解説

離散最適化とその応用
第5回　公平分割と公平割当

宍戸　栄徳，曽　　道智

1. はじめに

世界の資源は有限である．土地，石油などをめぐって，様々な紛争が世界各地に生じている．世界の総人口が増え続ける今日，貴重な有限の資源をいかに公平に配分するかは重要な課題になっている．

2者間の公平分割は簡単である．1人が分けてもう1人が選ぶという単純な手続きによって，両者は互いに羨望（相手の取り分と交換したいと思う気持ち）を持たず不満のない分割ができる．公平分割で3人以上の場合に無羨望解を得る手続きについて論じたのは，Gamow-Stern (1958, 1999) が最初ではないかと思われる．著者の1人はその訳本を中学生のときに読んで公平分割問題の存在を知った．当時，3人以上の場合の無羨望分割に対する解法は未知であった．

しかし，60年代に入ってから，この分野の研究は著しい発展を遂げてきた．3人だけではなく，任意人数の無羨望分割法もBrams-Taylor (1995) によって開発された．その流れの一部は曽・茨木 (1999) に紹介されている．近年，理論の面だけでなく，応用の面も注目され，かなりの成果が得られている．本解説は最新の発展状況に重点をおいて公平分割問題，公平割当問題を紹介する．

2. 公平分割の基本

2.1 公平分割問題

公平分割問題 (fair division problem) の枠組みを述べておく．分割に関わる人をプレイヤーと呼びその集合を $N=\{1,\cdots,n\}$，対象物 C の分割を $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_n\}$ とする．ここで，$C=\bigcup_{i=1}^{n}P_i$ で，$i\neq j$ のとき $P_i\cap P_j=\emptyset$ である．一般に C の部分集合 $A\subseteq C$ に対するプレイヤー i の評価を $m_i(A)$ と表す．m_i は C の部分集合からなる σ-代数上の non-atomic 測度であると仮定する．プレイヤーによって m_i は異なるが，共通の性質として以下のものを仮定する．

(1) 空集合の測度は0である：$m_i(\emptyset)=0$.

(2) σ-代数の任意の要素 A に対して，$m_i(A)\geq 0$.

(3) 加算加法的である：$m_i(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=\sum_{j=1}^{\infty}m_i(A_j)$，ただし，$j\neq k$ のとき $A_j\cap A_k=\emptyset$ である．

(4) 全体集合の測度は1である：$m_i(C)=1$.

2.2 公平分割の対象物と情報

分割の対象とする物は，財 (goods) あるいは負担 (burdens, chores) である．前者は各プレイヤーがより多く獲得することを求め，後者についてはプレイヤー全体としては誰かが引き受けなければならないが，個人としてはなるべく少なく引き受けたい物である．これまでの研究の大半は財の分割に関して述べているが，特に混乱が生じない限り「財」をgoodsとburdensの両方の意味を含める言葉として使う．

また，それらが分割可能 (divisible) であるか分割不可能 (indivisible) であるかも解に大きく影響を与える．前者の例としてはケーキが典型的であり，後者の例としては1軒の家を何人かで借りて，各プレイヤーに1部屋ずつ適当に割り当て，部屋代をどのようにして公平に負担するかというHousemate問題が有名である．

分割可能財に対しては，各プレイヤーの財に対する評価は個人情報であるので，他人は知らないとする．一方，分割不可能財では各財に対するプレイヤーの評価を相互に知っていると仮定する．

分割不可能財に対しては分割という言葉は不自然なので公平割当問題 (fair allocation problem) と呼ぶ．

2.3 公平さの概念

公平さ (fairness) の概念は多数ある．近年の研究で主に使われているのが「無羨望」(envy-free) という基準である．C の分割 $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_n\}$ が無羨望であるとは，任意の $i,j\in N$ に対して $m_i(P_i)\geq m_i(P_j)$ が成り立つことである．ここで，P_i はプレイヤー i の取り分である．すなわち，各プレイヤーは自分の取

