

ネットワークシステムの信頼性の定量的評価法 — 枝故障に対する連結性保持の信頼度計算法 —

今井 浩

ネットワークシステムは、常に故障にさらされている。ネットワーク信頼度は、局に対応する点、回線に対応する枝で故障が起こった際に、システムがそれでも正常に動作できる確率を評価するものである。本稿では、枝故障の場合のネットワーク全端子信頼度の計算について、計算量的には困難であるものの、中規模サイズの問題であれば現実解けることを示す。

キーワード：ネットワーク信頼度，#P 完全，2 分決定グラフ (BDD)

1. ネットワーク信頼性

従来の電話網から先端のインターネットの展開を支える情報ネットワークは、社会基盤としての重要性をさらに増しており、その信頼性の定量的評価が望まれる。阿部[1]は、通信網の安全性という観点からの信頼性設計について述べている。通信網のみならず、電力やガスといった社会基盤でも同様で、例えば電力網について解説したものに加藤[5]がある。電話を中心とした通信網の場合、そこでは電話の中継局そのものも故障するモデルを検討している。しかし、中継局のような点的施設については、耐震構造にするなどの反映で中継局は安全であると仮定して対策が立てられている場合もある。

本稿では、中継局では故障が生じず、中継局間を結ぶ回線にのみ障害が生じる場合の信頼性を定量的に評価する方法について論じる。ネットワーク構造をグラフとみなすと、回線故障は枝の切断に対応する。ある回線に故障があったとしても、迂回路を使うことにより連絡可能にすることは、枝が除去されたネットワークが連結であることに対応する。最も基本的な全端子ネットワーク信頼度は、故障が確率的に生じたときのネットワークの耐故障性を確率として評価したものである。具体的には、グラフ G の各枝 e が確率 $p(e)$ で独立に消滅するとき、残った枝からなる部分グラフが連結である確率を、このグラフの全端子信頼度 $R(G)$ と呼ぶ。

本稿では、著者らのグループが提案している BDD (2 分決定グラフ) という構造を用いた新解法[2, 3] を簡単な例で説明し、これによって中規模の通信網モデルの信頼度 $R(G)$ を厳密に実行時間内で計算できることを述べる。さらに通常用いられるループ構造をもつネットワークに対して、日本の地理を反映した仮想ネットワークを考え、そのような場合にこの解法が非常に有効に働くことを示す。このような解析を通してネットワーク構築に資するところまで発展させていくことが望まれるが、本稿ではそのための土台として必要な定量的解析で新たにできるようになったことの解説を試みる。

2. ネットワーク信頼度の計算

定義より枝集合 E のグラフ G で枝 e の消滅確率が $p(e)$ の場合の全端子信頼度 $R(G)$ は

$$R(G) = \sum_A \left(\prod_{e \in A} (1 - p(e)) \cdot \prod_{e \in E - A} p(e) \right)$$

となる。ここで、和は全点を連結する枝部分集合である全域枝集合 $A \subseteq E$ 全てについてとる。この信頼度 $R(G)$ は、枝 e に対して次の漸化式を満たす。ここで、 G/e , $G \setminus e$ は枝 e を削除・縮約したグラフを表す。

$$R(G) = \begin{cases} (1 - p(e))R(G/e) & e : \text{橋} \\ R(G \setminus e) & e : \text{ループ} \\ p(e)R(G \setminus e) + (1 - p(e))R(G/e) & \text{他の場合} \end{cases}$$

ここで枝 e が橋であるとは、その枝を開放除去すると元は連結なグラフが連結でなくなることをいう。ループは自己閉路のことである。その他で、 $p(e)R(G \setminus e)$ という項は枝 e が消滅してしまった場合の信頼度

いまい ひろし

東京大学 大学院情報理工学系研究科
〒113-0033 文京区本郷 7-3-1

を、 $(1-p(e))R(G/e)$ という項は枝 e がなくならず、したがって縮約で短絡除去したグラフの $R(G/e)$ を計算することに帰着させてこの場合の信頼度を計算するもので、それを足せば全体の信頼度が出てくる。

