論文・事例研究

AHPを利用した最適な債券ポートフォリオの構築に向けて—「決める」から「定める」への橋渡し—

宮崎　浩一

1. はじめに

AHP（階層分析法）は，1960年代後半に，Saatyによって発案された「定める」モデルであり，従来の「決める」モデルでは定量化が難しかった主観や勘を反映させることができるようなモデルである（詳しくは，木下[1998]を参照されたい）．「定める」モデルであるAHPは，軍事外交戦略を対象として生まれたものであるが，その有効性が広く認められ経済問題・経営問題・エネルギー問題・政策決定・都市計画など多岐の分野にわたり，近年発展が著しい金融工学においても，最適なポートフォリオの構築，つまり資産配分の意思決定に関する分野で，Saatyら[1980]，Khaksariら[1989]，批々木ら[1997]など，いくつかの適用例がみられる．

AHPの資産配分問題への適用法は，上記の文献において詳しく紹介されているにもかかわらず，実務においてAHPを用いた運用を行っているケースは少ない．特に，株式資産配分とは異なり，定性的要因が定量的要因ほどは大きくない債券資産配分においては，AHPを用いた運用は，現状，皆無であるといえる．実務においてAHPを用いた運用がわずかである理由は，AHPが「定める」モデルであることにある．具体的には，「様々な一対比較行列を階層的に配置したうえで，各々の最大固有値の固有ベクトルをウエート付けして「定まる」資産配分（以降AHPポートフォリオと呼ぶ）が，平均・分散モデルおよびリスク要因別制約条件付き平均・分散モデルを用いて「決める」資産配分（以降，リスク量が制約条件を満たすときにリターンが最大となる資産配分を最適平均・分散ポートフォリオと定義する）との間にどのような対応関係があるのか？」が何ら検討されていないことが挙げられる．

ポートフォリオ構築にAHPを適用する場合の問題点は，リスクに関する代替案の選好を表す一対比較行列の与え方である．投資家が監督当局などから報告することを義務づけられているリスク量は，通常各資産に関する過去のリターン時系列を用いて推定した分散・共分散行列に基づいて計量されるものである．これは，平均・分散モデルの制約条件式のなかで用いられるリスク量である．一方，AHPでは，リスクに関する代替案の選好を表す一対比較行列の要素に比例（反比例）して各資産のウエートは決まる．このため，分散・共分散行列の持つ情報を素直にリスクに関する代替案の選好を表す一対比較行列に利用することが難しい．そこで，まず，分散・共分散行列を何らかの形で一対比較行列として表現する必要がある．次に，AHPポートフォリオのリスク・リターンと，平均・分散ポートフォリオおよびリスク要因別制約条件付き平均・分散ポートフォリオのリスク・リターンとの関係を吟味する必要がある．

上記の2点がある程度明らかにされれば，債券ポートフォリオ構築の実務においてAHPの利用に道が開ける．定量的に計量できる分散共分散行列や平均値で表現できるようなリスクやリターンは，過去のリターン時系列を用いて構成した分散・共分散行列や平均値が持つ情報と何らかの形で整合性がとれるようなものを一対比較行列として用い，定性的にしか表現できないような流動性リスク，需給リスクや金融政策変更リスクなどは，従来どおり一対比較行列で表現して，AHPを実行すればよい．本稿では，定量的に情報を与えることが可能な各資産リターンの平均，分散共分散行列の持つ情報をできるだけ利用することで，平均・分散モデルおよびリスク要因別制約条件付き平均・分散モデルとの対応をできるだけ維持したうえで定性的な要因を組み込むような，AHPの債券ポート

みやざき　こういち
電気通信大学 システム工学科
〒182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1
受付 03.1.6　採択 03.7.8

フォリオ構築への適用方法を与えることを目的とする．つまり，「決める」モデルから「定める」モデルへの橋渡しを行って両者の優れた点を債券ポートフォリオ構築に利用する試みである．

本論文の構成は以下の通り．節2では，AHPについて資産配分問題を例にとり手短かに解説する．節3では，平均・分散モデルおよびリスク要因別制約条件付き平均・分散モデルを紹介したうえで，分散共分散行列が持つ情報を直接的に一対比較行列に適用することが，資産間の相関係数が全て1となる場合を除いて困難であることを例示する．節4では，まず，債券の利回り変化に関して因子分析法を適用すれば，分散共分散行列の持つリスクに関する情報を素直に一対比較行列を用いて表現できることを示す．次に，平均・分散モデルおよびリスク要因別制約条件付き平均・分散モデルでは，ウエートの二次式として与えられたリスク量対する制約条件が，適切なリスク量の分解を通してウエートの一次式として与えられるリスク量に変換されることを示す．節5では，節3，4で準備したことに基づいて，AHPを用いた最適な債券ポートフォリオの構築法を示す．また，数値例では，節4で述べた変換を利用してリスク要因別制約条件付き平均・分散ポートフォリオを線形計画法で求め，そのリスク・リターンとAHPポートフォリオのリスク・リターンとを比較する．節6では，事例報告として，現実のマーケットデータに基づいて節5で示したリスク・リターンやウエートに関する比較を行う．さらに，平均・分散最適ポートフォリオのリスク・リターンやウエートに関する比較も加えて吟味する．最終節では，まとめと今後の課題を与える．

2. AHPとは

AHP (Analytic Hierarchy Process) とは，主観的判断とシステムアプローチを合わせた意思決定手法の一つであり，(1)主観や勘が反映される，(2)多くの目的を同時に考慮する，(3)扱いが容易である，ことが主な特徴である．AHPを利用して問題を解決するには，まず問題の要素を（最終目標）―(評価基準)―(代替案）の関係で捉えて，階層構造（階層はレベルとも表現される）を作り上げる．そして，最終目標からみて評価基準の重要さを求め，次に各評価基準からみて各代替案の重要度を評価し，最後に，これらを最終目標からみた代替案の評価に換算する．AHPの適用法を3段階に分けて，債券ポートフォリオの構築を例（図1を参照）として階層が単純なケースで説明する．

（第1段階：問題の階層化）

複雑な状況下にある問題を，階層構造に分解する．階層の最上層（第1レベル）は1個の要素からなり，総合目的である．図1では，債券ポートフォリオの構築である．それ以下のレベルでは意思決定者の主観的判断により，いくつかの要素が一つ上の要素との関係から決定される．階層の最下層には，代替案を置く．債券ポートフォリオの構築における代替案は，選択可能な債券のことであるから，図1で示した満期が異なる六つの債券のことである．中間層は，基本的に（評価基準）であり，図1ではリターンと5種類のリスクの合計六つである．