ししど　はるのり，ぜん　だおず
香川大学 経済学部
〒760-8523 高松市幸町2-1

得するものは一番良いと思っており，他のプレイヤーの取り分と交換したいとは思わない．

無羨望より緩い基準として，任意の$i \in N$に対して$m_i(P_i) \geq 1/n$を満たす「比例」(proportional) 分割がある．他人の取り分とは無関係に，自分の取り分が$1/n$以上であればよいという考えである．その他の基準について，詳しくは曽・茨木 (1999) を参照されたい．

公平さの概念に対してプレイヤーが得た物の評価をすべてのプレイヤーで等しくする平等性 (equitability)，全体の利益という観点からの Pareto 効率性なども考えられている．また，n人のプレイヤーがいるとき，1人の取り分をちょうど$1/n$とするのが基本的な問題であるが，Shishido-Zeng (1999) などはそれらを任意の比率 (entitlement) に一般化して考えている．

2.4 公平分割問題を解く

公平分割問題を解くとは，公平分割基準を満たす解の存在を数学的に証明することと，その解を実現する分割手続きを示すことである．

分割手続きは分割の手順を示すだけでなく，各プレイヤーが各段階で決められた手続きをいかに実行するかという戦略（推奨戦略）も明示しなければならない．手続きはある種のルールであり，どのような戦略を取るかはプレイヤーが個人情報に基づいて決定する．各プレイヤーが推奨戦略を忠実に実行する限り，満足できる配分が保証される．逆に，推奨戦略を忠実に実行しなければ，他人に不利益を与えることはないが，自分自身は不利益を被る可能性がある．この種の戦略はゲーム理論では，慎重戦略 (prudent strategy) と呼ばれている．なお，以下で紹介するアルゴリズムの中の[　]で囲まれている部分は推奨戦略を示す．

手続きには2種類のものがある．連続的手続きと離散的手続きである．連続的手続きはナイフ移動法 (moving-knife procedure) とも呼ばれる．ケーキの上でナイフを端から動かしていき，どのプレイヤーも任意の場所で「止まれ」と声をかけることができ，そこでケーキを切断（したりマークを付けたり）する方法である．離散的手続きでは，移動しているナイフの停止位置をプレイヤーに決めさせるような連続的な判断を求めず，切断位置などは離散的に決定される．

3. 分割可能財に対する無羨望分割法

3.1 離散的手続き

2人の場合には比例分割は無羨望分割と同値であり，簡単に実現できる．3人の場合については，1960年前後にアメリカ Northern Illinois 大学の Selfridge とイギリス Cambridge 大学の Conway がそれぞれ独立に，次の離散的手続きを提案した．

ステップ1．プレイヤー1がケーキを［自分の測度で均等に］3分割する．

ステップ2．プレイヤー2が［自分の測度m_2で3部分の中に最大になるものが二つ以上あると思えば］パスする．［最大のものが一つだけあると思えば］3部分の中の［最大の］1部分のサイズを［2番目の大きさと同じサイズまで］修正する．もしプレイヤー2が1部分を削り取ったときは，切り離された部分を$\mathcal{L}$とし，別に置いておく．

ステップ3．プレイヤー3，2，1はこの順で$\mathcal{L}$以外の三つの中から［自分の測度で最大である］1部分を選ぶ．ただし，ステップ2においてプレイヤー2が修正した部分がある場合，それをプレイヤー3が選ばなかったら，プレイヤー2はそれを取らなければならない．

ステップ4．プレイヤー2がステップ2でパスした場合はここで終わる．そうでなければ，プレイヤー2，3の内，修正されなかった部分をもらった者を「分割者」と呼び，修正された部分をもらった者を「非分割者」と呼ぶ．そして，分割者は$\mathcal{L}$を［自分の測度で均等に］3部分に分ける．

ステップ5．3人のプレイヤーは非分割者，プレイヤー1，分割者の順で$\mathcal{L}$を分割した3部分の中から［自分の測度で最大の］1部分をそれぞれ選ぶ．

この離散的手続きを理解するため，2段階に分けて考える．1段階目（ステップ1～3）では，修正のために切り離された部分$\mathcal{L}$を除けば，無羨望の条件を満たすようにケーキは分割されている．2段階目（ステップ4，5）は，切り離された部分$\mathcal{L}$を処理する．1段階目に使われた方法をここで再び使用することも可能であるが，そうすると分割が無限に繰り返される可能性がある．この手続きはそれを避けて，非分割者がいくらもらってもプレイヤー1は文句を言わないという，変更できない優越性 (irrevocable advantage) を使って，一度で解決しているところがポイントである．

