlbers and Alexanderson[1]に紹介されている．

2.2 施設配置ゲーム

パソコンなどの同一種類の商品を生産しているいくつかの企業が，その商品を生産するための原料を工場に配送する際の費用を削減するために，共同で複数箇所に配送センターを建設する計画をもっているとする．ここで，配送センターの建設候補地と各企業の工場との間の1日当たりの輸送費用や配送センターの建設費用が前もって分かっているものとする．さらに，配送センターの1日当たりに配送可能な原料の量や，各工場が1日当たりに必要とする原料の量についても既知であると仮定する．このような状況の下で，建設した配送センターからすべての工場に必要な分量の原料を配送することが可能という条件を満たしながら，配送センターの建設費用と原料の輸送費用との総和を最小にするように配送センターの建設場所を定めるのが施設配置問題である．一方，配送センターの建設に関連する諸費用を各企業間でどのように分担するかを考えるのが，施設配置ゲームである．このゲームでは，プレイヤーの集合Nは企業の集合により与えられる．また，Nの部分集合Sに対する特性関数値$v(S)$は，Sに含まれる企業だけを考えて施設配置問題を解いた際の最適値により与えられる．Goemans and Skutella[11]は，特定の条件をもつ施設配置問題から生じるゲームのコアが非空であることと，元の施設配置問題の線形計画緩和に整数ギャップが存在しないことが同値であることを示すとともに，この結果を踏まえてコアが非空な場合にその一点を多項式時間で求めるアルゴリズムを提案している．

施設配置問題はp-center問題やp-median問題などの多種多様なバリエーションをもっているので，それに対応して施設配置ゲームも様々なバリエーションが存在する．これらの施設配置ゲームについては，Curiel[4]において“Location Game”の名で一つの章を割いて詳細に記述されている．

2.3 箱詰めゲーム

様々な大きさの荷物と，それを収納するための様々な容量をもついくつかの箱が与えられているとき，各箱の容量を満たしつつ，なるべく多くの荷物を箱に詰める方法を考えるのが，箱詰め（ビンパッキング）問題である．この箱詰め問題から様々な協力ゲームを考えることができるが，ここではFaigle and Kern[8]において扱われている箱詰めゲームを紹介する．この箱詰めゲームでは，プレイヤー集合Nは荷物の集合と箱の集合の和集合として与えられる．また，Nの部分集合Sに対する特性関数値$v(S)$は，Sに含まれる箱のみを使ってSに含まれる荷物のみを詰め込んだときの最大の収納可能量により与えられる．これを顧客からの収納収益と読み替えることができる．実務的な問題への応用として，複数の倉庫会社が各々の倉庫を共同運用する際への適用が考えられる．倉庫会社がそれぞれの所有する倉庫を供出し，各会社の各々の荷物を倉庫へ収納する際の収益配分方法を考えるというものである．ただし，現在の箱詰めゲームに関する研究は一次元箱詰めの場合が中心で，また応用を意識した研究はこれまでのところほとんど存在しない．また，この協力ゲームの理論的な研究はあまり進んでおらず，特定の場合におけるコアの存在条件が知られている程度である．

2.4 ネットワークデザインゲーム

通信ネットワークの構築を例にとって，ネットワークデザイン問題を説明しよう．通信ネットワークは，端末群とそれらの端末間を結ぶ通信線群により構成される．通信ネットワークの構築をするとき，端末間の通信線を敷設するために費用がかかる．また，通信ネットワークを運用する際には端末間に通信のフローが流れ，フロー量に比例した費用がかかる．各端末間の通信需要が前もって分かっているという仮定のもとで，通信線の敷設費用とフロー費用の総和を最小にするネットワークを決定する問題が，ネットワークデザイン問題である．このネットワークデザイン問題から様々な協力ゲームを考えることができる．例えば，各端末をプレイヤーと見なす場合や，端末のペアをプレイヤーと見なす場合などが考えられるが，ここでは，プレイヤー集合Nが端末集合で与えられている場合について説明する．この場合，端末の部分集合Sに対してその特性関数の値$v(S)$は，Sに含まれる端末のみを考慮した場合のネットワークデザイン問題の最適値により与えられる．このゲームに対しては，Kubo and Kasugai[12]がコアの一点を近似的に多項式時間で求める研究をしている．また，Mohri[15]は，全体合理性（パレート最適性）を満たすためにネットワークデザイン問題を1回解くだけで求められる費用配分

解を示した.

