

経路数え上げによるネットワークシステムの連結性の定量的評価とわが国道路網への応用

大山 達雄, 諸星 穂積

ネットワークシステムの連結性の“強さ”を定量的に評価するために、経路数え上げ法を用いた安定連結関数、期待安定連結関数を定義し、モンテカルロ法を用いた計算法による結果を示す。これらの方法をわが国の現実の道路網に適用し、都道府県、地域別の期待安定連結関数を示し、近似関数を用いた解析を試みる。このような定量的評価方法が確立すれば、いかにしてライフラインネットワークのようなネットワーク構造を有するシステムをより安定した、頑健な、高信頼性を有するシステムに変換できるか、といった問題を解決するのにも有用となるであろう。

キーワード：ネットワークシステム、安定連結性、安定連結関数、期待安定連結関数、モンテカルロ法、道路網

1. はじめに

交通道路網を構成する道路ネットワークはわれわれの日常生活にとって重要かつ不可欠なものであって、これらは電力送配電網を構成する電力ネットワーク、都市ガス供給網を構成する都市ガスネットワーク、水道供給網を構成する水道ネットワークなどとともに総称してライフラインネットワークと呼ばれている。本稿の目的は、ネットワーク自体の信頼性、安定性の一つの定量的評価方法を提起し、それをわが国の道路ネットワークシステムの“連結性の強さ”を定量的に計測するのに適用し、その有用性、実用性を検証することである。このような定量的評価方法が確立すれば、いかにしてライフラインネットワークのようなネットワーク構造を有するシステムをより安定した、頑健な、高信頼性を有するシステムに変換できるか、といった問題を解決するのにも有用となるであろう。

ネットワークシステムの信頼性を定量的に評価する方法はこれまでもいろいろな方法が提起されている。最も一般的な方法として、図1、2に示すようなそれぞれ m 本の枝からなる直列系、並列系のネットワークの信頼度はこれらの両端の点が互いに連結である確率であると仮定する。これらのネットワークを構成するそれぞれの枝の信頼度を r 、すなわち不信頼度を $f=1-r$ とするとき、ネットワーク全体の信頼度、す

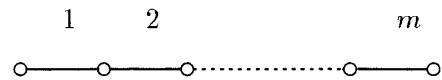


図1 直列系ネットワーク

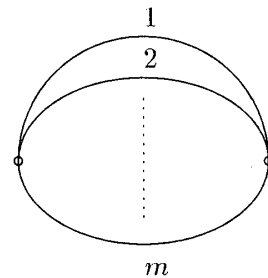


図2 並列系ネットワーク

なわちネットワークの両端の点が互いに連結となる確率は以下のように与えられる。

図1の直列系ネットワークの信頼度 R_1 は、ネットワークが機能するためにはすべての枝が機能しなければならないので、各枝の信頼度の積として $R_1=r^m$ のように与えられる。図2の並列系のネットワークの信頼度 R_2 は、ネットワークが機能しなくなるのはすべての枝が機能しない場合なので、各枝の不信頼度の積 $F_2=f^m=(1-r)^m$ を用いて、 $R_2=1-F_2=1-(1-r)^m$ のように与えられる。

2. ネットワークシステムの安定連結性

頂点集合を V 、枝集合を E とするネットワーク $N=(V, E)$ において、頂点の個数、枝の本数をそれぞれ $|V|=n$ 、 $|E|=m$ とする。またネットワーク $N=$

おおやま たつお, もろほし ほづみ
政策研究大学院大学
〒162-8677 新宿区若松町2-2

(V, E) の枝は無向枝とする. ネットワーク $N=(V, E)$ において, 異なる二つの頂点を結ぶ経路 (向きを考慮しない) は全部で $\frac{n(n-1)}{2}$ 組だけ存在する. いま m 本の枝のうち k 本を除去した場合に得られるネットワークにおいて, 異なる二つの頂点を結ぶ経路の本数を $c_m(N, k)$ と表す. そして $c_m(N, k)$ の $c_m(N, 0)$ に対する割合を $s_m(N, k)$ と表す. すなわち $K=\{0, 1, 2, \dots, m\}$ に対して, 以下のような関数を定義する.