Brams-Taylor (1995) は分割可能な財に対して，4人以上の場合の無羨望分割法を初めて与えた．その結果を受け，この分野の研究は大きく発展した．しかし，その方法はアルゴリズムの形で書くと，20ステップ以上を必要とし非常に繁雑である．さらに，実際

に必要なカット数の上限を与えることもできない．たとえ4人の分割であっても，必要なカット数はいくらでも大きくなるおそれがある．そのため，実用性の観点からは，まだ改良しなければならない点が残されている．

3.2　ナイフ移動法

ナイフ移動法は離散的手続きより強力であることは次のAustin (1982) 法から分かる．これは2人に「正確分割」(exact division) を与える方法である．すなわち，両者の測度から見ると，分割結果は共に1/2ずつになる．Austin法では2本のナイフA，Bを使用する．

ステップ1．第3者がナイフAをケーキの左端から右端へ，どちらかのプレイヤーが［それぞれの測度でナイフAが1/2を経過したときに］「止まれ」の指示を出すまで移動する．

ステップ2．「止まれ」と指示したプレイヤー（一般性を失うことなく1とする）はナイフAを「止まれ」の位置から右へ，またナイフBをケーキの左端から右へ［両ナイフの間の量を測度 m_1 で測って1/2に保ちながら］同時に動かす．プレイヤー2は［ナイフA，Bの間が測度 m_2 で測って1/2となるときに］「止まれ」の指示を出す．

ステップ3．プレイヤー2から「止まれ」の指示があると，2本のナイフが止まった位置でそれぞれケーキを切断し，両ナイフの間の部分と残りの（通常は左右の二つの）部分に分ける．

ステップ4．抽選により2人のプレイヤーにそれぞれ1部分（中央の部分か左右を合わせた部分）を与える．

Brams-Taylor-Zwicker (1997) はAustin 法を4人の無羨望分割問題に応用した．まず，プレイヤー1と2がAustin 法を3回使用して，ケーキを4部分に正確分割する．次に，プレイヤー3に1部分から $\mathcal{L}$ を削り取る［最大サイズを持つ部分が二つあることを保証する］機会を与える．後は，プレイヤー4，3，2，1の順で1部分ずつを選ぶことで，$\mathcal{L}$ 以外の部分を無羨望で分割できる．ただし，プレイヤー3が削った部分をプレイヤー4が選ばなかったら，プレイヤー3自身がそれを受け取らなければならない．最後に，プレイヤー1と2が，削られた部分をもらったプレイヤーに対して $\mathcal{L}$ に関しての変更できない優越性を持つことに注意し，Selfridge-Conwayの方法と同じようにして，$\mathcal{L}$ を無羨望に分割できる．その結果，分割のカット数はたかだか11にできる．

Barbanel-Brams (2001) はこの結果をさらに改善した．たかだか5本のナイフを同時に動かすという複雑な操作を許せば，4人の場合に5回のカットだけで無羨望分割できることを示した．しかし，これらの方法を5人以上に一般化することは困難であり未だに解決されていない．

3.3　近似無羨望分割

厳密な無羨望分割法の開発には限界があるので，最近は近似分割法の研究も行われている．

与えられた $\varepsilon>0$ に対して，$m_i(P_i)\geq m_i(P_j)-\varepsilon$ がすべてのプレイヤー i と j に対して成り立つならば，分割 $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_n\}$ は ε-近似無羨望であるという．

Su (1999) はSpernerの補題を用いて汎用性の高い近似分割手続きを提案している．Spernerの補題はBrouwerの不動点定理の証明にも使われ，簡単だが強力な考え方である．n 人の場合にも適用できるがここでは簡単のため3人の場合について説明する．

基本的なアイデアは，正三角形の点とケーキの分割法に1対1の対応を付けることである．

図1は高さ1の正三角形ABCでケーキの分割を表す．三角形の点Dから辺BC，CA，ABへおろした垂線の長さを x_1，x_2，x_3 とする．長さ1のケーキを3部分に分割し，左から順に1，2，3と名付けそれぞれの部分の長さに座標 x_1，x_2，x_3 を対応させる．