（第2段階：要素の一対比較）

各レベルの要素間の重み付けを行う．つまり，ある一つのレベルにおける要素間の一対比較を一つ上のレベルにある関係要素を評価基準にして行う．nを比較要素数とすると，意思決定者は，$n(n+1)/2$個の一対比較をすることになる．一対比較においては，重要度の尺度として，1：同じぐらい重要，3：やや重要，5：かなり重要，7：非常に重要，9：極めて重要，などの値を用いる．第2レベルにある六つの評価基準の重要度は，第1レベルの債券ポートフォリオの構築からみた重要度であり，債券ポートフォリオの構築にお

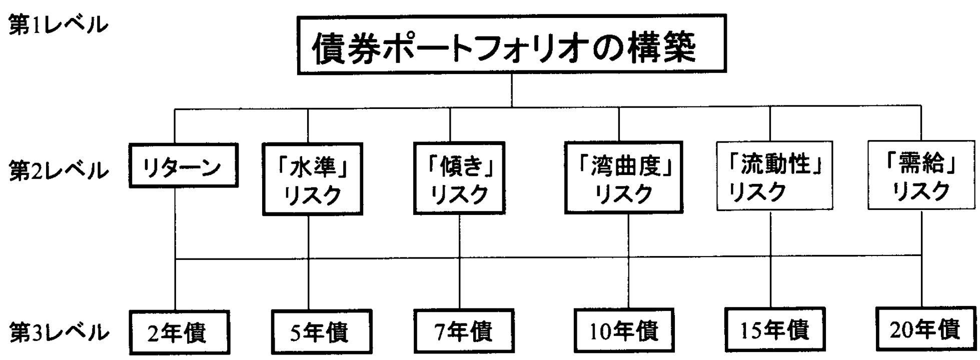

図1　債券ポートフォリオの構築

いて，リターンが「水準」リスクよりもかなり重要であると判断するなら，リターンの「水準」リスクに対する重要度を表す要素に5が与えられる．同様にして，合計15通りの一対比較を行い6行6列の一対比較行列を作成する（詳しい一対比較行列の作成法は，木下[1998]を参照されたい）．同様にして，レベル3の代替案の重要度に関しても，一つ上のレベルにある要素（評価基準）毎に一対比較行列が得られる．

（第3段階：優先度の計算）

各レベルの一対比較行列（既知）から，その最大固有値に対応する固有ベクトルを求めることにより，各レベルの要素間の重み（未知）を計算する．各レベルの要素間の重み付けが計算されると，この結果を用いて階層全体の重み付けが計算され，総合目的である債券ポートフォリオの構築に対する各代替案となる6種類の債券のプライオリティ（優先度）が決定する．

債券ポートフォリオの構築においてAHPを利用することの魅力は，「流動性」リスクや「需給」リスクといった定性的な要因もモデルに組み込むことが可能となる点である．また，定量的な要因（四つ）と定性的な要因（二つ）との重要度も主観的に与えることが可能となることである．一方，AHPを債券ポートフォリオの構築に利用する際の難点は，定量的に取り扱える部分（期待リターンやリターンの分散等）に対しても，一対比較行列を与えなければならない点である．よって，節3以下の主題は，定量的評価基準に基づく代替案の一対比較行列としてどのようなものを与えれば，定量的評価基準に基づくAHPポートフォリオが，平均・分散最適ポートフォリオにおけるリスク・リターン特性から大きく乖離することなく，バランスのとれた債券ポートフォリオの構築が可能となるかを数値例に基づき検討することにある．

3. 平均・分散モデルとリスクに関する一対比較行列

平均・分散モデル

n種の債券$\{1,2,\cdots,n\}$への投資ウエートを$\mathbf{x}=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，各債券の期間収益率を表すベクトルを$\mathbf{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$とすると，ポートフォリオ$\mathbf{x}$の期間収益率は，

$$\mathbf{Rx}^T$$

で与えられる．ポートフォリオ$\mathbf{x}$が，投資ウエートであることによる制約条件は，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1,$$

債券ポートフォリオ運用であり，空売りを許さないので，

$$x_i \geq 0, \quad \{1,2,\cdots,n\}$$

とする．

債券iの期間収益率R_iの期待値$E(R_i)$をr_iとすれば，ポートフォリオ$\mathbf{x}$の期待収益率$R_p(\mathbf{x})$は次のようになる．

$$R_p(\mathbf{x})=E\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right\}=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i.$$

また，このポートフォリオの期間収益率の分散$\sigma_p^2(\mathbf{x})$は，R_iとR_jの共分散を

$$Cov\{R_i,R_j\}=E\{(R_i-r_i)(R_j-r_j)\}=v_{ij}$$

とおくと，

$$\sigma_p^2(\mathbf{x})=Var\left\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j v_{ij}$$

となる．

平均・分散モデル（制約条件(1)を適用）およびリスク要因別制約条件付き平均・分散モデル（制約条件(2)を適用）は，次の2次計画問題として定式化される．

$$Max \quad \mathbf{rx}^T$$

$$\mathbf{x}^T V\mathbf{x} \leq Risk \tag{1}$$

$$\mathbf{x}^T V_1\mathbf{x} \leq Risk_1, \cdots, \mathbf{x}^T V_p\mathbf{x} \leq Risk_p \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1, \tag{3}$$

$$x_i \geq 0, \quad \{1,2,\cdots,n\} \tag{4}$$

ここで，Vはv_{ij}を成分とする収益率の分散共分散行列を表し，V_iはリスク要因iに関するリスク行列を表す．また，(1)は，通常の平均・分散モデルの制約条件を示し，(2)は，リスク要因別制約条件付き平均・分散モデルの制約条件を示す．AHP配分のリスクに関する一対比較行列に，(1)の分散・共分散リスクVを素直に反映させることができるケースは，Vの相関係数が1の場合のみである．この場合は，債券ポートフォリオのリスク$\mathbf{x}^T V\mathbf{x}$は各債券の標準偏差リスク$\sqrt{v_{ij}}$を用いて$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{v_{ii}}x_i\right)^2$と表現できるから，債券ポートフォリオのリスクに与える各債券の単位当たりのリスク量は$\sqrt{v_{ii}}$となり，これを一対比較行列に反映させればよい．具体的に，三つの債券に関する数値例を用いて確認しておく．

次のような，各資産の相関係数が全て1となる三つの債券に関する分散共分散行列を考える．

$$V_{ex1}=\begin{pmatrix} 1\cdot5\cdot5 & 1\cdot5\cdot4 & 1\cdot5\cdot3 \\ 1\cdot5\cdot4 & 1\cdot4\cdot4 & 1\cdot4\cdot3 \\ 1\cdot5\cdot3 & 1\cdot4\cdot3 & 1\cdot3\cdot3 \end{pmatrix}.$$

