

オークションの設計理論と OR (1)

松井 知己, 渡辺 隆裕

1. はじめに

筆者達の妻は、どちらもとても朝寝坊である。しかし、筆者(w)の妻は早起きしてコンピュータの前に座ることが日課となっていた時期がある。インターネットオークションにFAX付き留守番電話を出品したときのことである。

「見て見て！ 7,000円まで上がってる！」とまだ寝ている筆者を起こす。インターネットを使う者は深夜の時間帯に入札することが多いため、朝起きると入札額が大きく上昇していることがよくあった。結局、このFAX電話は8,000円以上の値をつけて落札された。引っ越しの際にリサイクルショップの業者に聞いてみたところ「500円くらいなら買い取る」と言われた電話である。

彼女は、ネットオークションで物を買うこともある。あるときは、フードプロセッサーが欲しくてネットオークションを物色していた。良さそうなものはいろいろあるのだが、なかなか満足しない様子である。「何が気に食わないの？」「果物がスクイーズできるようなアダプターが付いているものがあるの？」「そんなものあるの？」「日本ではあまり見かけないけど、ベルギーで見たことがあるの」私はそのようなものが見つかるかどうか疑問に思ったが、果たして彼女はスクイーズ付フードプロセッサーがオークションされているのを見つけたのである。しかしながら、新品とされているその製品は、電源規格がヨーロッパのものであり、日本の家庭では使えない。「大丈夫」と彼女は言う。「実は、電源規格を変換するトランスを持っているの」彼女は長くベルギーに滞在したことがあるので、

そのとき使った電化製品を日本で使うための「トランス」を持っていた。かくして彼女はそのフードプロセッサーを1,000円で落札した。

良い時代になったわね、と彼女は言う。しかしこれは彼女にだけ良い話ではない。フードプロセッサーの売り手にとっても良い話であったはずだ。「スクイーズ付きのフードプロセッサーを好み、なおかつトランスを持っている日本人」はそんなにはいないはずである。売り手がこの製品を近所のフリーマーケットに出品しても、恐らく売れなかっただろう。「良い時代になったものだ」と筆者も思った。

オークションや入札は、経済学において仮想的に語られる「市場」を物理的に実現したものと言える。昔ながらのオークションには、魚、青果、花などの卸売市場や、サザビーズ、クリスティーズといったオークションハウスなどがある。しかしながら、近年はインターネットの発達で、様々なビジネスの現場や私達の生活に入り込みつつある。インターネットオークションは、オンラインショッピングと並んで、C2CやB2Cにおける新しい事業形態の代表例として位置付けられている。

ビジネスだけではない。総務省のe-Japan（電子政府）構想は、政府や自治体の公共事業入札への電子入札の導入を謳っており、既に一部では電子入札が開始されている。周波数利用権、温室効果ガスの排出権、電力の卸売市場など公共的なサービスや財においてもオークションの導入が検討されている。このように、オークションの技術は、公共的な分野でも、重要な役割を果たしていくだろう。

ネットワーク技術は、それ単独ではなくORや数理計画の技術と結びついたときに大きな価値を産む可能性を持っている。ロジスティクスやSCMなどは、その一つの例であろう。オークションもこのような可能性を秘めており、ORは、そのような技術を研究・開発する中心となる舞台となる力を持っていると我々は考

まつい ともみ

東京大学 大学院情報理工学系研究科

〒113-8656 文京区本郷7-3-1

わたなべ たかひろ

東京都立大学 経済学部経済学科

〒190-0397 八王子市南大沢1-1

えている。

今回から2号にわたり「オークションの設計理論とOR」というタイトルで原稿を掲載させてもらうことになった。これはOR学会主催で2003年春に行われたシンポジウム「数理計画の理論と実装」の中で講演した内容をもとに、数理計画の研究者だけではなくOR学会の読者に広く興味を持って頂こうと書き直したものである。

取り上げる話題についてだが、先に挙げたインターネットオークションのような「一つの財を売るオークション」には、ORの技術や数理計画は実はあまり関係がない。このようなオークションについては、古くより研究がなされており、既に様々な結果が得られている。これに対し近年、「複数の財を組合せて売るオークション」が注目を集めている。このようなオークションは、整数計画法を中心とした数理計画の技術が深く関わっており、現在も未解決な課題が多く、理論的研究の必要性も高い。また、オークションには、入札者の戦略的行動によって入札額が決まるため、解析にはゲーム理論が有効である。数理計画とゲーム理論というORの二つの道具を用いて解析される複数財オークションの問題は、大変興味深くエキサイティングな分野である。そこで、この複数財オークションの話題に、多くの紙面を割きたいと考えている。