$$s_m(N, k) = \frac{c_m(N, k)}{c_m(N, 0)} \quad k \in K \quad (1)$$

ここで枝を全く除去しない場合の異なる二つの頂点を結ぶ経路の本数は $\frac{n(n-1)}{2}$ であるので, $c_m(N, 0) = \frac{n(n-1)}{2}$ となる. したがって $s_m(N, k)$ については, 次の関係が成立する.

$$0 \leq s_m(N, k) = \frac{2c_m(N, k)}{n(n-1)} \leq 1 \quad k \in K \quad (2)$$

ここで注意すべきことは, 一般に $c_m(N, k)$ あるいは $s_m(N, k)$ の値は 1 通りではない, すなわちネットワーク $N=(V, E)$ に対する k の関数 $s_m(N, k) = \{s_m(N, k)\}$ は 1 価関数ではないということである. ネットワーク $N=(V, E)$ の m 本の枝のうち k 本を除

去する場合, 一般に, 得られる $s_m(N, k)$ の値は枝の除去の仕方によって異なる. ネットワーク $N=(V, E)$ の k 本の枝を除去した場合の 2 頂点を結ぶ総経路本数を与える集合を表す関数 $s_m(N, k)$ に対して, 上の式(2)で与えられる関数を安定連結関数と呼ぶことにする.

m 本の枝からなる単一経路グラフ, 閉路グラフをそれぞれ P_m, C_m , そして n 個の頂点からなる完全グラフ K_n と表す. このとき, グラフ P_3, C_3, K_4 , そして関数 $s_3(P_3, k), s_3(C_3, k), s_6(K_4, k)$ はそれぞれ図 3~5 のように与えられる.

一般に, 枝本数 m を有するネットワークが与えられた場合, 安定連結関数 $s_m(N, k)$ を厳密に求めるには 2^m 個のネットワークに対してすべての経路の本数を求めるため, 膨大な計算量を要する.

頂点の個数 n , 枝の本数 m のネットワーク $N=(V, E)$ に対して, m 本の枝のうち k 本を除去する仕方の数は, m 個のものから k 個を取り出す場合の取り出し方の数 $C(m, k) = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ だけ存在する.

枝の除去の仕方が同じ確率で発生すると仮定した場合の $\{s_m(N, k)\}$ の期待値を表す関数を以下のように定義し, 期待安定連結関数と呼ぶことにする.