分散共分散行列 V_{ex1} は，第１債券，第２債券，第３債券のリターンの標準偏差が，それぞれ，5，4，3であり，債券間の相関係数が，全て１であることを示している．例えば，１行１列成分の $1\cdot5\cdot5$ は，第１債券の分散が25であり，先に示したように１標準偏差リスクが５であること，つまり，下側16.5％水準の損失額が５であることを意味している．第１債券の標準偏差リスクは第２債券の標準偏差リスクの5/4倍であり，第３債券の標準偏差リスクの5/3倍，等であるからリスクの大きさを表す一対比較行列は，

$$M_{Risk}=\begin{pmatrix} 1 & 5/4 & 5/3 \\ 4/5 & 1 & 4/3 \\ 3/5 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

と素直に表現される．ただし，リスクは小さい方が望ましいから，ウエートを求めるために用いるリスクに関する一対比較行列は，逆数をとった次の $\bar{M}_{Risk}$ となる．

$$\bar{M}_{Risk}=\begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 3/5 \\ 5/4 & 1 & 3/4 \\ 5/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

次に，共分散が必ずしも０ではない三つの債券に関する分散共分散行列を考える．

$$V_{ex2}=\begin{pmatrix} 1\cdot5\cdot5 & 0.9\cdot5\cdot4 & 0.7\cdot5\cdot3 \\ 0.9\cdot5\cdot4 & 1\cdot4\cdot4 & 0.8\cdot4\cdot3 \\ 0.7\cdot5\cdot3 & 0.8\cdot4\cdot3 & 1\cdot3\cdot3 \end{pmatrix}.$$

分散共分散行列 V_{ex2} は，第１債券，第２債券，第３債券のリターンの標準偏差が例１と同じくそれぞれ，5，4，3であるが，第１債券と第２債券，第１債券と第３債券，第２債券と第３債券，の各債券間の相関係数が，それぞれ，0.9，0.7，0.8であることを示している．第１債券だけを保有する場合の標準偏差リスクは５であり，第２債券だけを保有する場合の標準偏差リスクは４であるが，第１債券と第２債券とを50％ずつ保有する場合には，標準偏差リスクは，約 $4.39(\sqrt{5^2\times0.5^2+2\times0.9\times5\times4\times0.5\times0.5+4^2\times0.5^2})$ となる．このリスク量１を第１債券と第２債券とにどのように割り当てるべきかの判断は難しい．これは，債券１と債券２との相関係数が１でないことから生じるものであり，このような場合，分散・共分散行列の持つリスクに関する情報を直ちに一対比較行列として表現することは困難である．そこで，各年限の利回り変化を全年限に共通ないくつかのファクタを用いて表現する因子分析を利用する．この手法に基づけばファクタ毎にみた場合（制約条件式(2)のどれか一つに着目した場合），どの年限の利回り変化もそのファクタに因子負荷量を乗じた値となるので必然的に相関係数１となる（詳しくは節4.1を参照）．よって，因子分析に基づく債券リスク管理を経由すればAHPのリスクに関する一対比較行列を与えることができる．

4．因子分析に基づく債券リスク管理とリスクに関する一対比較行列

ここでは，因子分析を用いたリスク管理手法を手短に紹介したうえで，この手法を用いれば分散共分散行列の持つ情報を節３で述べたように一対比較行列として素直に表現できることを示す．

4.1 債券利回り変化への因子分析の適用

年限が j 年である債券の i 日における利回り変化に対して，p 個の因子を用いた因子分析のモデル化は次式で与えられる．

$$y_{i,j}-y_{i-1,j}=f_{i,1}a_{1,j}+f_{i,2}a_{2,j}+\cdots+f_{i,p}a_{p,j}+\varepsilon_{i,j}.$$

これは，年限が j 年である債券の i 日における利回り変化を，p 個の因子の線形結合として表現している．また，各因子 $k(1\leq k\leq p)$ の与える影響は，因子 k について i 日における利回り変化が持つ値 $f_{i,k}$ と，因子 k が年限 j 年の債券の利回り変化に全ての日に共通して与える影響を表すウエート $a_{k,j}$（因子負荷量）との積で表される．ここで，節３の最後に述べたファクタ毎にみた場合に，全年限の利回り変化のファクタリスク間の相関係数が１となることを，第１ファクタに関して確認しておく．年限 j 年の $i-1$ 日から i 日への利回り変化 $y_{i,j}-y_{i-1,j}$ の第１ファクタリスクは，$f_{i,1}a_{1,j}$ である．このとき同様にして，年限 j' 年の $i-1$ 日から i 日への利回り変化 $y_{i,j'}-y_{i-1,j'}$ の第１ファクタリスクは，$f_{i,1}a_{1,j'}$ となる．第１ファクタに関する j 年，j' 年の因子負荷量，それぞれ $a_{1,j}$，$a_{1,j'}$ は，一定（日付 i に依存しない）であるため，日々の利回り変化による第１ファクタリスクは，$f_{i,1}$ の日々の変動によってもたらされる．第１ファクタ $f_{i,1}$ は，j 年，j' 年および全ての年限に関して共通であるので，全年限の債券の利回り変化の第１ファクタリスク間の相関は１となる．他のファクタ毎にみた場合も同様である．

$\mathbf{y}_j$ で年限が j 年である債券の日々の利回り変化値を示すベクトル，$\mathbf{f}_k$ で因子 k について日々の利回り

変化がとる値を示すベクトル，$\mathbf{a}_j$ で各因子が年限 j 年の債券の利回り変化へ与える影響度を表すウエートのベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}_j$ で年限 j 年の債券の利回り変化が日々含む独自の要因，つまり，モデル誤差を示すベクトルをそれぞれ表すことにする．すなわち，

$$\mathbf{y}_j=\begin{pmatrix} y_{1,j}-y_{0,j} \\ \vdots \\ y_{m,j}-y_{m-1,j} \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_k=\begin{pmatrix} f_{1,k} \\ \vdots \\ f_{m,k} \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j=\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{m,j} \end{pmatrix}.$$

このとき，年限 j の債券の利回り変化に関する因子モデルは，次のように表される．

$$\mathbf{y}_j=(\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{f}_p)\mathbf{a}_j+\boldsymbol{\varepsilon}_j.$$

さらに，

$$\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1\ \ \mathbf{y}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{y}_n),$$
$$\mathbf{F}=(\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{f}_p),$$
$$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{a}_n),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_n),$$

とおくと，全ての年限の利回り変化に関する因子モデルは，

$$\mathbf{Y}=\mathbf{FA}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

で表せる．実際の利回り変化に関する時系列データから因子モデルを推定するための考え方や統計パッケージの使い方などは，それぞれ，大塚[第1期]，S-plus[2001]等を参照されたい．