枝の順番を一つ固定して、この漸化式をその枝順に適用していくと、2分木構造へ展開して全端子信頼度 $R(G)$ を計算する過程が得られる。その計算過程で、それまでに同じ枝部分集合を展開していった（展開木構造で同じレベルの）ところに完全に同じグラフがたくさん現れる。それらのグラフは、同じなので当然信頼度も同じである。Imai, Sekine, Imai[3], 今井[2]は、この展開の2分木構造で同じグラフを一つにまとめることが容易にでき（すると展開木構造は木ではなくレベル化されたグラフになる）、その構造を計算しながら信頼度 $R(G)$ が計算できることを示した。

図1はそれを完全グラフ K_3 の場合で示したものである。図の右側が、BDDに対応した信頼度計算の直線プログラムである。このまとめ・共有化をせずにどんどん展開していった場合、展開木の葉の個数は元のグラフの全域木の数になる。 K_3 の場合はたかが9であるが、実際にはこれが指数的に爆発するので計算が困難なのを、この共有化によって中規模問題まで克服するという手法である。詳細は文献[2]を参照されたい。

この展開グラフは、論理関数を表すグラフ構造であるBDDと関係しており、単にBDDと呼ぶ。このBDDは、グラフの枝を解放除去・短絡除去していくと、根の0レベルから最終的に空グラフに対応する枝数のレベルまでのグラフ（それぞれマイナーと呼ばれる）が得られる。マイナーの総数をBDDの点数という。同じマイナーを共有することによって、通常は倍々が増えていく展開構造をかなりコンパクトにおさえることができる。特に、地理的制約から平面構造を

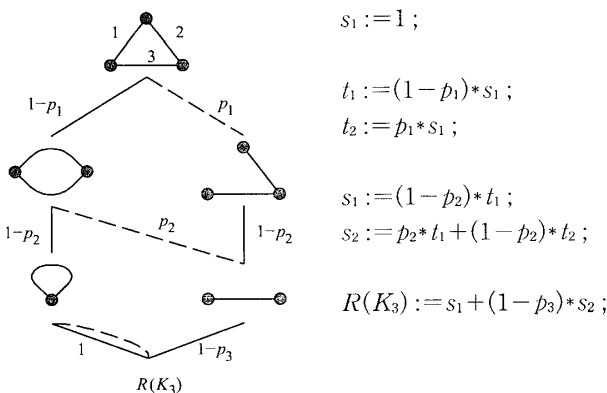


図1 BDDによる信頼度計算

グラフがもつ場合等は、このアプローチが特に有効になる。

3. 実際の計算例

実際にこのくらい大規模でも計算できるのだということ、実例で示していく。

3.1 完全グラフの全端子間信頼度の多項式時間計算

まず、上述の完全グラフの場合について、対称性を活用することによってこの場合に特別構成できる多項式時間アルゴリズムを $n=50$ 点までの完全グラフに適用し、その信頼度関数のグラフを図2に示す。50点と小規模に見えるが、完全グラフであるので50点の場合で $\binom{50}{2}=1225$ 本の枝がある。

3.2 一般の場合の実験グラフ

以下では、一般の場合について、上述の関根らのアプローチで分離集合などよい性質がある典型例である $k \times k$ 格子グラフと、Karger, Tai[4]によって実験に用いられているグラフ例のDelaunay三角形分割と近接グラフの例を示す。ここでの実験は、古いSUN Ultra 170 MHz CPU, 256 MBメモリのワークステーションを用いている。

3.2.1 格子グラフ

$k \times k$ 格子グラフ $G_{k,k}$ の信頼度計算結果を図3、表1に示す。このように、点数で100弱、枝数で200弱のグラフの信頼度を正確に計算することができる。