本稿をきっかけにして、ORに携わる日本の研究者や実務家の方がオークション理論に興味を持って頂ければと願う次第である。

2. オークションの目的

オークションや公共事業の入札は何のために行うのだろうか？ オークションは物を高く売るため、公共事業の入札は事業を安く発注するために行う、そう考えている方は多いだろう。しかし、オークションが良いシステムであると経済学で考えられているのは、必ずしもそういう理由からではない。オークションの目的とは何か。まずこれを議論しなければオークションは語れない。複数財オークションの話の前に、一つの財を売るオークションで、オークションの目的について考えてみたい。

まず一つの財を売りたい個人（売り手）が1人の個人（買い手1）に、財を個別に売り渡す状況（相対取引）を考えよう。売り手はこの財の評価額を200円と考えており、買い手はその評価額を1,000円であると見積っているとす（図1）。2人は交渉によって財の

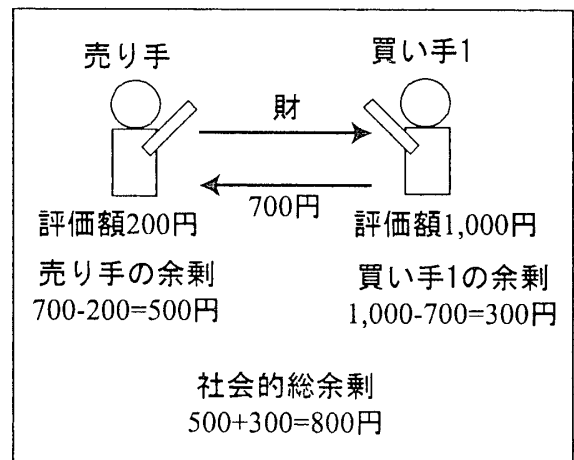


図1 相対取引と社会的総余剰

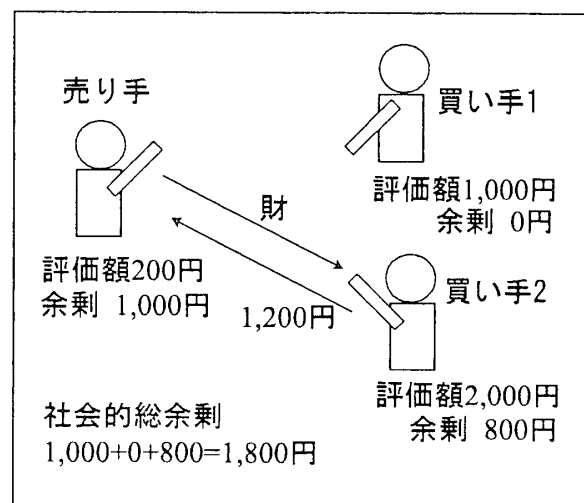


図2 オークションと社会的総余剰

売買額を決める。仮に700円で交渉が決着したとしよう。ここで、売り手が得をしたと考える $700-200=500$ 円を売り手の余剰、買い手が得をした $1,000-700=300$ 円を買い手の余剰と呼ぶ。売り手の余剰と買い手の余剰を足した800円を社会的総余剰と呼ぶ。この状況は財の交換が社会的価値を高めるという経済学のもっとも基本的な原理の一つを表現したもので、社会的総余剰は、交換が生む社会全体の価値を貨幣額に換算したものとと言える。大切なことは、この社会的総余剰が交渉結果の価格に依存しないということである。価格 p 円で行われると、売り手の余剰は $p-200$ 円で買い手の余剰は $1,000-p$ 円であるから、社会的総余剰は $(p-200)+(1,000-p)=800$ で、常に800円である。

次に、この財の評価額を2,000円と考える買い手2が加わったとき（図2）、社会的総余剰を最大にするにはどうすれば良いだろうか。この場合は売り手が買

い手2に財を売ることが、社会的総余剰を最大にすることが分かる。買い手2に1,200円で財を売った場合、売り手の余剰は1,000円、買い手1の余剰は0円、買い手2の余剰は800円で、社会的総余剰は1,800円となる。先ほどの買い手1だけの相対取引より1,000円高い。この場合も先ほどと同様に、社会的総余剰は売買の金額に依存しないことに注意されたい。社会的総余剰は財の配分にのみ依存する。社会的総余剰を最大にする財の配分を**効率的資源配分**¹と呼ぶ。財が一つのときの効率的資源配分は、財の評価額が最も高い者に財が渡ることである。