因子分析の手法が初めて債券の利回り変化の要因分析を行うために適用された文献は，Litterman and Scheinkman[1991]であり，そこでは，米国債券市場に関しては，各年限の利回り変化の分散を三つのファクタ，つまり，$p=1,2,3$ のみを用いて98%以上説明可能であることを示している．また，債券の利回り変化の各ファクタに対するファクタローデイングの形状(例えば，第1ファクタの各年限のファクタローデイングは，$\mathbf{A}$ の第1行で示される）から，第1から第3までのファクタがそれぞれ，「水準」，「傾き」，「湾曲度」，のファクタであるとしている．節6における事例報告にさきがけて，1996年5月23日から1998年6月2日までの期間における日本国債の利回り（2年債，5年債，7年債，10年債，15年債，20年債）に関して因子分析の手法を適用した結果を示すと，第1ファクタだけで，利回り変化の分散の93.7%を，第2，第3ファクタまで含めるとそれぞれ，98.1%，99.2%まで説明可能であった．また，これらのファクタに関するファクタローデイングは，表2に示すとおりであり，Litterman and Scheinkman[1991]の結果と同様である．本稿では，第4ファクタ以下を無視して第3ファクタまでを用いてモデル化する．

4.2 因子分析を用いた債券リスク管理とリスクに関する一対比較行列

節3において示したリスク要因別制約条件(2)における各要因とは，債券リスク管理においては，「水準」，「傾き」，「湾曲度」であり，これらの要因別のリスク量はそれぞれ，次で与えられる．

「水準」：

$$(std[\tilde{\mathbf{f}}_1])^2(D_1a_{1,1}x_1+\cdots+D_na_{1,n}x_n)^2.$$

「傾き」：

$$(std[\tilde{\mathbf{f}}_2])^2(D_1a_{2,1}x_1+\cdots+D_na_{2,n}x_n)^2.$$

「湾曲度」：

$$(std[\tilde{\mathbf{f}}_3])^2(D_1a_{3,1}x_1+\cdots+D_na_{3,n}x_n)^2.$$

ここで，$std[\tilde{\mathbf{f}}_1]$，$std[\tilde{\mathbf{f}}_2]$，$std[\tilde{\mathbf{f}}_3]$ は，それぞれ，第1から第3までのファクタに関する日々のデータセットを与えるベクトル $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3$ から標準偏差を求めたものである．また，D_j は j 年の債券に関するデュレーション（一単位当たりの利回り変化に対してどれほどの価格変化が生じるかを表す量）を表す．各リスク源泉から生じるリスク許容量を $RiskL$，$RiskS$，$RiskC$ とすると，リスクに関する制約条件は，次のような資産ウエートの一次式に対する不等式制約となる．

「水準」：

$$-\sqrt{RiskL}\le(std[\tilde{\mathbf{f}}_1])(D_1a_{1,1}x_1+\cdots+D_na_{1,n}x_n)\le\sqrt{RiskL}.$$

「傾き」：

$$-\sqrt{RiskS}\le(std[\tilde{\mathbf{f}}_2])(D_1a_{2,1}x_1+\cdots+D_na_{2,n}x_n)\le\sqrt{RiskS}.$$

「湾曲度」：

$$-\sqrt{RiskC}\le(std[\tilde{\mathbf{f}}_3])(D_1a_{3,1}x_1+\cdots+D_na_{3,n}x_n)\le\sqrt{RiskC}.$$

リスク量をリスク要因毎に把握する場合，各リスク量がウエートに比例して決まる．「水準」リスクに関しては，第1資産から第 n 資産までの単位ウエート当たりのリスクは，

$$((std[\tilde{\mathbf{f}}_1])D_1a_{1,1},\cdots,(std[\tilde{\mathbf{f}}_1])D_na_{1,n}),$$

で与えられ，「傾き」，「湾曲度」の各リスクに関しても同様に，それぞれ，

$$((std[\tilde{\mathbf{f}}_2])D_1a_{2,1},\cdots,(std[\tilde{\mathbf{f}}_2])D_na_{2,n}),$$
$$((std[\tilde{\mathbf{f}}_1])D_1a_{1,1},\cdots,(std[\tilde{\mathbf{f}}_1])D_na_{1,n}),$$

で与えられる．リスクに関しては，小さい方が望ましいので，これらの各成分の逆数をとったものに基づいて，リスクに関する一対比較行列を与えればよい．このように与えられた一対比較行列は，その与え方から過去のリターン時系列を用いた分散・共分散行列が持つ情報を素直に表現したものといえる．

5. AHPを利用した債券ポートフォリオの構築

節2では，AHPの債券ポートフォリオ構築への適用法を階層が単純なケース（図1を参照）で説明した．そこでは，階層の最上階（第1レベル）にある総合目的の債券ポートフォリオ構築を評価基準にして，第2レベルにある関係要素（リターン，水準リスク，傾きリスク，湾曲度リスク，流動性リスク，需給リスク）を一対比較しなければならないが，定量的要因と定性的要因が混在しており，一対比較を適切に行うことは困難である．ここでは，「AHPの利点が問題解決を適切な階層構造を構築して行うことにある」を再認識して，図2に示すような五つの階層構造を構築する．階層の最上階（第1レベル）にある総合目的は，債券ポートフォリオ構築である．第2レベルにある関係要素は，定量的要因と定性的要因の2要素とする．第3レベルにある関係要素は，定量的要因の下にリターン要因と定量的リスク要因を，定性的要因の下には，「流動性」リスク要因と「需給」リスク要因をおく．第4レベルの関係要素は，「水準」リスク，「傾き」リスク，「湾曲度」リスクの三つであり，定量的リスク要因の下に位置する．第5レベルは，代替案の2年債，5年債，7年債，10年債，15年債，20年債である．

図2の階層構造の下では，一対比較行列の固有ベクトルを利用したウエートの導出は，第3レベルと第4レベル，第3レベルと第5レベル，第4レベルと第5レベル，の各間で行われることになる．また，階層構造が第3レベルと第5レベル間にジャンプがみられるが，このようなレベル間のジャンプはSaatyら[1980]でも利用されている．

階層構造として図2を利用すれば，図1では混在していた定量的要因と定性的要因とを分ける手順を踏んだポートフォリオの構築が可能となる．定量的要因を評価基準とする代替案のウエートと定性的要因を評価基準とする代替案のウエートとを最終的に統合することで債券ポートフォリオの構築が可能となる．本稿の目的は，繰り返しになるが，定量的評価基準に基づく代替案の一対比較行列としてどのようなものを与えれば，定量的要因を評価基準としたレベルのAHPポートフォリオ（定性的要因を評価基準とする代替案のウエートと最終的に統合する前のポートフォリオ，図2の点線内を参照）が，平均・分散最適ポートフォリオにおけるリスク・リターン特性から大きく乖離することなく，バランスのとれた債券ポートフォリオの構築が可能となるかを数値例に基づき検討することである．そこで，図2の第4レベルにある評価基準である「水準」リスク，「傾き」リスク，「湾曲度」リスク，に関する第5レベルの代替案間の一対比較には，節4で求めたものを利用する．また，第3レベルの定量的リスクを評価基準とする第4レベルの要素である「水準」リスク，「傾き」リスク，「湾曲度」リスクのウエートは，節4で示した各リスクの定量的リスクを説明する比率に応じる．最後に第3レベルのリターンと定量的