3.2.2 Delaunay 三角形分割

Delaunay 三角形分割は、計算幾何で代表的な構造であり、幾何的な近さを素直に実現したグラフである。

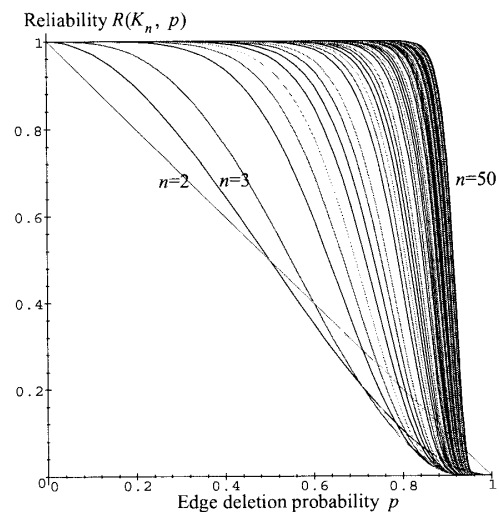


図2 完全グラフ K_n の信頼度 ($n=2, \dots, 50$)

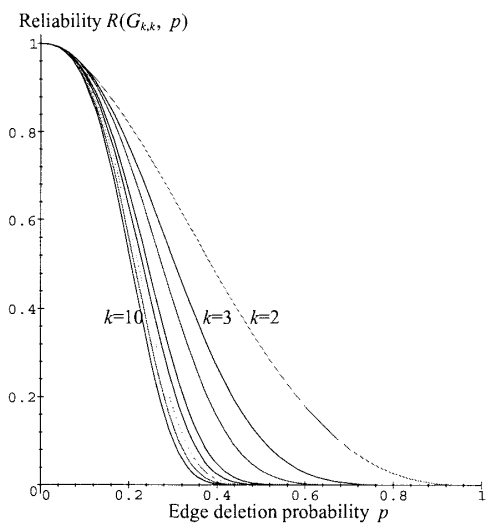


図3 格子グラフ $G_{k,k}$ の信頼度 ($k=2, \dots, 10$)

表1 格子グラフ $G_{k,k}$ の信頼度関数 $R(G_{k,k}; p)$

k	Reliability Polynomial $R(G_{k,k}; p)$
2	$-3p^4 + 8p^3 - 6p^2 + 1$
3	$79p^{12} - 560p^{11} + 1668p^{10} - 2656p^9 + 2331p^8 - 960p^7 + 96p^5 + 21p^4 - 16p^3 - 4p^2 + 1$
4	$-17493p^{24} + 232144p^{23} - 1409764p^{22} + 5168576p^{21} - 12693232p^{20} + 21854512p^{19} - 26726036p^{18} + 22824576p^{17} - 12739373p^{16} + 3710880p^{15} + 139672p^{14} - 370176p^{13} - 35464p^{12} + 63968p^{11} + 5912p^{10} - 7808p^9 - 1791p^8 + 656p^7 + 204p^6 + 64p^5 - 8p^4 - 16p^3 - 4p^2 + 1$
5	$32126211p^{40} - 681809240p^{39} + 6852471548p^{38} - 43322118652p^{37} + 192968405711p^{36} - 642590690400p^{35} + 1655933457966p^{34} - 3370276114636p^{33} + 5476061558391p^{32} - 7122774813980p^{31} + 7375859530466p^{30} - 5981426876044p^{29} + 3667377815630p^{28} - 1573096624396p^{27} + 375423772810p^{26} + 9584416484p^{25} - 26112103320p^{24} - 6268146140p^{23} + 8011274210p^{22} - 1051500660p^{21} - 575028980p^{20} - 53196700p^{19} + 139031550p^{18} - 2265380p^{17} - 10705120p^{16} - 3593556p^{15} + 1357510p^{14} + 394172p^{13} + 35042p^{12} - 49636p^{11} - 10290p^{10} - 2036p^9 + 1021p^8 + 164p^7 + 250p^6 + 64p^5 - 11p^4 - 20p^3 - 4p^2 + 1$

ここでは、正方形内に50点が一様分布した例を図4に示す。BDDアプローチでの枝順は、点を x 座標順に並べ、それから枝順を決定している。

3.2.3 70点の近接グラフ

図5, 6に、通信網で近めのところをある程度の冗長度をもって構成したモデルである近接グラフの例を示す(構成法は文献[2]参照)。図5は点数が50点で信頼度のグラフを示したもの、図6は点数が70点で、枝数205のもので計算過程情報を示したものである。この場合は、基本的に左端点の x 座標順優先で枝を並べて展開すると、BDDでの各レベルの点数(幅)が小さくおさえられる。理論的には、元のグラフで枝順に対して消去面(図の front) というものを考えた