図2に示すように，三角形を小三角形に分割（単体分割）し，すべての小三角形の3頂点に一つずつプレイヤーP，Q，Rのラベルを付け，このラベルをその点の所有者とする．すべての頂点で，所有者にその点の座標に対応するケーキ分割を行ったときに，何番の部分を希望するかを聞き，その番号を補助ラベルとして付ける．

長さ0のケーキは誰も希望しないと仮定すれば，点Aの所有者は（誰であれ）部分1を希望する．Bの所有者は2，Cの所有者は3を希望する．同様に，辺

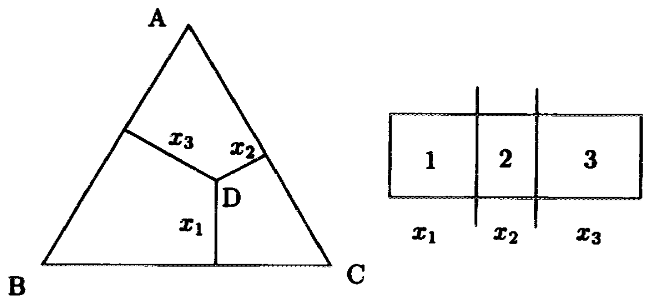

図1

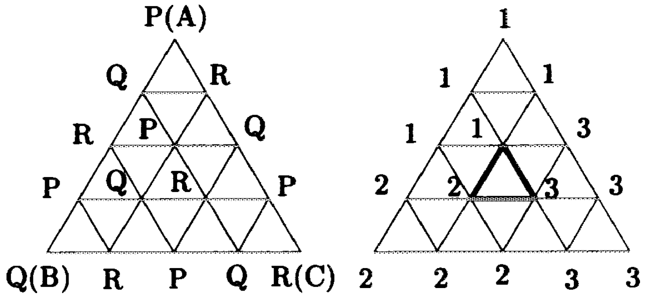

図2

ABの上の頂点では1か2を，辺BC上では2か3を，そして辺CA上では3か1を希望する．三角形ABCの内部の頂点では，所有者の希望は1，2，3のどの可能性もある．以上から，補助ラベルはSpernerのラベリングになる．Spernerの補題により，図2にある太線の小三角形のように3頂点に補助ラベル1，2，3を持つものが奇数個（したがって少なくとも一つ）存在する．

太線の小三角形が十分小さければ3頂点に対応する分割法はほぼ同じである．一方，3頂点の補助ラベルが1，2，3となっているとき，3人がそれぞれ異なる部分を希望することになり，近似無羨望分割が実現される．

一般的には，負担問題にはケーキ分割の方法を直接適用できないが，Su（1999）では双対単体を利用して，負担問題を解決した．

近似無羨望分割の他の方法についてはZeng（1999）に詳しく紹介されているので参照されたい．

また，Austin法による2人の場合の正確分割を紹介したが，多人数の場合の正確分割は未解決である．Robertson-Webb（1998）は離散的手続きで多人数近似正確分割を与えている．ε-近似正確分割とは，与えられた正数εと比率$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$に対して，$|m_i(P_j)-\alpha_j|<\varepsilon$ $(i, j=1, \cdots, n)$を満たす分割$\mathcal{P}=\{P_1, \cdots, P_n\}$のことである．

4. 分割不可能財に対する公平割当問題

いくつかの分割不可能財を無羨望割当することは通常，不可能である．Brams-Fishburn（2000）は財が無限に多いとき無羨望割当が可能となる確率が1になることを証明した．そのため，有限個の分割不可能財を無羨望割当するために，貨幣のような分割可能財による補償をして無羨望性を満たす方法が考えられる．

無羨望割当問題ではプレイヤーの評価関数は互いに知られていると仮定する．財に対する評価について，プレイヤーは正直に申告しているとし，ゲーム理論のような戦略についての議論は行わない．したがって，無羨望割当問題を解くのは無羨望性を満たす割当方法を，それを実現する補償金額と併せて求めるアルゴリズムを見つけることである．