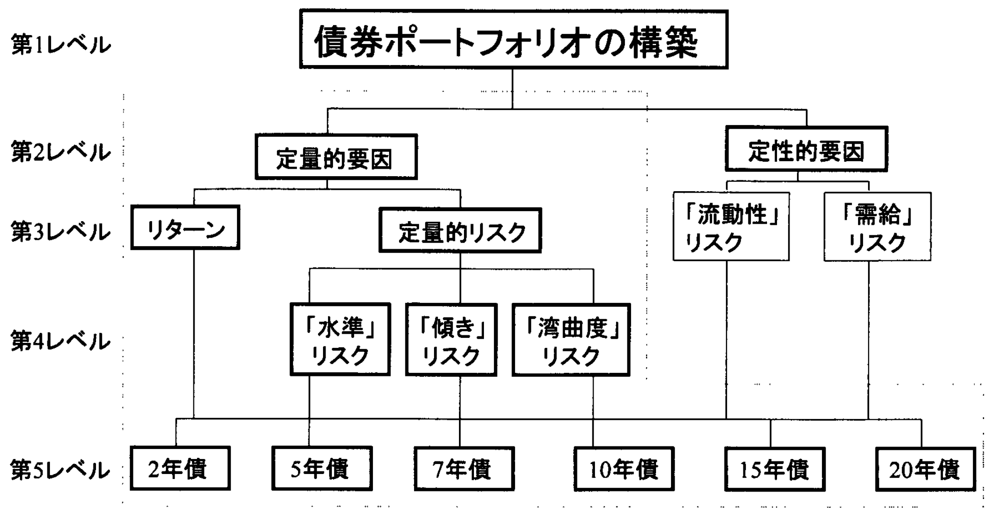

図2 AHP階層構造

リスク間のウエートをいくつか与えて，各与え方に応じたAHPウエートを求める．この各AHPポートフォリオに関するリスク・リターンと，平均・分散ポートフォリオおよびリスク要因別制約条件付き平均・分散ポートフォリオに関するリスク・リターンとの対応関係を把握する．以下では，節4で導入した記法を用いたリスク要因別制約条件付き平均・分散モデルを示しておく．

リスク要因別制約条件付き平均・分散モデル

$$Max \quad \mathbf{rx}^T \tag{5}$$

$$-\sqrt{RiskL} \leq (std\lfloor\tilde{\mathbf{f}}_1\rfloor)(D_1 a_{1,1} x_1 + \cdots + D_n a_{1,n} x_n) \leq \sqrt{RiskL}, \tag{6}$$

$$-\sqrt{RiskS} \leq (std\lfloor\tilde{\mathbf{f}}_2\rfloor)(D_1 a_{2,1} x_1 + \cdots + D_n a_{2,n} x_n) \leq \sqrt{RiskS}, \tag{7}$$

$$-\sqrt{RiskC} \leq (std\lfloor\tilde{\mathbf{f}}_3\rfloor)(D_1 a_{3,1} x_1 + \cdots + D_n a_{3,n} x_n) \leq \sqrt{RiskC}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$x_i \geq 0, \quad \{1, 2, \cdots, n\} \tag{10}$$

数値例

定量的要因部分に関して，三つの債券，債券A，債券B，債券Cからなる債券ポートフォリオの簡単な構築例を示す．各債券の1単位当たりのリターン，リスクは，それぞれ2，1，3；3，1，4とする．また，リスクに関するリスク許容量をとする．この設定のもとでの最適ポートフォリオウエートは，表1に示したシンプレックス表（ここでの記法は，小和田・加藤[1998]に従った）が示すように，債券Bと債券Cをそれぞれ，$4/3-L/3$，$L/3-1/3$ずつ保有するものとなる．AHPウエートをみると，リターンに関するウエートは，(1/3　1/6　1/2)であり，リスクに関するウエートは，リスクの逆数に比例するとしているので3，1，4の逆数1/3，1，1/4，或いは，4，12，3に基づいて(4/19　12/19　3/19)である．この二つのウエートを統合するのが，リターンとリスクの選好であり，この選好によってAHPウエート，そのウエートに基づくリスク量，リターンが決まる．ここで決まったリスク量を先のリスク許容量Lに代入すれば，AHPウエートと同じリスク量を持つ平均・分散モデルのウエートおよびリターンが求められ，AHPポートフォリオと平均・分散ポートフォリオとのリスク・リターンに関する比較が可能となる．各リスク許容量Lの下で，AHPポートフォリオのリターンと，平均・分散ポートフォリオのリターンとを比較したものを図3に示した．両者の差は，リスク許容量に依存するが，いずれも10 BP（1 BP＝0.01%）程度以下に収まっている．リターンとリスクの選好として，リターンに関する選好を全てとするケース（Weight to Returnが1）からリスクに関する選好を全てとするケース（Weight to Returnが0）までに関して，債券A，債券B，債券Cのウエートを，それぞれ図4～6に示した．債券Aは，債券B，債券Cに対して，リスク対比でリターンが劣るため，最適ポートフォリオでは一切選択されない．債券Bに関してみると，AHPウエ

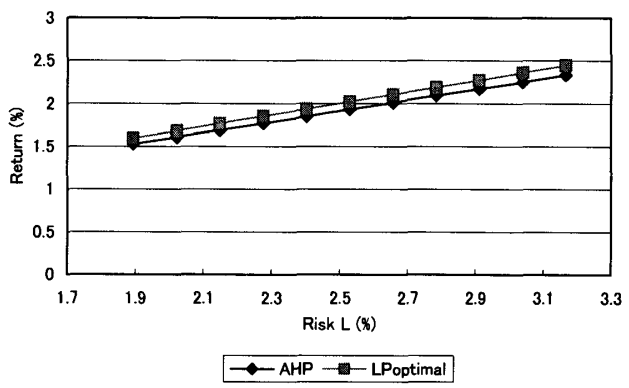

図3　AHPポートフォリオと平均・分散ポートフォリオとの比較

表1　線形計画法に基づく債券選択のメカニズム

		cj->	2	1	3	0	0		
ci	基底変数	定数項	A	B	C	D	E		
0	D	1	1	1	1	1	0	1	
0	E	L	3	1	4	0	1	L/4	min
	zj		0	0	0	0	0		
	cj-zj		2	1	3	0	0		
					max				
0	D	1-L/4	1/4	3/4	0	1	−1/4	4/3-L/3	
3	C	L/4	3/4	1/4	1	0	1/4	L	
	zj		9/4	3/4	3	0	3/4		
	cj-zj		−1/4	1/4	0	0	−3/4		
				max					
1	B	4/3-L/3	1/3	1	0	4/3	−1/3		
3	C	L/3-1/3	2/3	0	1	−1/3	1/3		
	zj		7/3	1	3	1/3	2/3		
	cj-zj		−1/3	0	0	−1/3	−2/3		
				all non positive					