効率的資源配分においては、全員が公平に幸せになるとは限らない。図1と図2のケースでは、買い手2が加わることで、買い手1の余剰は300円から0円になり不幸になった。しかしながら、例えば図2において、売り手と買い手2から200円ずつを徴収し買い手1にその400円を再分配することができれば、図1の場合より3者とも余剰が大きくなり幸せになる。すなわち効率的資源配分は、税制など余剰を再配分する良いシステムがあれば皆を幸せにする取引である。この(社会的総余剰を最大にする)効率的資源配分を達成することを、ここではオークションの**経済学的な目的**と呼ぶことにする。自分には価値がないと思われた「FAX付き留守番電話」が、はたまた「ヨーロッパの電源規格のスクイーズ付きフードプロセッサー」が、その財にもっとも高い評価を持つ人の手に渡ることについて、「良い時代になったものだ」と「筆者」が思ったのは、このような経済学的な理由からであった。

さてこれに対し、彼女が「良い時代になったわね」と言ったのは、経済学的な理由からではない。効率的資源配分を達成するには、評価額が1番高い買い手に財が渡りさえすれば良い。極端な話、お金を支払って電話を渡しても効率的資源配分は達成される。しかし、そんなことをしたら、私が「良い時代になったものだ」としみじみ言っても、家からたたき出されるのが関の山である。「できるだけ高い値段で売り渡したい！」通常オークションで物を売るのは、やはりこのような理由からであろう。このような売り手の立場に立ち、売り手の余剰をできるだけ大きくすることを、

¹「効率的」という単語は、経済学においては社会的な厚生を最大にするという意味を持ち、日常的に使う「効率」の概念や数理計画におけるそれとは異なることに注意されたい。

ここではオークションの**経営学的な目的**と呼ぼう。

これらの二つの目的はオークションによって達成できるのであろうか。以下では図2の状況において、100円ずつ値段が上がっていく「競り」を考え、オークションがどのような振る舞いをするのか、簡単に見ておこう。この競りでは、値段が800円、900円と上がり、1,000円の時点で買い手1は競りから降りる²だろう。したがって買い手2は、自分の評価額は2,000円であるにもかかわらず、財を1,000円で手に入れることができる。

ここで分かることは二つある。一つは、このような競りにおいては、財に対する評価額が最も高い買い手が落札する、すなわち「競り」が効率的資源配分を達成し、経済学的な目的は達成されるということである。もう一つは、オークションによる売買価格は、(1番目に高い評価額を持つ参加者の評価額がいくらであっても)2番目に高い評価額を持つ買い手の評価額付近で決まるであろうということである。言い換えると全体の1,800円の余剰のうち、評価額が1番高い買い手と2番目の買い手の差額1,000円は買い手2に分配され、残りの800円を売り手が取るということである。こう考えると、経営学的な目的についてはよく分からない。売り手はうまくすれば、もっと大きい余剰を手に入れることができるのであろうか。これについては後ほど考察しよう。

上記のようなオークションに関する研究は経済学で盛んに行われ、80年代後半にはオークションの性質や振る舞いがいろいろ解明された。しかしながら、これらの結果は現実の競りやオークションをよく「説明」していたが、新しいメカニズムを設計するまでには至らなかった。当時は、「ゲーム理論や経済学は、多くの現象を後付けで説明するのは上手」と揶揄され、実際の制度やメカニズムを作り出すエンジニアリングには手が回らなかったのである。このような状況が一変するのは、アメリカの政府が、電気通信事業者や放送事業者に対し、周波数をオークションで配分しようとしたときであった。

3. 周波数オークション

近年、携帯電話・衛星放送などの情報通信産業の大きな発展によって、電波が希少化し利用可能な周波数

² もしくは1,100円であるかもしれない。正確にはゲームの解に対する検討や細かいルールが必要であるが、ここでは1,000円としておく

帯が逼迫してきた。1993年から、アメリカの連邦通信委員会（FCC：Federal Communications Commission）はそれまでのヒアリングや抽選などの方法から、オークションへ、周波数の割当方法を変更した。