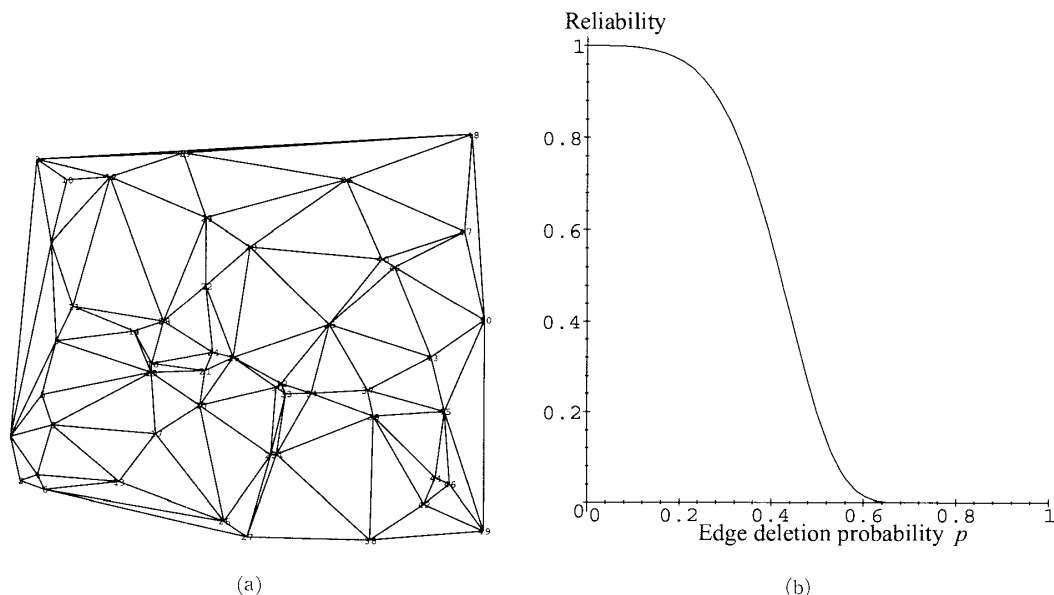


図4 (a)50点のDelaunay 三角形分割, (b)信頼度

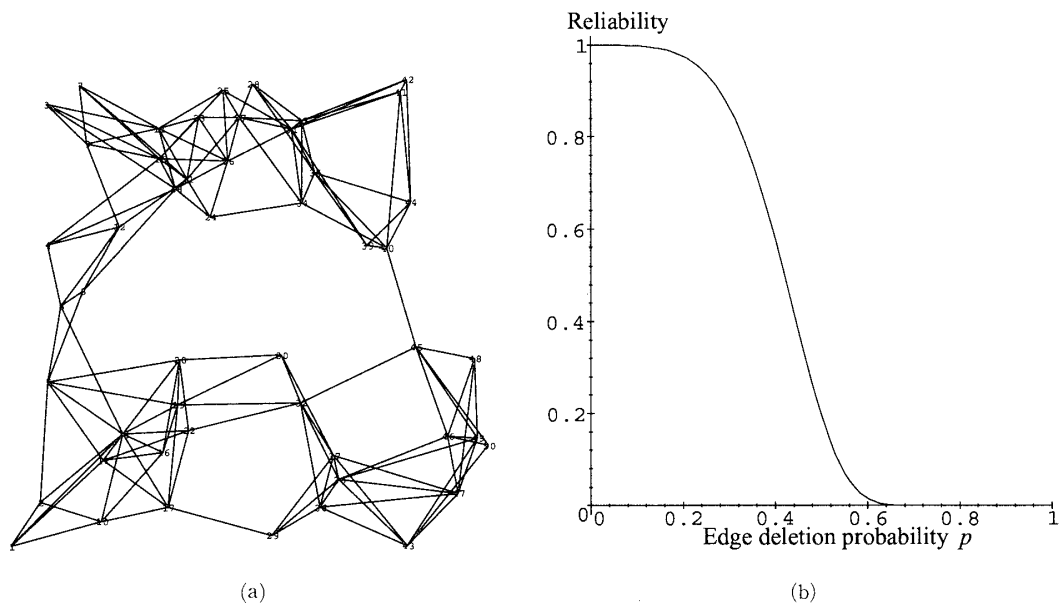


図5 (a) 50 点の近接グラフ, (b)信頼度

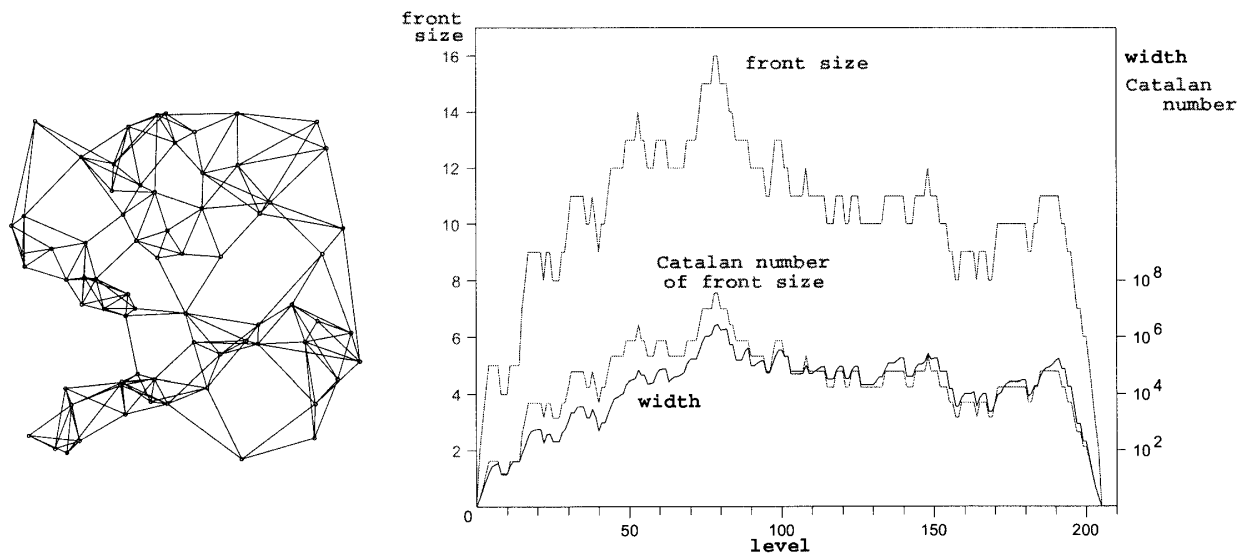


図6 70 点 205 枝の近接ネットワーク(左)とその信頼度計算 BDD のレベル毎の幅(右)

き、その指数オーダ（正確には Catalan 数）で幅がほぼおさえられることがわかっている。このように 200 本を超えるネットワークでも漸化式を厳密に展開して信頼度関数を正確に求めることができる。

3.2.4 ループ構造をつないだグラフ