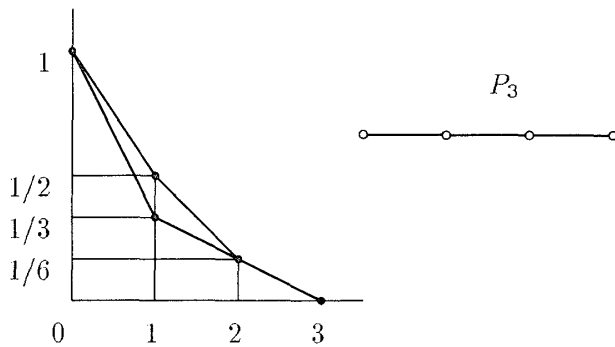


図3 $s_3(P_3, k)$

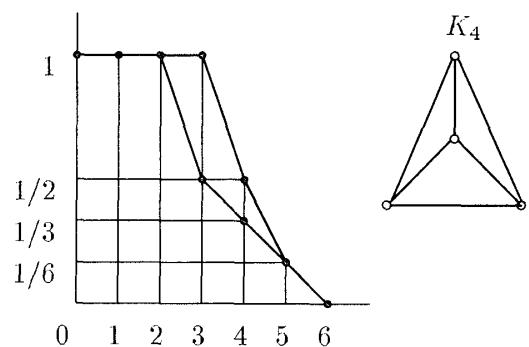


図5 $s_6(K_4, k)$

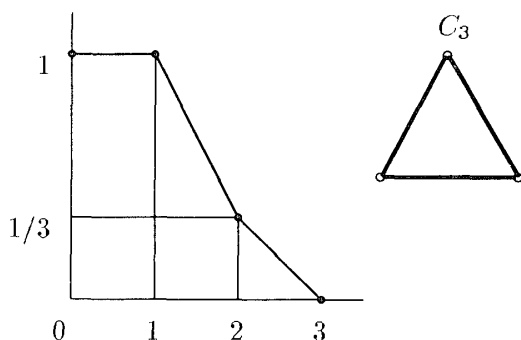


図4 $s_3(C_3, k)$

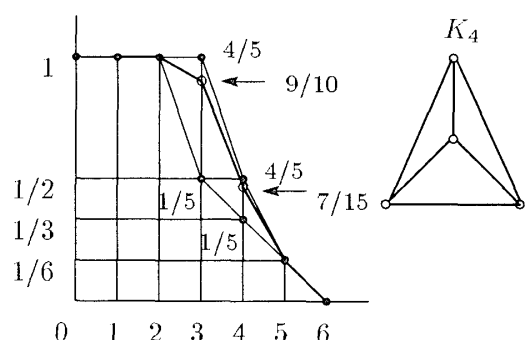


図6 $\bar{s}_6(K_4, k)$

$$\bar{s}_m(N, k) = E\{s_m(N, k)\} \quad (3)$$

C_3 については、各 k に対して $s_3(C_3, k)$ が一意的に定まるので、期待安定連結関数 $\bar{s}_3(C_3, k)$ は、この関数と同一となる。グラフ K_4 に対する期待安定連結関数 $\bar{s}_6(K_4, k)$ は、図6のように与えられる。

3. 道路ネットワークの安定連結関数

図7に示したグラフは、わが国の各都道府県を一つの頂点として表し、二つの都道府県が隣接する（境界を有する、あるいは橋でつながっている）場合にそれらを枝で結んで得たグラフである。このグラフは頂点数46個（沖縄県を除いた）、枝本数90本からなる。