4.1 Klijnのアルゴリズム

Aragones（1995）やKlijn（2000）は無羨望割当問題をグラフ理論的なアプローチで解いている．

プレイヤーと財の集合をそれぞれ，N，Qとする．プレイヤー$i\in N$が財$j\in Q$を得たとき，貨幣による補償x_jを受け取るとし，評価を貨幣に関する準線形の効用関数$a_{ij}=u_{ij}+x_j$と仮定する．ここで，u_{ij}はプレイヤーiの財jに対する効用である．

無羨望割当の存在を保証するために，貨幣が十分にあると仮定する．無羨望割当問題は$a_{i\sigma(i)}\geq a_{ij}$, $\forall i\in N, \forall j\in Q$となる$N\rightarrow Q$の1対1写像$\sigma$と補償金額$x_j$を求めることである．プレイヤーの数と財の数が同じ$n$であるときに，AragonesとKlijnが$n$に関する多項式オーダのアルゴリズムで無羨望割当問題を解いた．Aragonesは最適割当問題を解いて，Pareto効率的な初期解から始める．一方，Klijnでは任意の割当から始められるので，ここではKlijnの方法を例で紹介する．

プレイヤーと財の集合を$N=Q=\{1, \cdots, 6\}$，効用行列を

$$U=(u_{ij})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

とし，割当$\sigma(i)=i$と補償$x=(0, \cdots, 0)$を初期解とする．図3は初期解に関する羨望を表している．頂点の番号は分割不可能財の番号を示し，頂点jの横の数字$(\sigma^{-1}(j), x_{\sigma^{-1}(j)})$は財$j$の所有者と，その補償金額を示す．矢印$i\rightarrow j$は実線の場合（強辺），財$i$の所有者が財$j$の所有者に羨望を持っている$(u_{\sigma^{-1}(i)i}+x_{\sigma^{-1}(i)}<u_{\sigma^{-1}(i)j}+x_{\sigma^{-1}(j)})$ことを示し，点線の場合（弱辺）は，同じ満足度を持っている$(u_{\sigma^{-1}(i)i}+x_{\sigma^{-1}(i)}=u_{\sigma^{-1}(i)j}+x_{\sigma^{-1}(j)})$ことを示す．辺のないところは羨望がないことを示す．

強辺を含むサイクルは，サイクルに含まれる財を割当てられているプレイヤーの間でサイクルをなくすように財を交換する．この例では，図3にある，1→3→

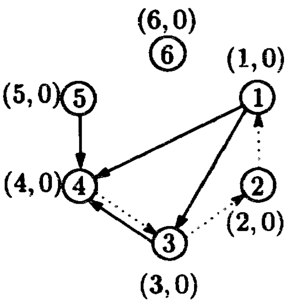

図3

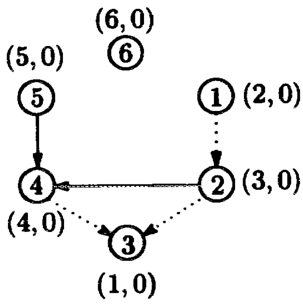

図4

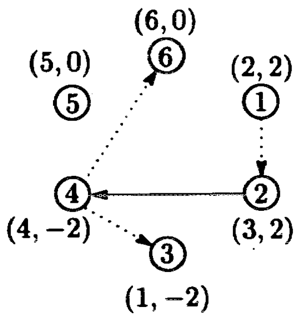

図5

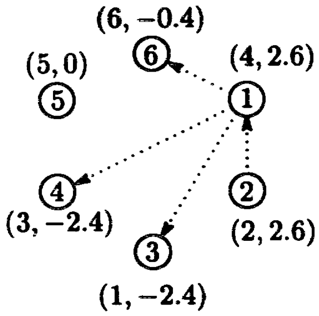

図6

2のサイクルがなくなり，図4となる．

サイクルはないが強辺があれば，補償を行い強辺の数を減らす．この例では，図4にある，財1と財2の所有者に2の補償を，財3と財4の所有者に −2の補償をすれば，強辺5→4が消滅する．