ート，最適ウエート共に，リターンに関する選好が高くなるに従って減少する．これに対して，債券Ｃでは，AHP ウエート，最適ウエート共に，リターンに関する選好が高くなるに従って増加する．これらをみると，AHP ウエートは，最適ウエートと同様の性質

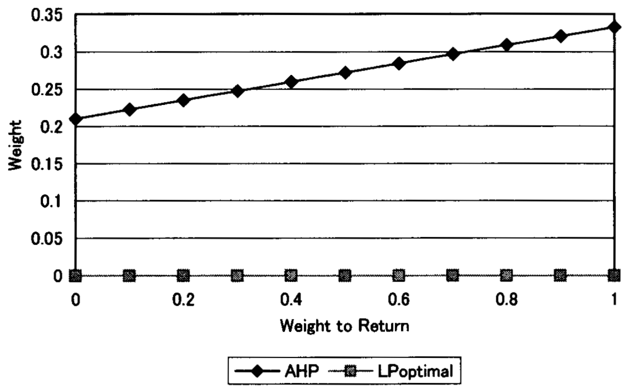

図4　債券Ａのウエート

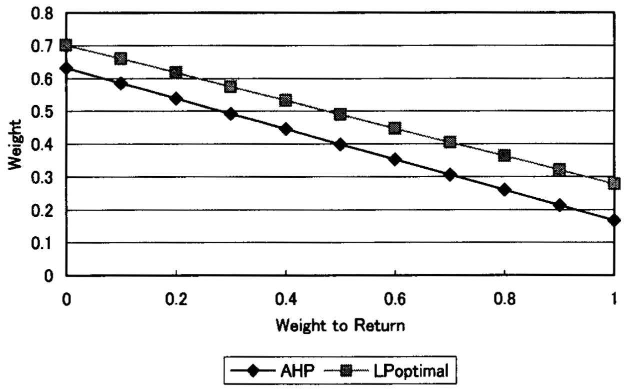

図5　債券Ｂのウエート

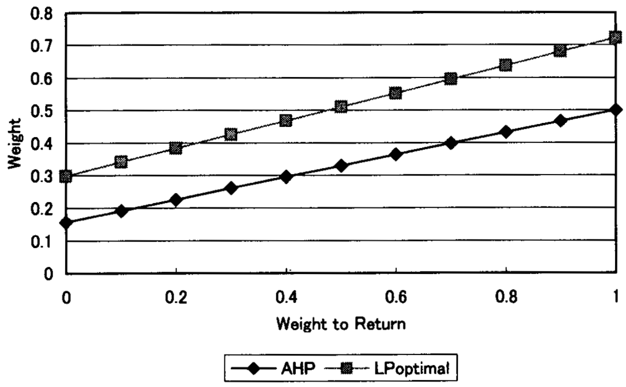

図6　債券Ｃのウエート

を持つが，リターンを 10 BP 程度諦める代わりにバランスのとれたポートフォリオを与えていることがわかる．

6．事例報告

ここでの事例報告は，節 4 でも述べたように，1996 年 5 月 23 日から 1998 年 6 月 2 日までの期間における日本国債（2 年債，5 年債，7 年債，10 年債，15 年債，20 年債）の利回りに基づく．この期間において，各債券の 1 単位当たりのリターン，「水準」リスク，「傾き」リスク，「湾曲度」リスクは，それぞれ表 2 に示すとおりである．「水準」リスク，「傾き」リスク，「湾曲度」リスクの全分散リスクに占める割合は，節 4 に示したように，それぞれ 94.1%，4.2%，1.2% であるので，これらの平方根をとった標準偏差リスクでの割合は，75.5%，15.9%，8.5% となる．ここでは，AHP ウエートは，リターン，「水準」リスク，「傾き」リスク，「湾曲度」リスクの四つに関するウエートベクトルの線形結合で表されるが，リスクに関する三つのウエートベクトル間での線形結合ウエートは，先の 75.5%，15.9%，8.5% を採用する．

因子負荷量を示す表 2 によると，「傾き」リスクと「湾曲度」リスクに関しては，負になっている部分があるので，この情報を直接利用して一対比較行列を作成することはできない．各年限のリスク量を表す一対比較行列の各成分は，全て正の値でなければならないからである．そこで，「傾き」リスク（「湾曲度」リスクも同様）に関しては，全年限のリスク量 $(std[\tilde{\mathbf{f}}_2]D_i a_{2i})$ の絶対値をとったうえで，節 4 での手続きに従った．絶対値を取る変換を行なった背景には，リスク量 $(std[\tilde{\mathbf{f}}_2]D_i a_{2i})$ はファクタが正の方向に動いた場合に生じるリスク量を表しており，リスク量が負であってもファクタが負の方向に動けば，正のリスクが生じることがある．しかしながら，この変換は，リスク量を表す一対比較行列の各成分を正にすることを目的とした一つの変換であり，ここでの AHP ポートフォリオは，このような取り決めの下でのものであることをことわっておく．さて，リターンとリスクに関

表2　各債券のリターンとファクター別因子負荷量

	2年債	5年債	7年債	10年債	15年債	20年債
Return	0.713	3.895	6.299	9.128	13.492	16.965
Factor F1	0.029	0.040	0.038	0.032	0.029	0.024
Factor F2	0.013	0.004	−0.001	−0.005	−0.007	−0.006
Factor F3	−0.005	0.004	0.005	−0.001	−0.003	−0.004

するそれぞれのウエートを統合するのは，第3レベルの要素であるリターンと定量的リスクとの選好であり，この選好によってAHPポートフォリオ，三つの定量的リスク量，およびリターンが定まる．ここで定まったリスク要因別リスク量を，それぞれ，$\sqrt{RiskL}$, $\sqrt{RiskS}$, $\sqrt{RiskC}$ として用いて，(5)～(10)式で定式化された線形計画問題を解けば，AHPポートフォリオと同じリスク量を持つリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオが求められ，両者のリスク・リターンに関する比較が可能となる．さらに，ここでは，リスク許容量として，$RiskL+RiskS+RiskC$ を採用してリスク要因別の制約条件のない通常の平均・分散ポートフォリオおよびそのリターンも求め，先の二つのポートフォリオに加えてリスク・リターンに関する比較を行う．