図7に示したグラフの安定連結関数を求めるには膨大な計算量を要するため、妥当な時間内に安定連結関数を得ることは不可能である。そこで以下に示すアル

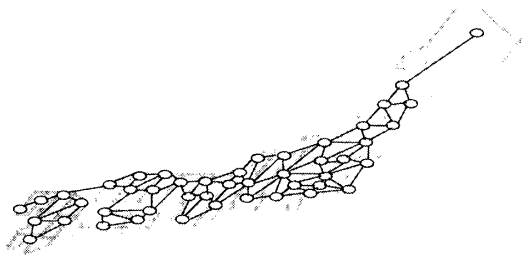


図7 グラフ（全日本）

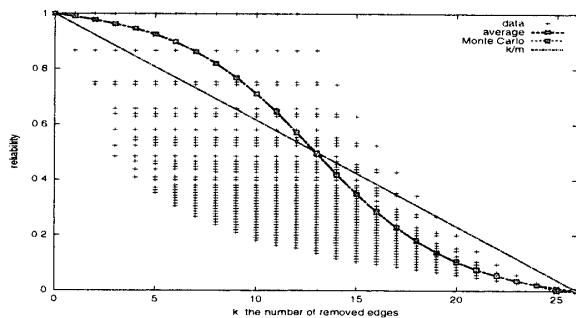


図8 安定連結関数（東日本）

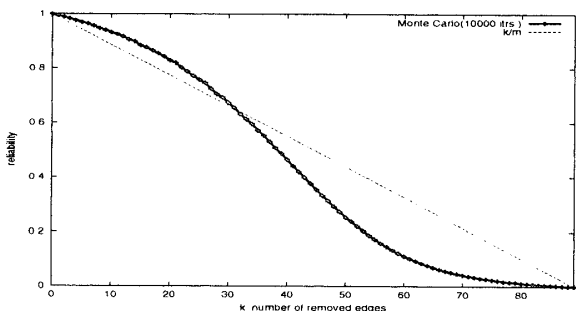


図9 期待安定連結関数（全日本）

ゴリズムに基づくモンテカルロシミュレーション法を用いて安定連結関数の近似推計を試みる。

モンテカルロシミュレーション法のアルゴリズム

ステップ1. 各枝本数 k に対して、以下の操作(i), (ii)を r 回繰り返す。

(i) グラフ G からランダムに k 本の枝を選んで除去し、新たなグラフ G'' を作る。

(ii) グラフ G'' において、異なる2頂点間の経路本数を計算する。

ステップ2. ステップ1で求めた r 個の値の分布と平均を求める。

関東以東の東日本に対応する頂点数14個（沖縄県を除いた）、枝本数25本からなる部分グラフに対して厳密な安定連結関数を求めると、図8に示すような安定連結関数、期待安定連結関数（折れ線部分）が得られる。モンテカルロシミュレーション法のアルゴリズムを $r=10000$ として適用すると、上の厳密な期待安定連結関数（折れ線部分）とほとんど一致する。

さらに全日本のグラフに対してモンテカルロシミュレーション法のアルゴリズムを $r=10000$ として適用すると、図9に示すような期待安定連結関数（折れ線部分）が得られる。

4. 道路ネットワークの期待安定連結関数

図10はわが国全土（沖縄県を除く）の道路ネットワークの概略を示したものである。図11~18に示したグラフは、わが国全土を八つの地域に分割したものである。それぞれの地域の各都道府県別の道路ネットワークに対してモンテカルロシミュレーション法のアルゴリズムを適用し、期待安定連結関数を求めると、各地域に属する都道府県別期待安定連結関数は図19~24のようになる。ここで横軸 x は枝（道路セグメント）の削除割合、すなわち k を削除する枝の本数、 m を枝の本数とすると、 $x=k/m$ を表す。

図19~24に得られた期待安定連結関数を以下のような関数を用いて近似することを試みる。次式において、 p, q はパラメータであって、 $p > 0, q > 0$ とする。

$$f(x) = \frac{(1-x^p)^q}{x^{pq} + (1-x^p)^q} \quad (4)$$

式(4)において、 $f(0)=1, f(1)=0$ はパラメータ p, q の値のいかんに関わらず成立する。また $q=1$ とすると、 $f(x)=1-x^p$ となり、さらに $p=1$ とすると、 $f(x)=1-x$ となり、近似期待安定連結関数は点 $(0, 1)$ と点 $(1, 0)$ を結ぶ線分となる。社会科学としての政治学の