これらの手続きを状況に応じて有限回繰り返し適用すれば，図6のように強辺がなくなり無羨望割当を実現できる．

結局，評価行列 $(a_{ij})=(u_{ij}+x_j)$ は

$$\begin{bmatrix} 3.6 & 2.6 & \underline{4.6} & 3.6 & 0 & -0.4 \\ 6.6 & \underline{6.6} & -2.4 & -2.4 & 0 & 0.6 \\ 2.6 & 3.6 & -1.4 & \underline{4.6} & 0 & 3.6 \\ \underline{3.6} & 2.6 & 3.6 & 3.6 & 1 & 3.6 \\ 2.6 & 2.6 & -1.4 & 3.6 & \underline{5} & -0.4 \\ 3.6 & 3.6 & -1.4 & -2.4 & 0 & \underline{4.6} \end{bmatrix}$$

となる．ここで，数字の下線は得られた割当の組合せを示し，各行の最大値になっているので，この割当と補償の組は無羨望である．

Klijn の方法では初期解は Pareto 効率的でなくてもよかったが，得られた解は Pareto 効率的である．

4.2 Housemate 問題

節4.1で考えた問題をもっと具体化して，Housemate 問題を考えよう．n 部屋からなる1軒の家を n 人で借り，入居する n 人が割り当てられる部屋の良さに応じて家賃 C をどのように負担するかが問題である．Haake-Raith-Su (2002) が Klijn のアルゴリズムよりもっと分かりやすい「補償手続き」を提案している．

プレイヤー i は部屋 j を割当てられればいくら払うかを u_{ij} で表明し，bid と呼ぶ．i が j を借りるときには部屋代 c_j を支払うとし，i の評価は $u_{ij}-c_j$ となる．部屋代の総額で家賃を支払わなければならないので，$C\leq\sum_{j=1}^{n}c_j$ が成立する．

解の効率性を高めるために，部屋の割当て方は各プレイヤーに異なる部屋を割当てたときの部屋代の合計が最大になるようにする．これは最適割当問題を解くことで実現できる．一般性を失うことなく，プレイヤー i に部屋 i が割当てられるとすると，

$$M=\sum_{i=1}^{n}u_{ii}=\max_{\sigma}\sum_{i=1}^{n}u_{i\sigma(i)}$$

が成立している．したがって，プレイヤー i が部屋 i を借りて，支払う部屋代は $c_i=u_{ii}$ となる．

もし，$a_{ii}=u_{ii}-c_i<a_{ij}=u_{ij}-c_j$ であれば，プレイヤー i は部屋 j を割当てられているプレイヤー j に羨望を持つ．この羨望をプレイヤーに適当な補償を与えることによって，段階的になくす．仮に，プレイヤー i に対し補償 d_i を与えると，プレイヤー k が部屋 i を割当てられたときの評価は $a_{ki}=u_{ki}-c_i+d_i,\ \forall k\in N$ と修正される．羨望がなくなった状態では，$S=M-C-\sum_{i=1}^{n}d_i\geq 0$ の余剰が出る．余剰 S を新たな羨望が生じないようにプレイヤー間で分配すれば無羨望割当が得られる．「補償手続き」を例で説明する．

4人の Housemate 問題を考える．家賃 $C=100$ とし，各プレイヤーの bid は次の行列に示している．P_i はプレイヤー i を，R_j は部屋 j を表す．また，数字の下線はこの割当方法での効用（部屋代）を示す．

	R_1	R_2	R_3	R_4
P_1	$\underline{50}$	20	10	20
P_2	60	$\underline{40}$	15	10
P_3	0	40	$\underline{25}$	35
P_4	50	35	10	$\underline{30}$
部屋代	50	40	25	30

初期評価行列 $(a_{ij})=(u_{ij}-c_j)$ は

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	0	−20	−15	−10
P_2	10	0	−10	−20
P_3	−50	0	0	5
P_4	0	−5	−15	0
補償金額	0	0	0	0

となる．各行の評価値を対角成分と比較することにより，プレイヤー2がプレイヤー1に対して，またプレイヤー3がプレイヤー4に対して羨望を持っていることが分かる．

この羨望をなくすため，P_2 と P_3 の列の要素にそれぞれ $d_2=10$ と $d_3=5$ を加え，プレイヤー2に10，プレイヤー3に5の補償を与える．

評価行列 $(a_{ij})=(u_{ij}-c_j+d_j)$ は

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	0	−10	−10	−10
P_2	10	10	−5	−20
P_3	−50	10	5	5
P_4	0	5	−10	0
補償金額	0	10	5	0