周波数免許の割当てで問題となるのは、隣接する地域の周波数の価値が相互に関連を持つことである。事業者によっては、複数の免許を組合せて取得することで、個々の免許の価値の総和よりも価値が増加したり（補完性）、減少したり（代替性）する。このように複数の財を販売する場合には、免許を一つずつオークションすることが、効率的資源配分を達成するとは限らない。

簡単な例でこれを考えてみよう（表1）。AとBという二つの地域の周波数免許を、1と2という2人の事業者にオークションで売るとしよう。事業者1はAとBの両方の地域で大規模に事業を行いたいと考えており、片方の地域の免許しか取得できなければ、免許の評価額は1地域につき10である。しかし、両地域の免許を取得できれば評価額は総和より大きい35となる（補完性）。一方、事業者2はどちらか一方の地域で小規模に事業を行いたいと考えており、一つの地域の免許が取得できれば免許の評価額は20であるが、両方の地域の免許を取得できても評価額は総和より小さい30しかない（代替性）。

表1における効率的資源配分（評価額の総和を最大にする免許の割当て）は事業者1に免許AとBの両方を割り当てることである。しかし、免許Aと免許Bを別々のオークションにかけると、事業者1の少なくとも一方の免許の入札額は $35/2=17.5$ 以下になってしまうであろう。したがって、事業者2が18を入札すればその免許を得ることができる。両方の免許を別々にオークションすれば、事業者1に免許AとBの両方が割り当てられる可能性は小さい。

このような補完性を考慮して、周波数のオークションをどう設計すべきか。FCCのオークション実施委員会には、スタンフォード大学の経済学者Paul MilgromやRobert Willsonらが参加し、その設計に携

わるようになった。彼らが提案したオークションは「同時複数回オークション」である。同時複数回オークションとは、周波数帯を個別に競りにかけるのではなく、いくつかの周波数帯をまとめて競りにかけ、複数の周波数の価格を毎回同時に上昇させ、すべての周波数の価格が上昇しなくなったところでオークションを止める、といったものである（詳しくは文献[12]や文献[13]を参照のこと）。

このような提案に、当初FCCやマスコミは批判的であったが、数ヶ月にわたるコメントや討論の中でFCCは最終的にMilgrom-Wilson提案の支持に傾いたという（鬼木[12]）。このようにして行われたFCCのオークションは、最終的には成功に終わり、ゲーム理論が現実の制度設計に役立った成功例として、大きく取り上げられることになったのである。

もっとも周波数オークションは成功面だけが取り上げられたわけではない。アメリカでは落札した企業が破産し、その落札額が支払われないといった混乱に直面した。またイギリスで2000年に行われた第3世代携帯電話の周波数オークションでは、入札額が急騰し当時の換算で落札総額225億ポンド（当時の換算で3兆8千億円）、ドイツではさらに988億マルク（当時の換算で5兆円）という金額に達した。これらの欧州での結果は、マスコミ等に批判され「周波数オークションの結果、過大な事業者の負担がサービス料金へ転嫁された」とか「落札企業の経営が圧迫され、債券の格付が低下し、経営が不安定になった」などと言われ、周波数オークションへの批判となった。

もっともこの批判にも反論がある。まず第1に、オークションの費用はサンクコストなので、料金に転嫁されるわけがない、とするものである。また、第2に価格の高騰は投機的行動によるものであって、オークションが悪いわけではない、株が投機的行動によって、暴騰するから株式市場は良くないとしたり、土地バブルが良くないとして、土地取引に規制をかけたりするようなものだ、というものである。

これらの議論は、経済学的な論点が多いためここではこれ以上深入りしない。ただ論点として見落とされやすい点は、周波数オークションは効率的資源配分を目的として行われており、財政収入の増加を名目上目的とはしていないという点である。アメリカのFCCは特にこの点を強調し、オークションは財政収入のために行うのではないとしている。すなわち周波数オークションは、先に述べた経済学的な目的を達成するこ