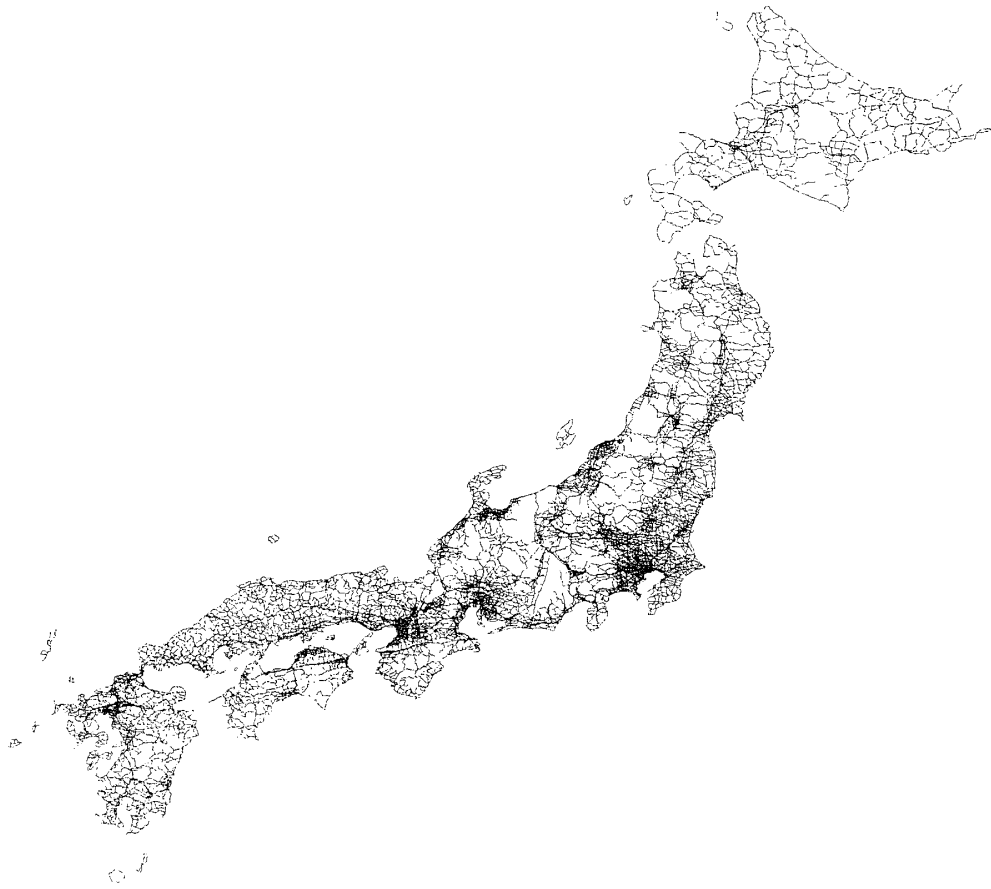


図10 日本の道路網

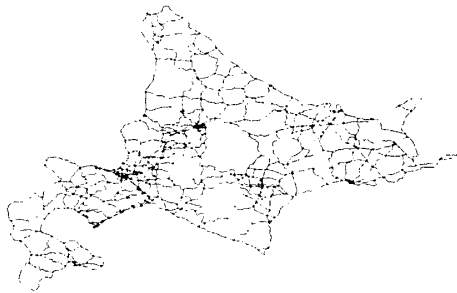


図11 北海道道路網



図13 関東道路網



図12 東北道路網

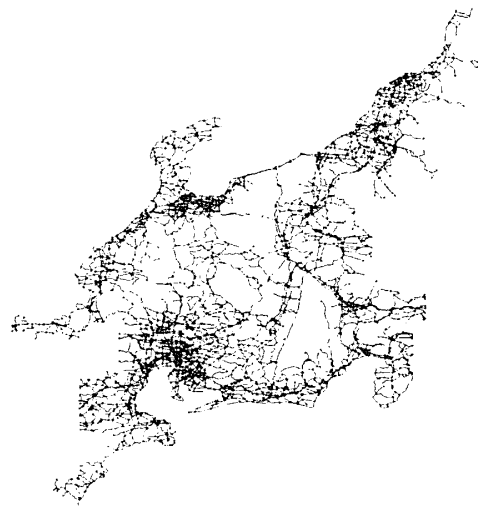


図14 中部道路網

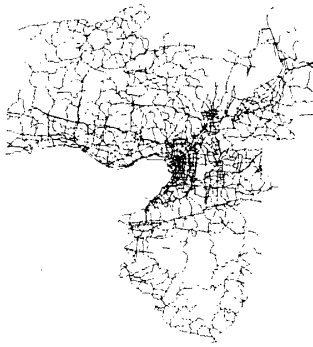


図 15 近畿道路網

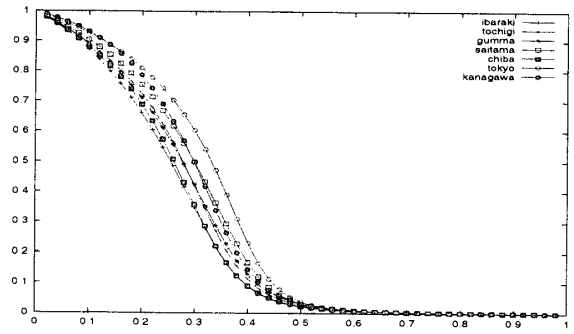


図 20 関東道路網の期待安定連結関数



図 16 中国道路網

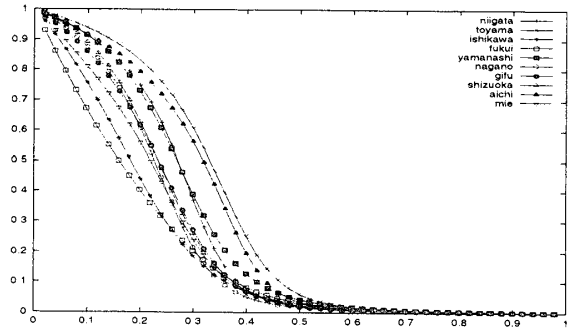


図 21 中部道路網の期待安定連結関数



図 17 四国道路網

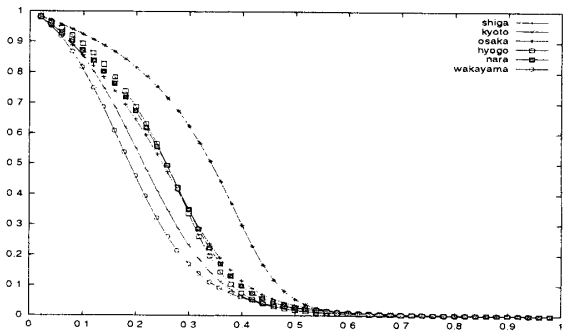


図 22 近畿道路網の期待安定連結関数

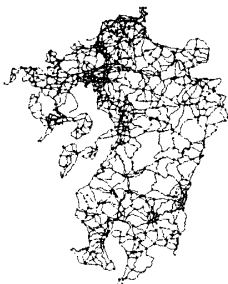


図 18 九州道路網

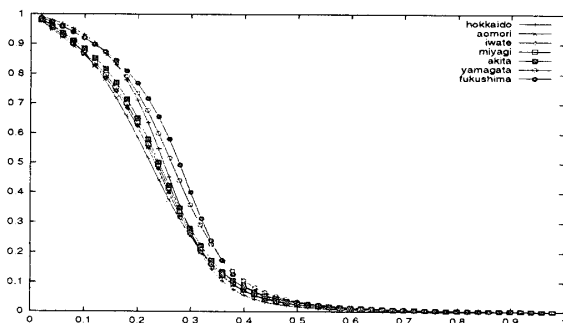


図 19 北海道・東北道路網の期待安定連結関数

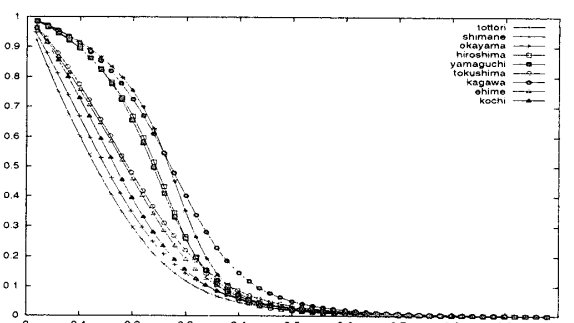


図 23 中国・四国道路網の期待安定連結関数

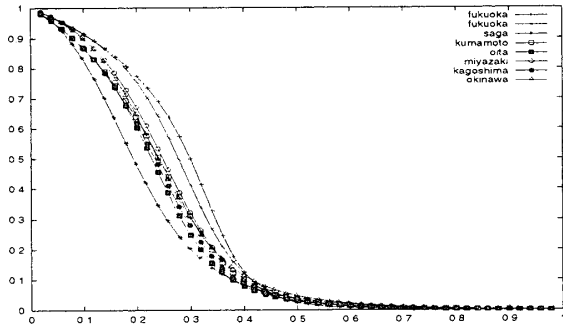


図24 九州道路網の期待安定連結関数

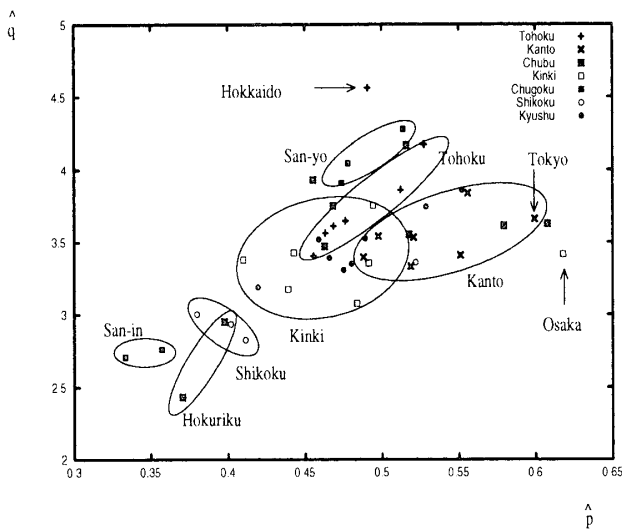


図25 パラメータ推計値 (\hat{p} , \hat{q})