となる．今度はプレイヤー3と4がプレイヤー2に羨望を持っている．P_3 と P_4 の列の要素にそれぞれ5を加えることにより，$d_3=10, d_4=5$ となり，評価行列は

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	0	−10	−5	−5
P_2	10	10	0	−15
P_3	−50	10	10	10
P_4	0	5	−5	5
補償金額	0	10	10	5

となる．

これですべてのプレイヤーの羨望がなくなった．各プレイヤーへの補償金額の総額は $10+10+5=25$ である．当初に総額 $M=145$ だけのbidをしていたので，余剰は $S=145-100-25=20$ となる．これを各人に均等に分けて5ずつ払い戻せば，各プレイヤーの最終補償金額は $d=(5, 15, 15, 10)$ で，最終的な支払い金額は $c-d=(45, 25, 10, 20)$ である．

この例のように無羨望割当が可能であったのは，負の部屋代を許しているからである．部屋代を非負の値に限ると $n\geq 4$ のとき，無羨望割当は不可能な場合がある．Brams-Kilgour (2001) の例を考えよう．

	R_1	R_2	R_3	R_4	合計
P_1	36	34	30	0	100
P_2	31	36	33	0	100
P_3	34	30	36	0	100
P_4	32	33	35	0	100

部屋4については誰も正の部屋代をbidしていない．しかし，負の部屋代は許されないので部屋4の部屋代は0になる．他のすべての部屋の部屋代を少なくともbidの値にして，プレイヤーの余剰を0に抑えないと4の部屋に割り当てられた者の羨望をなくすことはできない．このとき，部屋代の和は108で100を超えてしまい，余剰の8を無羨望に分けられない．

5. その他の問題

これまでに触れなかったが，最近注目を集めている二つの話題について紹介する．

5.1 超無羨望分割

超無羨望分割 (super envy-free division) とは，

$$m_i(P_i)>\frac{1}{n}>m_i(P_j), \quad \forall i, j\in N, \quad i\neq j$$

を満たす分割 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ のことである．この基準は無羨望であることに加えて，他人が各自の測度で $1/n$ 以上を取得することを許さない厳しい基準である．Barbanel (1996) は，超無羨望分割が存在するための必要十分条件は，評価関数 $\{m_i\}_{i\in N}$ が線形独立であることを証明した．

その後，Robertson-Webb (1998) は超無羨望分割を実現する分割法を与えた．n 人の評価関数が線形独立である条件として，ケーキの一部 A の分割 $\mathcal{A}=\{A_1, \cdots, A_n\}$ があり，行列 $V=(m_i(A_j))$ が正則であるとする．さらに，一般性を失うことなく，$A=C$ と仮定してもよい．行列 V は（各行の要素が非負で，その和が1になる）確率行列なので，逆行列 V^{-1} の各行和は1になる．このとき，行列 $R=(r_{ij})\equiv V^{-1}W$ も確率行列になるような十分小さい正数 δ が存在する．ただし，$W=(w_{ij})$ で，

$$w_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}+\delta, & i=j\text{ のとき},\\[2mm] \dfrac{1}{n}-\dfrac{\delta}{n-1}, & i\neq j\text{ のとき}.\end{cases}$$

ε は不等式 $0<\varepsilon<\delta/n^2$ を満たすものとする．ε-近似正確分割法を使えば，A_j に対して比率 $(r_{j1}, \cdots, r_{jn})$ での近似分割 $\{B_{j1}, \cdots, B_{jn}\}$ ができる．その結果，プレイヤー k に $P_k\equiv B_{1k}\cup\cdots\cup B_{nk}$ を与えれば超無羨望分割になる．

5.2 勝者調整法

Brams-Taylor (1999) は勝者調整法 (adjusted winner) で平等性も考慮した公平分割の方法を提案している．

いくつかの対象物を2人に割当てるとき，各プレイヤーがそれぞれの財に合計が100点となるように配点

し，各財に対してより高い点数を付けた者が勝者としてその財を一時的に受け取る．一時的な財の割当に基づいて各プレイヤーの総得点を計算する．同点であれば終了する．そうでなければ，より獲得点数の高いプレイヤーから低いプレイヤーに財を平等性を満たすように，両者の得点が等しくなるまで譲渡する．この際，2人の評価の比率が低いものから順に譲ることにして，効率性がなるべく損なわれないようにする．