表1 各事業者の免許に対する評価額

	免許 A	免許 B	免許 A と B
事業者 1	10	10	35
事業者 2	20	20	30

とを使命としている。もっとも、暗黙にはその財政収入に強い期待がかけられていたことは無視できないであろう。

なお日本では、総務省の「電波有効利用政策研究会」の最終報告（2002年）において、「周波数オークション」という形での電波利用権のオークションの実施は見送られることとなっている。最終報告では、2004年に電波法を改正し、10年以上保証していた既存の電波利用者の利用権を3年程度に短縮、新規にその周波数を使いたい事業者が複数いるときは、その「立退き料」の負担額について申告（オークション）させ、それを「評価項目」として、総合的に免許人を選定するという、裁量の余地を残した日本らしい決着となっている。

4. オークションとマーケットデザイン

さてその後Milgromらは、他の研究者と共に、Market Designというコンサルタント会社を設立し、周波数・温室効果ガス排出権・電力市場などのオークション設計のアドバイスを行っている。イギリス政府は2002年、温室効果ガス削減のために、企業が削減した温室効果ガスを3億5千ドルの予算で買い取ることにした。ガスの削減量1トン当たりをいくらで買い、各企業は何トンの削減量をいくらで売るか。このようなオークションの設計にもMarket Designはアドバイスを行い、decending clock auctionというオークションを提案した（McMillan[7]）。

このような、ゲーム理論を中心とした経済理論を用いてオークションなどの制度の設計を行う分野は、市場設計、まさに「マーケットデザイン」と呼ばれる。実験経済学の第一人者Rothは、論文[9]の中で「マーケットデザインは90年代から発展した分野であり、その代表的な成功例として、アメリカの周波数オークション、安定結婚問題（stable marriage）を応用したアメリカの医者ジョブマーケットにおける情報交換センターの二つがある」と述べている。また「アメリカの電力市場の設計は、マーケットデザインとしては良いものであったが、規制論者が不完全に市場を規制して、双方の結果が継ぎはぎにされたために、カリフォルニアのような危機を招いた」ともしている。

マーケットデザインと呼ばれる分野の特徴は、「理論の構築」と「実験による検証」という自然科学において用いられてきた帰納と演繹のサイクルによる方法論を、市場設計や制度設計の方法論として用いるとこ

ろにある。具体的には、ゲーム理論やマイクロ経済の理論に依拠して設計を行い、実験やシミュレーションによって、その制度がうまく働くかどうかを検証していることとするのである（Roth[9]）。Milgromは、アメリカの周波数オークションの検討に際して、ゲーム理論に依拠したオークション理論を展開して制度を設計するだけでなく、EXCELによるシミュレーションを行い、プレゼンによってFCCの委員を説得していったという（鬼木[12]）。Roth[9]は、このような「理論と実験・シミュレーション」の融合を、物理学と工学、生物学と薬学の関係になぞらえている。

マーケットデザインと呼ばれる分野は、ORの研究者が活躍できる可能性が大きく、期待されている分野である。オークションの設計は、その中でも最も典型的で具体的な問題として注目できる。これについては本稿の最後でもう一度議論しよう。

5. オークションのモデル

前節までは、オークションの設計をめぐる社会的な背景や、今後の研究の方向性について解説した。ここからは、少し数式を提示しながら、複数財オークションの理論モデルについて具体的に解説していこう。

オークションを論じるうえで重要なことに、入札の参加者が個人的に持っている情報を、どのように提示させ、情報交換を行っていくべきかという問題がある。この問題は、勝者の呪い（winner's curse）をどう防いで売り手の余剰を高めるかなどに関連する大切な問題であるが、かなり複雑で多くの予備知識も必要とする。本稿ではオークションにおいて重要なこの「情報の問題」については割愛し、「完備情報」と呼ばれる「入札者が、お互いの情報を分かっている」という条件のもとで話を進める。この仮定は、実際のオークションからは離れたものではあるが、入札者がどのような戦略的行動を取り、オークションがどのような挙動をするかを知る最初のステップとして悪くはない。不完備情報におけるオークションの問題について知りたい読者は、オークション理論のテキストKrishna[4]などを参照にされたい。

オークションの参加者を $N=\{1, \dots, n\}$ で表し、オークションによって販売される複数の財を $M=\{1, \dots, m\}$ とする。財の部分集合 $S \subseteq M$ に対する参加者 i の持つ評価額を $V_i(S)$ で表す。簡単のためオークションの売り手が財に対して持つ評価額は0であり、任意の参加者 i に対し $V_i(\emptyset)=0$ とする。オークションと