3. 巡回セールスマンゲーム

この節では，巡回セールスマンゲームに焦点を置いて，その理論的な側面の話を展開していく.

3.1 巡回セールスマンゲームの定義

巡回セールスマンゲームをしっかり定義するところから始めよう．そのためにまず，巡回セールスマン問題を導入する．巡回セールスマン問題は最適化問題である．巡回セールスマン問題の入力は，非空な有限集合 N と，N の直積 N^2 上の非負の費用関数 $c: N^2 \to \mathbf{R}_+$ の二つで与えられる（費用関数 c は，$|N|$ 次の非負正方行列であると思ってもらってよい)．この入力に対して，巡回セールスマン問題の許容解（実行可能解ともいう）は，N の順列で，サイクルの数が一つだけのものである．これは，N を頂点集合とし，すべての頂点の間に有向辺が両向きについている有向グラフの上で，すべての頂点をちょうど1回ずつ回ってきて再びスタートの頂点に戻ってくるような閉路（ハミルトン閉路と呼ばれる）を考えることと同じである．巡回セールスマン問題の目的関数は，この閉路に現れる辺 e に付随する費用 $c(e)$ の和である．そして，この目的関数を最小にするような許容解を見つける問題が巡回セールスマン問題である.

この定義より，費用関数 c に対して，「すべての $i \in N$ に対して $c(i, i)=0$ である」と仮定しても，許容解全体の集合と目的関数値が変わらないので，今後，一般性を失わずにこれを仮定していく．なお，巡回セールスマン問題そのものに関する情報が Cook により集められていて，プリンストン大学にある WEB サーバを通じて公開されている[21]．このページはすこぶる興味深いので，ぜひ訪ねてみていただきたい.

巡回セールスマン問題の定義が終わったので，引き続いて，巡回セールスマンゲームを定義する．巡回セールスマンゲームは特性関数形の協力ゲームである．プレイヤーの集合を N として，特性関数を $v: 2^N \to \mathbf{R}_+$ とする（ここで，2^N は N の部分集合全体の集合で，N のべき集合と呼ばれるものである)．巡回セールスマンゲームでは，まず，N の要素でない o を用意して，$N \cup \{o\}$ を考える．そして，巡回セールスマン問題のときと同様に，費用関数 $c: (N \cup \{o\})^2 \to \mathbf{R}_+$ が与えられている．このときに，提携 $S \subseteq N$ の特性関数値 $v(S)$ を，集合 $S \cup \{o\}$ と費用関数 $c|_{S\cup\{o\}}: (S \cup \{o\})^2 \to \mathbf{R}_+$ を入力とする巡回セールスマン問題の最適値と定義する．ここで，$c|_{S\cup\{o\}}$ は費用関数 c の $(S \cup \{o\})^2$ への制限で，すべての $(i, j) \in (S \cup \{o\})^2$ に対して，$c|_{S\cup\{o\}}(i, j) = c(i, j)$ である．また，空集合に対しては $v(\emptyset)=0$ としておく．S として N 自身を選んでくると，$v(N)$ は集合 $N \cup \{o\}$ と費用関数 c を入力とする巡回セールスマン問題の最適値である．プレイヤー集合 N と，上のように定義された特性関数 $v: 2^N \to \mathbf{R}_+$ のペア (N, v) を巡回セールスマンゲームと呼ぶ．特性関数 v は費用関数 c に依存しているので，それを陽に表すために v ではなく v_c と書くこともある．節2での記述と対応させると，講演者の住んでいる場所が o であり，訪問先の都市の集合がプレイヤー集合 N になる.