分野において、選挙制度として小選挙区制を採用すると2大政党制に近くなるということがよくいわれている。2大政党制下においては、選挙の際の各党の得票率と議席獲得率の間には“3乗則”が成立するということが実証的に示されている。すなわち各政党の議席獲得率は得票率の3乗に比例するというものである。この場合の関数形は、式(4)において $p=1, q=3$ に対応する。

式(4)において、パラメータ p は関数の減少の“タイミング”を表し、 p が小さい (大きい) ほど、減少の“タイミング”が早い (遅い)、すなわち x の値が小さい (大きい) ところから減少することを表す。またパラメータ q は関数の減少の“速度”を表し、 q が大きい (小さい) ほど、減少の“速度”が大きい (小さい)、すなわち急激 (緩やか) に減少することを表す。したがって、推計値 \hat{p} の値が大きい (小さい) ほど減少のタイミングが遅い (早い) ので、ネットワークは強靱 (脆弱) であるといえる。また推計値 \hat{q} の値が大きい (小さい) ほど減少の速度が早い (緩やか) ので、ネットワークは柔軟 (軟弱) であるといえる。

都道府県別の近似期待安定連結関数に対するパラメータ p, q の推計値 \hat{p}, \hat{q} 、および関数近似の適合度を示す決定係数 R^2 は表1に示されている。パラメータ p, q の推計値 \hat{p}, \hat{q} を2次元平面上にプロットすると、図25が得られる。図25の結果から、六つの地域ごと

表1 都道府県別パラメータ推計値 (\hat{p} , \hat{q})

都道府県	\hat{p}	\hat{q}	R^2	都道府県	\hat{p}	\hat{q}	R^2
北海道	0.49	4.56	0.9984	青森	0.45	3.41	0.9989
岩手	0.46	3.56	0.9965	宮城	0.47	3.62	0.9968
秋田	0.48	3.65	0.9978	山形	0.51	3.86	0.9983