ループ構造は、1 枝故障に対し、その枝を含まない方のルートに変更という最も簡単な操作によって耐故障性が実現でき、十分に信頼できる回線を使っているもとで現実的に使いやすいものである。日本のように地理的に細長い場合、各地域でループ構造を構築し、それらをつなぐネットワークも素直である。ここでは、本稿の投稿時点での NTT ホームページの耐災性・信頼性向上に関するページの模式図や日本の光交換ネッ

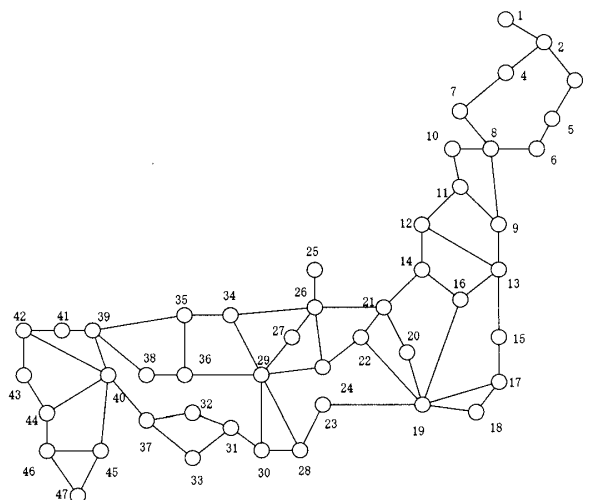


図7 仮想のループ連結ネットワーク

表2 ループ連結ネットワークでのBDDサイズと幅

場合	点数	枝数	BDD サイズ	BDD 幅	全域枝 集合数
(a)	47	67	319	13	9.6×10^{13}
(b)	48	114	2629	190	1.9×10^{32}