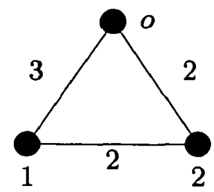

図1 巡回セールスマンゲームの例

例を挙げよう．図1では $N=1, 2$ として，無向グラフが描いてある．それぞれの辺のそばに書いてある数字が，辺で結ばれている二つの頂点の間の費用を表している．つまり，$c(o, 1)=c(1, o)=3$, $c(o, 2)=c(2, o)=2$, $c(1, 2)=c(2, 1)=2$ であり，$c(o, o)=c(1, 1)=c(2, 2)=0$ である.

このときに，$v(\{1\})$ は o からスタートして1に到達し，そして o に戻ってくるときの費用の和になる．よって，$v(\{1\})=6$ である．同様に，$v(\{2\})=4$ になる．$v(\{1, 2\})$ は o からスタートして1，2の両方をちょうど1回ずつ回って o に戻ってくることを考えたときの費用の和の最小値である．この例では，o から初めに1へ行って次に2に行き o に戻る場合と，o から初めに2へ行って次に1に行き o に戻る場合で費用の和が変わらず，$v(\{1, 2\})=7$ になる．また，$v(\emptyset)=0$ である.

一つ注意しておきたいのは，巡回セールスマンゲームにおいては，特性関数が表すのは提携が負担する費用になっていることである．ゲーム理論の標準的な教科書に表れる特性関数形ゲームでは特性関数が表すのは提携が得る利益であるのに対し，ここでは逆の意味付けがなされていることになっている.

巡回セールスマンゲームは，費用関数 $c: (N \cup \{o\})^2 \to \mathbf{R}_+$ によって次のような分類ができる．まず，

c が「すべての $i, j \in N \cup \{o\}$ に対して $c(i, j)=c(j, i)$ である」という条件を満たすときは，(N, v_c) は対称巡回セールスマンゲームと呼ばれる．そうでない場合は，非対称巡回セールスマンゲームと呼ばれる．次に，c に対して「すべての $i, j, k \in N \cup \{o\}$ に対して $c(i, k) \leq c(i, j)+c(j, k)$ である」という条件を三角不等式という．費用関数 c が三角不等式を満たしていても対称ではない場合もあることに注意する．

3.2 コアの非空性

ここからは，巡回セールスマンゲームのコアの非空性を考察する．実は，巡回セールスマンゲームという対象に関して，コアの非空性以外の研究はほとんどなされていないのが現状である．なお，以下では，歴史的な順番に結果を並べることはせずに，ストーリーの展開がより自然になるようにそれらを並べることにするので，その点について了承していただきたい．

巡回セールスマンゲーム (N, v) のコア $C(N, v)$ とは，次のようなベクトルの集合である．$C(N, v)=\{z \in \mathbf{R}^N$: $\emptyset \neq S \subseteq N$ を満たすすべての S に対して $\sum_{i \in S} z_i \leq v(S)$，かつ $\sum_{i \in N} z_i=v(N)\}$．巡回セールスマンゲームでは特性関数が費用を表しているので，通常の特性関数形ゲームにおけるコアの定義とここでの定義で，不等号の向きが違っていることに注意する．図1にある例に対して，その巡回セールスマンゲームのコアは図2の太線で表されている線分になっている．

コアに所属するベクトルをそれぞれのプレイヤーが納得できる費用配分の仕方を表すものだと考えると，どんな場合にコアが非空になり，どんな場合に空になるのか，というのを分類して，さらに，できることならば，与えられた巡回セールスマンゲームを見て，コアが非空なのか空なのかを簡単に判定したい，という要求が生まれる．この要求に対して，Okamoto[18] は「与えられた対称巡回セールスマンゲームのコアが非空であるかどうかを判定する問題は $\mathcal{NP}$ 困難である」ということを証明し，このような分類が事実上不可能であることを示した．証明自体はそれ程難しいものではないが，このような基本的な事項が見捨てられてきていたということ自体も興味深い．