第3レベルにおけるリターンと定量的リスクの選好として，リターンに関する選好を全てとするケース（Weight to Returnが1）からリスクに関する選好を全てとするケース（Weight to Returnが0）までに関する各選好の下で，AHPポートフォリオのリターンとリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオのリターンとの差，およびAHPポートフォリオのリターンと平均・分散ポートフォリオのリターンとの差を図7に示した．AHPポートフォリオのリターンとリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオのリターンとの差は，リターンとリスクの選好にほとんど依存することなく，3.5 BP程度で一定であるのに対して，AHPポートフォリオのリターンと平均・分散ポートフォリオのリターンとの差は，リターンに関する選好が高くなるに従って小さくなり，20 BP程度から9 BP程度にまで縮小する．平均・分散ポートフォリオではリスク許容量の大小にかかわらず，リスク量が制約条件を満たす範囲内でリターンの高い債券が少数選ばれる．これに対し，AHPポートフォリオでは，よほど極端なケースを除き，全ての債券に何らかのウエートが与えられる．リスク許容量が小さい場合，つまりリスクに関する選好が大きい場合，リスクに関する一対比較行列により得られるウエートがポートフォリオに大きく反映され，同じリスク水準におけるリターンは平均・分散ポートフォリオにある程度劣る．これに対して，リターンに関する選好が大きい場合，リターンに関する一対比較行列により得られるウエートがポートフォリオに大きく反映されるため，平均・分散ポートフォリオのリターンに近くなる．ただし，この場合でも，AHPポートフォリオでは全ての債券に何らかのウエートが与えられるため，平均・分散ポートフォリオのリターンを超えることはない．これが，AHPポートフォリオと平均・分散ポートフォリオとのリスク・リターンに関する対応関係である．

リターンと定量的リスクの選好に関する，2年債，5年債，7年債，10年債，15年債，20年債のAHPウエート，リスク要因別制約付適平均・分散ウエート，平均・分散ウエートをそれぞれ，図8～13に示した．平均・分散ポートフォリオで選択される債券は，2年債と20年債のみとなっている．よって，節4で導入