トワークの例[6]などを例に、図7のような47点、67枝の仮想ネットワークを考え、

- (a) このグラフでの信頼度を計算、
 - (b) このネットワークにさらに1点加え、その点を既存の点と全て結んだグラフでの信頼度を計算
- する際に、計算構造であるBDDがどのくらいのサイズになるかを表2に示す。上述の近接グラフよりもっと小さな計算構造で厳密に信頼度が計算できることがわかり、したがってこのネットワーク上での種々の最適化なども容易になっている。

4. おわりに

以上、ネットワーク信頼度計算について計算例を中心に述べてきた。計算の観点からは、信頼度計算という#P完全の難しい数え上げ問題などに対して、これまでの手法では解けなかったサイズの問題で、実際に解く要請がある問題を解けるようにすることについて述べてきたことになる。

これは、理論を展開することによりそれまでその理論なしでは解けなかった問題を現実に解けるようにするという、理論研究によるインパクトの説明でもある。実際、BDDの研究は、VLSI CADでの応用が華々しく展開され、その組合せ論への拡張を通してその離散システム論としての理論が深まるとともに、このように信頼度計算の関係からは計算グラフとしての本質を明らかにするところまでつながっている。計算量理論・アルゴリズム理論の観点からはさらなるBDDの

理論的・実際研究が面白いと思われるし、また離散システム論の観点からは無向グラフから有向グラフに拡張して、グリードイドと有向グラフの信頼度の解析が関係するなど、面白い題材が多数ある。

本稿が少しでも、「とにかく難しい問題を実際に解いて何らかの答を出すことがインパクトを与える」ことにつながっていれば幸である。

謝辞 本研究での成果は、OR学会創立40周年記念事業特別研究プロジェクトに選定された「ネットワーク構造を有するライフラインシステムの危機対応管理体制に関する研究」(代表者:大山達雄)の研究の一環から得られたものである。

参考文献

- [1] 阿部威郎: 通信網のセーフティー電話網の信頼性設計一, 応用数理, Vol. 9, No. 4 (1999), pp. 298-309.
- [2] 今井浩: ネットワーク信頼度計算の周辺一組合せ数え上げの新展開, 離散構造とアルゴリズム V (藤重悟編), 近代科学社, (1998), pp. 1-50.
- [3] H. Imai, K. Sekine and K. Imai: Computational Investigations of All-Terminal Network Reliability via BDDs, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E 82-A, No. 5 (1999), pp. 714-721.
- [4] D. Karger and R. P. Tai: Implementing a Fully Polynomial Time Approximation Scheme for All Terminal Network Reliability, *Proceedings of the 8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1997), pp. 334-343.
- [5] 加藤守利: 電力供給システムにおけるリスク管理, 応用数理, Vol. 9, No. 4 (1999), pp. 310-321.
- [6] 宮本健太郎, 原井洋明, 村田正幸, 宮原秀夫: 波長変換に制限のある光交換ネットワークの性能評価ーリンクに複数のファイバがある場合一, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol. J 83-B, No. 8 (2000), pp. 1125-1134.

用語解説

カタラン数 (Catalan numbers)

さまざまなグラフにおける枚挙問題に現れる数字であり、 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ の関係式で与えられる。1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ... という自然数列になる。 $n \times n$ の正方格子状の道路をある角から最遠端の角まで行く最短経路の数, n 項式に括弧を挿入する組合せの数, 凸 n 多角形を三角形に分割する方法の総数などに現れる。ベルギーの数学者 E. C. Catalan (1814~1894) に因んで名付けられた。