勝者調整法は効率性，無羨性に平等性を併せて満たす優れた方法であり，Brams らはアメリカでパテントを取得している．しかし，3人以上の場合にはこれらの3条件を同時には満たさない例の存在が知られており，一般化は困難である．

6. おわりに

大学院の学生であった頃，研究室の学生仲間と予備校の試験の採点をアルバイトとしてやっていた．6問題を6人で1題ずつ採点するのであるが，難しい問題では白紙の答案も多く採点は簡単であるが，やさしい問題は多くの受験生がそれなりの解答を書いているので採点に手間取ってしまう．このように，問題によって採点時間が異なるので，謝礼金の分配金額を問題ごとに決めるのに苦労した．一定金額の謝礼金をどのように分けるかは難しい問題であった．

もし当時，無羨望の概念が広く知られ，House-mate 問題が解決されていれば，納得のできる公平割当はすぐに見つけられたであろう．

参考文献

[1] Aragones, E.: "A derivation of the money rawlsian solution", *Social Choice and Welfare*, 12, 267-276 (1995).

[2] Austin, A. K.: "Sharing a cake", *Mathematical Gazette*, 66, 212-215 (1982).

[3] Barbanel, J. B.: "Super envy-free cake division and independence of measures", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 197, 54-60 (1996).

[4] Barbanel, J. B. and Brams, S. J.: "Cake Division with Minimal Cuts: Envy-Free Procedures for 3 Persons, 4 Persons, and Beyond", *Discussion paper* RR #: 2001-07, C. V. Starr Center for Applied Economics, New York University (2001).

[5] Brams, S. J. and Fishburn, P. C.: "Fair division of indivisible items between two people with identical preferences: envy-freeness, Pareto-optimality, and equity", *Social Choice and Welfare*, 17, 247-267 (2000).

[6] Brams, S. J. and Kilgour, D. M.: "Competitive Fair Division", *Journal of Political Economy*, 109, 418-443 (2001).

[7] Brams, S. J. and Taylor, A. D.:"An Envy-Free Cake Division Protocol", *American Mathematical Monthly*, 102, 9-18 (1995).

[8] Brams, S. J. and Taylor, A. D.: "Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution", Cambridge University Press (1996).

[9] Brams, S. J. and Taylor, A. D.: "The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody", W. W. Norton (New York) (1999) (日本語訳：ブラムス，テイラー（宍戸栄徳監修，宍戸律子訳：「公平分割の法則」，TBS ブリタニカ (2000))．

[10] Brams, S. J., Taylor, A. D. and Zwicker W. S.: "A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125, 547-554 (1997).

[11] Gamow, G. and Stern, M.: "Puzzle-Math", New York: Viking (1958) (日本語訳：ガモフ，スターン（由良統吉訳：「数は魔術師」，白揚社 (1958, 1999))．

[12] Haake, C.-J., Raith, M. G. and Su, F. E.: "Bidding for envy-freeness: A procedural approach to *n*-player fair-division problems", *Social Choice and Welfare*, 19, 723-749 (2002).

[13] Klijn, F.: "An algorithm for envy-free allocation in an economy with indivisible objects and money", *Social Choice and Welfare*, 17, 201-215 (2000).

[14] Robertson, J. and Webb, W.: "Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can", Natic, MA: A K Peters (1998).

[15] Shishido, H. and Zeng, D.-Z.: "Mark-choose-cut algorithms for fair and strongly fair division", *Group Decision and Negotiation*, 8, 125-137 (1999).

[16] Su, F. E.: "Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division", *American Mathematical Monthly*, 106, 930-942 (1999).

[17] Zeng, D.-Z.: "Approximate envy-free procedures" (F. Patrone, I. Garcia-Jurado and S. Tijs eds.), *Game Practice: Contributions from Applied Game*, 259-271, Kluwer Academic Press (2000).

[18] 曽道智，茨木俊秀：「公平分割とその手順」，応用数理，9, 12-27 (1999)．