は、このような状況で参加者に何らか（多くは財に対する評価額）の入札をさせて、財の割当と支払額を決めるルールである。オークションというと「競り」のように相手の入札額が分かる公開オークションもあるが、本稿では各参加者が他の参加者に分からないように入札額を申告し、売り手がそれを見て割り当てを決める封印オークションについて議論する。以降、オークションとはこの封印オークションを指すものとする。

仮に、あるオークションによって財の割当と支払額が決まったとしよう。以下 $S_i \subseteq M$ と p_i は、参加者 i に対する財の割当と支払額を表す。簡単に分かるように、財の割当は $[\forall i, \forall j \in N, i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset]$ かつ $[\bigcup_{i \in N} S_i \subseteq M]$ を満たさなければならない。値 $\sum_{k \in N} p_k$ を売り手の余剰と呼び、 $V_i(S_i) - p_i$ を参加者 i の余剰と呼ぶ。

先ほど述べた経済学的な意味でのオークションの目的は、売り手と参加者の余剰の総和、すなわち $\sum_{k \in N} p_k + \sum_{k \in N} (V_k(S_k) - p_k) = \sum_{k \in N} V_k(S_k)$ を最大化することである。上記の値は社会的総余剰と呼ばれる。上記の式から再度、確認できるように、社会的総余剰は支払い額には依存せず、財の割当のみで定まる。社会的総余剰を最大にするような財の割当を効率的資源配分と呼ぶ。オークションの経済学的な目的は、（社会全体の余剰を最大にする）効率的資源配分を達成することにある。

これに対し、経営的な意味でのオークションの目的は、このモデルでは売り手の余剰を最大にすることと考えられる。効率的資源配分が、ここまでモデルで定義された各参加者の評価額と財の割当のみで決定できるのに対し、売り手の余剰が最大化されたかどうかは、この枠組みではまだ不足である。これに対しては、後ほど考察する。

6. 組合せオークション

表1で見たように、複数の財が補完性や代替性を持つ場合は、各財を個別に入札させる方法が必ずしも良いとは限らない。アメリカの周波数オークションでは、先に述べたように「複数回同時オークション」がその解決策として提示された。しかしこのオークションでは、同時にいくつかの財がオークションされているが、

価格は一つ一つの財に付けられている。

これに対し、アメリカの周波数オークションの議論では、財の組合せに価格をつけて入札をする「組合せオークション」と呼ばれるオークションが提案され、現在もその可能性について議論がなされている。この組合せオークションは周波数オークションだけではなく、ロジスティクス、電子商取引など多くの分野で注目されている。オークション設計で数理計画にもっとも関係が深いのは、この組合せオークションであろう。

組合せオークションは次のような手続きで実行される。(1) 参加者は財の部分集合すべてに対する入札額を申告する、(2) 申告をもとに、売り手は各参加者の入札額の総和が最大になるように財の割当を定める、(3) 参加者は割り当てられた財に対する自分の申告した入札額を売り手に支払う。オークションの問題を記述する際、参加者の財に対する真の評価額と入札額は同じとは限らない点に注意されたい。以下では財の部分集合 $S \subseteq M$ に対する参加者 i の入札額を $b_i(S)$ とする。空集合に関してのみ $b_i(\emptyset) = 0$ を提示するとする。上記(2)の手続きにおいて、売り手は下記の問題を解く必要がある。決定変数として $y_i(S)$ を導入しよう。 $y_i(S) = 1$ は、参加者 i に財の部分集合 S を割り当てていることを意味する。最適な財の割当を求める問題 CAP は

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} b_i(S) y_i(S) \\ & \text{subject to} && \\ & && \sum_{S: S \ni j} \sum_{i \in N} y_i(S) \leq 1 \quad (\forall j \in M), \\ & && \sum_{S \subseteq M} y_i(S) \leq 1 \quad (\forall i \in N), \\ & && y_i(S) \in \{0, 1\} \quad (\forall S \subseteq M, \forall i \in N), \end{aligned}$$

と定式化される。売り手は参加者の入札に基づいて CAP を解き、最適解に従って財の割当を決め、財（の集合）を割り当てられた参加者（落札者とも呼ばれる）は、対応する入札額を支払う。計算機を使って割当と支払額を決定するこの方法は、従来のオークションのイメージとは異なるものに感じるかもしれないが、これが組合せオークションである。

次回はこの組合せオークションの問題点について解説するところからはじめたい（次号へ続く、参考文献については次号にまとめて掲載します）。