ここで，上の Okamoto[18] による定理に関して少し補足をする．この定理は「与えられた巡回セールスマンゲームのコアが非空であるかどうかを判定する問題」という判定問題に関するものであるが，「巡回セールスマンゲーム」を与えるとはどういうことなのだろうか．つまり，コンピュータへの入力として何を与えるのだろうか．このときにすべての提携 $S \subseteq N$ に対する特性関数値 $v(S)$ を与えてしまうと，それだけで，プレイヤーの数 $|N|$ に対して指数関数サイズ，つまり $2^{|N|}-1$ 個の値を入力することになってしまう．ここでは，巡回セールスマンゲームの与え方として，ただ，すべてのペア $i, j \in N \cup \{o\}$ に対する費用関数の値 $c(i, j)$ を入力として与えることにするのである．この場合は，$(|N|+1)^2$ 個の値を入力すれば済むことになる（もっとも，$c(i, i)=0$ という条件を使えばもう少し減るが，$O(|N|^2)$ 個には変わりない）．これで，計算理論的に意味のある入力の与え方ができたことになるわけである．

完全な分類は難しいことが分かったので，次の要求としては，どのような場合にコアが空になって，どのような場合にコアが非空になるのか，という条件をいろいろ知りたい，ということになる．

はじめに単純なケースから観察することにしよう．プレイヤーの数が1の場合は，コアが常に非空であることが定義よりすぐに分かる．プレイヤーの数が2の場合はどうだろうか．この場合は，「対称巡回セールスマンゲームでプレイヤー集合を $N=\{1, 2\}$ とするとき，コアが非空になる必要十分条件は $c(o, 1)+c(o, 2) \geq c(1, 2)$ が成立することである」ことが次のような計算から分かる．図3も参考にしていただきたい．

まず，今の状況から，$v(\{1\})=2c(o, 1)$，$v(\{2\})=2c(o, 2)$，$v(\{1, 2\})=c(o, 1)+c(1, 2)+c(o, 2)$ と，特性関数値が明快な形で書き表せる．コアが非空である

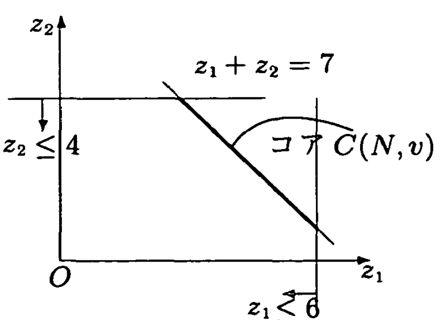

図2 コアの例

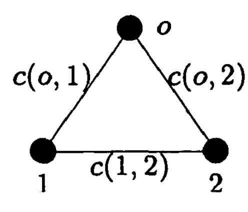

図3 プレイヤーの数が2の場合

と仮定すると，コアに所属するあるベクトル (z_1, z_2) が存在することになる．このとき，コアの定義から，$z_1 \leq v(\{1\}) = 2c(o,1)$，$z_2 \leq v(\{2\}) = 2c(o,2)$，$z_1 + z_2 = v(\{1,2\}) = c(o,1) + c(1,2) + c(o,2)$ が成立していないといけない．この三つの式を組み合わせると，$c(o,1) + c(o,2) \geq c(1,2)$ という望んでいた式が浮かび上がってくる．逆に，$c(o,1) + c(o,2) \geq c(1,2)$ が成立すると仮定すると，ベクトル $(2c(o,1), -c(o,1) + c(1,2) + c(o,2))$ がコアに所属することが分かる．

特に，三角不等式を満たす対称巡回セールスマンゲームでプレイヤーの数が2なら，先の不等式 $c(o,1) + c(o,2) \geq c(1,2)$ は自動的に満たされるので，コアは非空になる．実は，三角不等式を満たす対称巡回セールスマンゲームでプレイヤーの数が4以下ならば，そのコアは非空になる（Tamir[20]）．Kuipers[14]は，同じ仮定のもとでプレイヤーの数を5にした場合でもコアが非空であることを証明している．そうすると，同じ仮定のもとでプレイヤーの数が6の場合はどうなのか，と気になるが，これについて，Tamir[20]はコアが空になる例を挙げている．また，非対称巡回セールスマンゲームにおいて，Curiel[4]は，三角不等式を満たしていてプレイヤーの数が3以下であるならば，そのコアが非空になることを示しており，また，Potters et al.[17]は，三角不等式を満たしていてもプレイヤーの数が4だと，そのコアが空になるようなものが存在することを示している．