福島	0.53	4.17	0.9961	茨城	0.49	3.40	0.9950
栃木	0.52	3.53	0.9943	群馬	0.52	3.33	0.9949
埼玉	0.55	3.41	0.9937	千葉	0.50	3.54	0.9949
東京	0.60	3.66	0.9923	神奈川	0.56	3.84	0.9964
新潟	0.52	4.17	0.9958	富山	0.61	3.63	0.9961
石川	0.40	2.95	0.9985	福井	0.37	2.43	0.9978
山梨	0.52	3.55	0.9982	長野	0.46	3.93	0.9971
岐阜	0.46	3.47	0.9963	静岡	0.47	3.75	0.9984
愛知	0.58	3.61	0.9927	三重	0.44	3.17	0.9951
滋賀	0.48	3.08	0.9960	京都	0.44	3.43	0.9984
大阪	0.62	3.42	0.9920	兵庫	0.49	3.75	0.9956
奈良	0.49	3.35	0.9952	和歌山	0.41	3.38	0.9994
鳥取	0.36	2.76	0.9991	島根	0.33	2.71	0.9984
岡山	0.51	4.28	0.9961	広島	0.48	4.05	0.9968
山口	0.47	3.91	0.9979	徳島	0.41	2.82	0.9989
香川	0.52	3.36	0.9984	愛媛	0.40	2.93	0.9978
高知	0.38	3.00	0.9989	福岡	0.55	3.86	0.9935
佐賀	0.53	3.74	0.9971	長崎	0.42	3.19	0.9996
熊本	0.48	3.31	0.9973	大分	0.46	3.52	0.9980
宮崎	0.49	3.52	0.9986	鹿児島	0.47	3.39	0.9979
沖縄	0.48	3.35	0.9992				