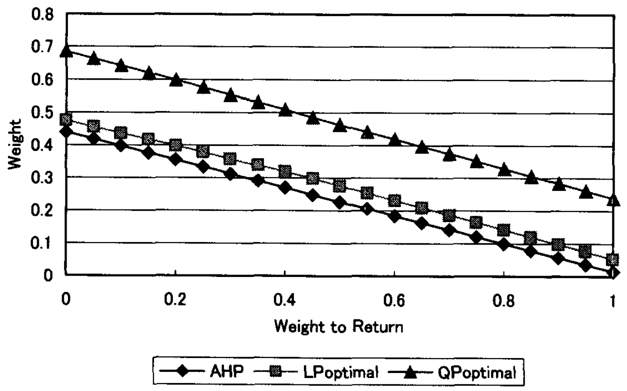

図8　2年債のウエート

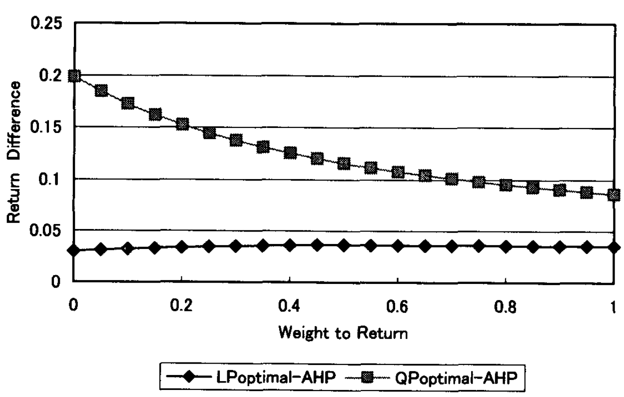

図7　AHPポートフォリオリターンとの格差

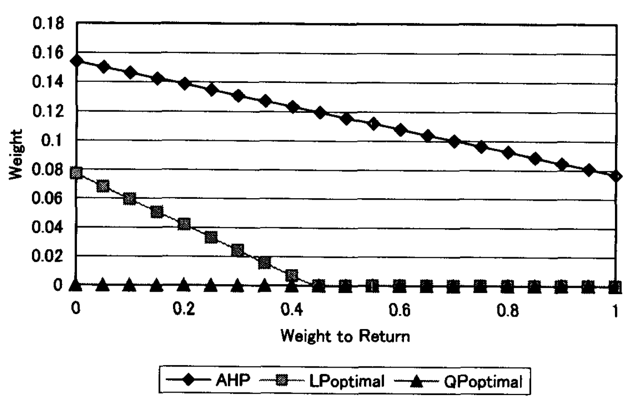

図9　5年債のウエート

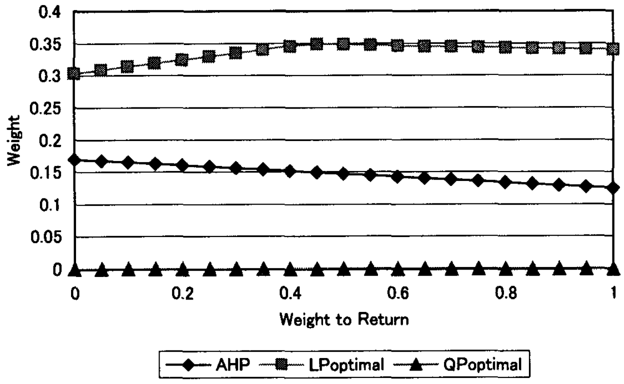

図10　7年債のウエート

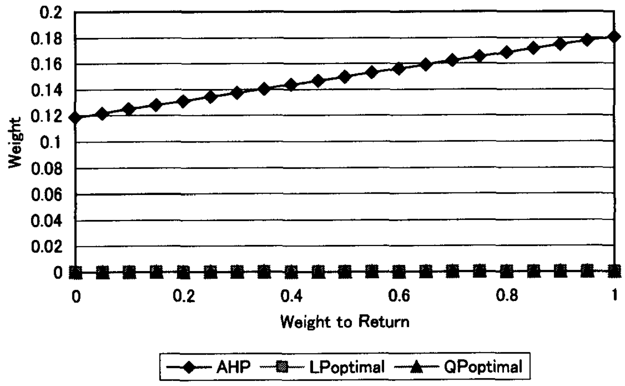

図11　10年債のウエート

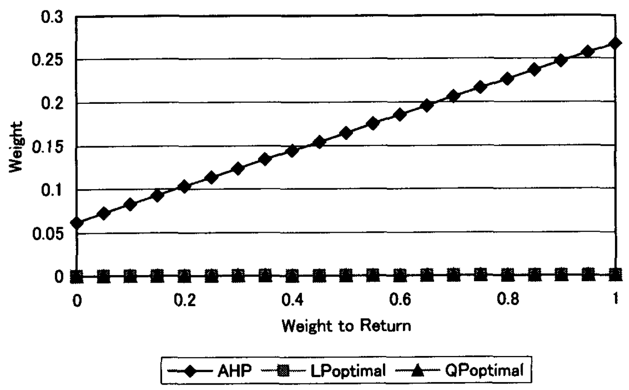

図12　15年債のウエート

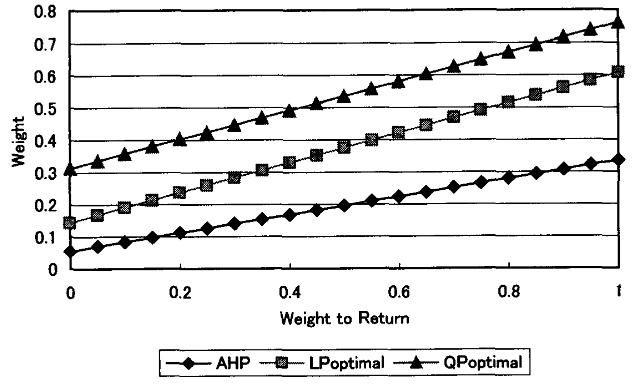

図13　20年債のウエート

した定量的リスクに関する一対比較行列が，平均・分散ポートフォリオと適切に関連したものであるかどうかは，リターンと定量的リスクとの選好を変化させたときに，AHPポートフォリオの2年債と20年債のウエートが平均・分散ポートフォリオの2年債と20年債のウエートと同じような動きを示せばよい．図8と図13に着目すると，AHPポートフォリオと平均・分散ポートフォリオは，リターンに対する選好を高かくする（リスク許容度を上昇される）に従って，それぞれ2年債のウエートを40%から0%近くまで，70%から20%まで低下させ，20年債のウエートを5%から23%まで，30%から75%まで上昇させている．

リスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオでは，2年債と20年債に加えて，リターンの選好水準に応じて5年債や7年債が選択される．より詳細にみると，リターンに対する選好が0から0.5に増加するに従って，5年債のウエートは8%から0%へと減少する．7年債のウエートはこの埋め合わせで5%上昇するが，リターンに対する選好が0.5を超えてくると減少に向かう．AHPポートフォリオでもリターンに対する選好の増加に伴う5年債ウエートの減少や，リターンに対する選好が0.5を超えたところでは7年債ウエートの減少がみられる．このように，AHPポートフォリオとリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオとの関連性は，AHPポートフォリオと平均・分散ポートフォリオとの関連性よりも高いものとなっているが，これはリスク要因別制約にリスクに関する一対比較行列が正しく反映されている，つまりリスク要因別一対比較行列が適切に与えられていることを表している．

また，AHPポートフォリオでは，リターンに対する選好の増加に伴い15年債のウエートが10%から27%へと上昇している．15年債のリスク・リターンの性質は20年債に極めて近いため，AHPポートフォリオでは，15年債が20年債のウエートを補完するような形となり，20年債のウエートがいずれのリターンに対する選好水準においても平均・分散ポートフォリオやリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオよりも少ないものとなっている．

これまで確認したように，リスク要因別の一対比較行列として節4で導入したものを利用すれば，AHPポートフォリオのウエートやリスク・リターンの特性が従来の平均・分散ポートフォリオの特性に近いものとなる．よって，このリスク要因別の一対比較行列を

用いてAHPを適用すれば，定量的要因によるウエートは従来の債券ポートフォリオ選択から逸脱することなく，定性的要因も容易にモデルに組み込んだ債券ポートフォリオの構築が可能となる．

7．まとめと今後の課題

AHPを用いれば，定性的要因も加味したうえでバランスの取れたポートフォリオを構築することができるにもかかわらず，債券ポートフォリオ構築の実務においてAHPの利用がほとんどみあたらない理由として，AHPポートフォリオのリスク・リターンと平均・分散ポートフォリオやリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオのリスク・リターンとの対応関係がみえにくいことが挙げられる．本稿では，この点を解決すべく，AHPにおける一対比較行列として定量的に与えられるものに関しては，過去のリターン時系列の平均や分散共分散行列からの情報を可能なかぎり利用した一対比較行列の構築法を因子分析に基づいて与えた．また，事例報告では，その一対比較行列に基づくAHPポートフォリオと同じリスク量をもつ平均・分散ポートフォリオやリスク要因別制約付き平均・分散ポートフォリオを構築したうえで，3者間のリターンやウエートの比較を行い，これらの関連性を明らかにした．これにより，定量的要因によるウエートは従来の債券ポートフォリオ選択から逸脱することなく，定性的要因も容易にモデルに組み込んだ債券ポートフォリオの構築が可能となる．

今後の課題としては，次の2点が挙げられる．一つは，節6において「傾き」リスクと「湾曲度」リスクに関する一対比較行列を与える際に，単位当たりのリスク量の絶対値を取ったが，絶対値を取る以外にどのような変換が好ましいかを検討することである．二つめは，定性的要因と定量的要因間の選好を表す一対比較行列としてどの程度のものを採用すれば，定性的要因も加味したうえでバランスの取れたポートフォリオを構築できるかに関する実証分析である．

謝辞　貴重なコメントを下さったレフリーと成蹊大学工学部の上田徹先生には，心から感謝致します．

参考文献

[1] 大塚英作：証券アナリストのための数学・統計学入門　第2部　統計学，日本証券アナリスト協会，第1期．
[2] 小和田正，加藤豊：例解OR　意思決定へのアプローチ，実務出版，1998．
[3] 木下栄蔵：孫子の兵法の数学モデル，講談社，ブルーバックス，1998．
[4] 木下栄蔵編：AHPの理論と実際，日科技連，2000．
[5] 批々木規雄，高山俊則：AHPを用いた最適ポートフォリオモデル，日本OR学会，1997年度春季大会，1997．
[6] 今野浩：理財工学Ⅰ，日科技連，1995．
[7] 今野浩：線形計画法，日科技連，1987．
[8] Khaksari, S., R., Kamath and Grieves, R., A new approach to determining optimum portfolio mix, The Journal of Portfolio Management (Spring): 43-49, 1989.
[9] Litterman, R. and J. Scheinkman, "Common factors affecting bond returns", Journal of Fixed Income, 54-61, June, 1991.
[10] Markowitz, H., Portfolio Selection. Journal of Finance 7, 77-91, 1952.
[11] Saaty, T. L., P. C. Rogers and Pell, R Portfolio selection through hierarchies, The Journal of Portfolio Management (Spring): 16-21, 1980.
[12] S-plus 6 for Windows Guide to Statistics, Volume II, Insightful Corporation, July, 2001.