実はこのような「プレイヤーの数がどのように影響するか」ということは，ゲーム理論においてよく調べられる事柄である．しかし，これだけでは大規模な問題に対する知見は得られないので，プレイヤーの数から離れた事柄も見ていく必要がある．

そのようなものとして，まず，線形計画緩和に基づく条件を見てみることにする．巡回セールスマン問題が次の形の整数計画問題として定式化できることはよく知られている．つまり，巡回セールスマンゲーム (N, v) に対して，特性関数値 $v(S)$ は次の整数計画問題の最適値である．

$$\text{min.} \sum_{i,j \in S \cup \{o\}} c(i,j) x_{ij} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{j \in (S \cup \{o\}) \setminus \{i\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in S \cup \{o\}, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in (S \cup \{o\}) \setminus \{i\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in S \cup \{o\}, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j \in T} x_{ij} \leq |T| - 1 \quad \forall \emptyset \neq T \subsetneq S \cup \{o\}, \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \in S \cup \{o\}. \tag{5}$$

この整数計画問題の最後の制約「$x_{ij} \in \{0,1\}$」を「$0 \leq x_{ij} \leq 1$」に置き換えたものを考えよう．これは，最適化の理論において「0/1制約を緩和する」と呼ばれている操作で，整数計画法，離散最適化において，重要な役割を担っているものである．実は，この緩和がコアの非空性と関係しているのである．命題の形で言明を述べると，「巡回セールスマンゲーム (N, v) において，値 $v(N)$ が上の整数計画問題の緩和問題で $S = N$ としたものの最適値と等しいとき，この巡回セールスマンゲームのコアは非空である」となる．これはTamir[20]で言及されているが，証明は載っていない（この命題はFaigle and Kern[8]でも言及されている）．証明自身は線形計画ゲームのコアの非空性を適用することになる．この条件と似たものは他の離散最適化問題から得られる協力ゲームに対する文献でも見ることができ，例えば，Deng et al.[5]，Faigle and Kern[9]，Goemans and Skutella[11]にこれと類似した（ある意味でより強い）結果があり，離散最適化問題から得られる協力ゲームの理論における，美しい定理群を成している．

もう少し具体的な条件を見ることにしよう．Curiel[4]では，費用関数が三角不等式を満たして，「o が N から遠く離れている」ときには，コアが非空になることが示されている（ここで，「o が N から遠く離れている」というのを形式的に記述する必要があるが，それについてはCuriel[4]を見ていただきたい）．これは，例えていうと，講演者が名古屋を出発点として，訪問先がすべてチューリッヒにあるような場合には，コアが非空になる，ということを意味している．

また，三角不等式を満たしていて，かつ，$N \cup \{o\}$ の二つの部分への分割でその二つの部分が互いに大きく離れているような状況でも，コアが非空になることが知られている[16]（こちらも，形式的な記述については，Pottersによる元の論文[16]を見ていただきたい．Curielの本[4]にも記述がある）．

他にもコアが非空になるための条件がいくつか知られているが[4,16,17,20]，もう少し系統的に調べる手立てとして，Okamoto[18]は巡回セールスマン問題が多項式時間で解けるような費用関数のクラスに注目した．例えば，Monge行列という行列のクラスがある．正方行列 A がMonge行列であるとは，$i<j$，$k<l$ を満たす任意の i, j, k, l に対して，$a(i,k) + a(j,l) \leq a(i,l) + a(j,k)$ が成立することと定義され