に属する都道府県に対する推計値 \hat{p} , \hat{q} の値が近傍に存在している, すなわち近隣都道府県の道路ネットワークの特性が類似していることがわかる. 九州各県はほぼ45度の勾配で細長く分布しているものの, 関東, 東北, 山陽地域は推計値 \hat{p} , \hat{q} の値がいずれもかなり大きく, また北陸, 四国, 山陰は推計値 \hat{p} , \hat{q} の値がいずれも相対的に小さいという特徴がある. これらの結果からは, 東京, 大阪, 北海道をはじめとして, 関東, 東北, 山陽地域の道路ネットワークが全般的に強靱かつ柔軟ということになるが, これはこれらの地域においては, 一般に道路本数が多く, かつ構造的にも集中型になっていることによるものと思われる.

5. まとめ

本稿で取り上げたネットワークの安定連結性の評価方法は, 現実の電力, ガス, 水道, 道路, 情報通信等のネットワーク構造システムの連結安定性を定量的に評価するのに適用可能である. すなわちそれぞれのネットワーク構造システムの一部構成要素が故障, 破壊, 破損等によって利用不可能となったとき, システム全体としての連結安定性がどのように, そしてどの程度変化するかを定量的に見ようとするものである. このような手法を確立することによって, それぞれのネットワークの連結安定性を定量的に評価することが可能となれば, ネットワークの構造をどのようにすれば連結安定性を高めることが可能となるか, あるいはネットワーク構造システムにおけるいずれの構成要素が連結安定性の観点からみて重要であるか, といった疑問にも答えることが可能になる.

しかしながら, 本稿で紹介した安定連結性の定量的

評価方法は, 一般にグラフの枝の本数が m のとき, 2^m のオーダーの膨大な計算量を要するという点が問題となる. したがって, グラフの枝の本数が大きくなった場合に安定連結関数自体をどのようにして計算, あるいは推計すればよいか, 特に多価関数である安定連結関数の各 k に対する分布状況, 最大値, 最小値をどのようにして推計するかという問題は重要である. 前節で紹介したシミュレーションに基づく方法は一つの有力な方法である. このような方法の将来性を探ることは本研究の重要な将来課題である.

参考文献

- [1] Oyama, T. and A. Taguchi, "Application of the shortest path counting problem to evaluate the importance of city road segments in Japan", *Perspectives of Advanced Technology Society 3: Urban Life and Traffic*, Y. Matsuda and M. Fushimi (eds.), Maruzen Planet Co., Tokyo, Japan, pp. 3-20, 1996.
- [2] Oyama, T. and H. Morohosi, "A quantitative method for evaluating stable connectedness of the network-structured system", *Operations Research and Its Applications, Proc. the Fourth International Symposium, ISORA'02*, X.-S. Zhang and D. Liu (eds.), World Publishing, Beijing, pp. 54-66, 2002.
- [3] Oyama, T., "Weight of shortest path analyses for the optimal location problem", *JORSJ*, Vol. 43, No. 1, pp. 176-196, 2000.
- [4] 日本オペレーションズ・リサーチ学会創立40周年記念事業研究助成特別研究プロジェクト (代表 大山達雄), "ネットワーク構造を有するライフラインシステムの危機対応管理体制に関する研究報告書", 2001.