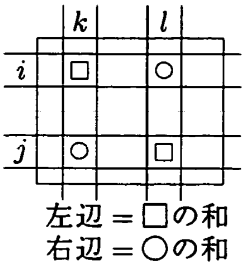

図4　Monge 行列

る．図4がMonge行列の様子を表している．

費用関数がMonge行列であるような巡回セールスマン問題は多項式時間で解けることが知られている[6]．この結果を利用することで，費用関数がMonge行列であるような対称巡回セールスマンゲームのコアの非空性を証明できる（実は，Supnick[19]の結果を使うと，証明がより簡単になる）．また，Kalmanson行列という行列のクラスも巡回セールスマン問題が多項式時間で解ける場合になることが知られていて[13]，この場合にも対応する巡回セールスマン問題のコアが非空になる[18]（実は，より強く，submodularになることまで証明できる）．費用関数がKalmanson行列になる場合の例として，$N \cup \{o\}$ が平面上のある凸多角形の頂点集合になっていて，二つの頂点 v，$w \in N \cup \{o\}$ の間の費用がそのユークリッド距離であるような場合が挙げられる．

ただ，巡回セールスマン問題が多項式時間で解けるような費用関数のクラスが常に対応する巡回セールスマンゲームのコアの非空性を導くわけではないこともOkamoto[18]は指摘している．また，巡回セールスマン問題が多項式時間で解けるような費用関数のクラスでOkamoto[18]で考察されていないようなものもあるので，それらのクラスに対してどのような状況が生まれるのかということは，今後の展開となるだろう．巡回セールスマン問題が多項式時間で解けるような場合のサーベイは文献[3,6]にあるので参考にしていただきたい．

Okamoto[18]が巡回セールスマン問題の多項式時間で解けるようなクラスと巡回セールスマンゲームのコアの非空性の関係を考察したのと同様に，Goemans and Skutella[11]は施設配置問題の多項式時間で解けるようなクラスと施設配置ゲームのコアの非空性の関係を議論している．さらに系統立った取り扱いに関してはDeng et al.[5]を参照していただきたい（歴史的な観点から言うと，Okamoto[18]の研究はDeng et al.[5]とGoemans and Skutella[11]に触発されたものである）．

3.3　その他の解

その他の解について，一言触れておく．巡回セールスマンゲームの仁，Shapley値など全体合理性を満たす解を計算することが $\mathcal{NP}$ 困難であることは直ちに分かる（仁やShapley値の定義は標準的なゲーム理論の教科書に出ているので，そちらを参照していただきたい）．というのは，もしそのような計算が多項式時間で出来てしまうと，解の全体合理性から，元の巡回セールスマン問題の最適値を多項式時間で得ることができてしまうが，しかし，巡回セールスマン問題は一般に $\mathcal{NP}$ 困難なので，これは $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ を導いてしまうからである．

ただし，先に挙げたような巡回セールスマン問題が多項式時間で解けるようなクラスに限定したときに，仁やShapley値の計算が（計算理論的に）どれ程難しい問題なのか，ということはよく分かっていない．

4.　おわりに

$\mathcal{NP}$ 困難な離散最適化問題から生じる協力ゲームの研究状況はまず，コアの非空性に関する議論が現在の研究の中心である．このゲームについての解を具体的に求めるアルゴリズム，および，新しい解の提案については試行錯誤的に行われているといった発展途上の段階であるというのが著者の見解である．ただ，様々な応用分野が広がっており，今後，研究の進展が社会的に期待される．

謝辞　執筆に当たり船木由喜彦氏（早稲田大学），塩浦昭義氏（東北大学）に原稿をお読みいただき，ミスの指摘および有益なコメントを頂いたことに感謝します．なお，本稿に関する責任はすべて著者にあることをお断りしておきます．なお，本稿は早稲田大学特定課題研究助成費2002 A-063の成果の一部であり，また，the Berlin-Zürich Joint Graduate Program "Combinatorics, Geometry, and Computation" (CGC) による研究助成に感謝します．

お詫び　前回連載原稿「1.3.3　仁」の解説において，最初の文章を除く細かい部分で筆者の校正ミスによる誤りがありましたことをお詫びいたします．

参考文献

[1] D. J. Albers and G. L. Alexanerson, *Mathematical*

People : Profiles and Intaviews, Birkhause Boston Inc., 1985.

[2] J. M. Bilbao, *Cooperative Games On Combinatorial Structures,* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] R. E. Burkard et al., "Well-solvable Special Cases of the Traveling Salesman Problem: A Survey", *SIAM Review,* 40 (1998), 496-546.

[4] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications,* Kluwer Academic Publishers, 1997.

[5] X. Deng, T. Ibaraki and H. Nagamochi, "Algorithmic Aspects of the Core of Combinatorial Optimization Games", *Mathematics of Operations Research,* 24 (1999), 751-766.

[6] P. C. Gilmore, E. L. Lawler and D. B. Shmoys, Well-solved special cases, in [7], 87-143.

[7] E. L. Lawler et al., *The Traveling Salesman Problem,* Wiley and Sons, 1985.

[8] U. Faigle and W. Kern, "On some approximately balanced combinatorial cooperative games", *ZOR,* 38 (1993), 141-152.

[9] U. Faigle and W. Kern, "On the Core of Ordered Submodular Cost Games", *Mathematical Programming,* 87 (2000), 483-499.

[10] P. C. Fishburn and H. O. Pollak, "Fixed Route Cost Allocation", *American Mathematical Monthly,* 90 (1983), 366-378.

[11] M.X. Goemans and M. Skutella, "Cooperative Facility Location Games", *ACM-SIAM SODA 2000 Proceedings,* (2000), 76-85, to appear in *Journal of Algorithms.*

[12] M. Kubo and H. Kasugai, "On the Core of Network Design Game", *Journal of Operations Research Society Japan,* 35 (1992), 250-255.

[13] K. Kalmanson, "Edgeconvex circuits and the traveling salesman problems", *Canadian Journal of Mathematics,* 27 (1975), 1000-1010.

[14] J. Kuipers, A Note on the 5-person Traveling Salesman Game, *ZOR,* 21 (1993), 339-351.

[15] H. Mohri, "On Solutions of a Type of Network Design Game", *The Proceedings of International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2001,* to appear.

[16] J. A. M. Potters, "A Class of Traveling Salesman Games", *Methods of Operations Research,* 59 (1989), 263-276.

[17] J. A. M. Potters, I. J. Curiel and S. H. Tijs, "Traveling Salesman Games", *Mathematical Programming,* 53 (1992), 199-211.

[18] Y. Okamoto, "Traveling Salesman Games with the Monge Property", *submitted.*

[19] F. Supnick, "Extreme Hamiltonian Lines", *Annuals of Mathematics,* 66 (1957), 179-201.

[20] A. Tamir, "On the Core of a Traveling Salesman Cost Allocation Game", *Operations Research Letters,* 8 (1988), 31-34.

[21] Traveling Salesman Problem Home Page, http://www.math.princeton.edu/tsp/

[22] 渡辺治,『計算可能性・計算の複雑さ入門』, 近代科学社, 1992.

〈前号印刷訂正〉

(1) p. 36　左カラム　1.1, 12行目
経済学からの　→　経済学の

(2) p. 38　左カラム　2.3, 3行目
単純な連結　→　完全

(3) p. 38　右カラム　下から6行目
費用は　→　限界費用は

(4) p. 39　左カラム　2.5直前
の二つの場合　→　などの複数の場合

(5) p. 39　左カラム　下から7行目
最小全域木ゲームが　→　最小全域木が

(6) p. 39　右カラム　3.2より下から2行目
n種類　→　p種類

(7) p. 40　(11)式
p　→　m

(8) p. 40　(12)式を以下にさしかえ
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq e_j \quad j=1, \cdots, p$

(9) p. 40　(14)式
y_i　→　y_i^*

(10) 人名訂正（全般）
Edomonds　→　Edmonds
Zelmel　→　Zemel
渡辺浩　→　渡辺治