連載講座

AHPの世界

第4回　支配型AHPと一斉法

木下　栄蔵

1.　支配型AHP

本章では，木下・中西が提案した支配型AHP（支配代替案法と支配評価水準法）について説明する．

1.1　支配代替案法（AHPにおける新しい考え方）

(1) 支配代替案法の提案[1]

従来型AHPでは各評価基準の重要度は総合目的からトップダウン的に一意に決定した．

しかし，意思決定のパターンの中には，総合目的から各評価基準の重みを決定するのではなく，特定の代替案を念頭においてそれを評価しやすいように評価基準の重みを決めていくアプローチも存在すると考えられる．そのような評価基準の重みを規制する機能を持つ代替案をここでは「規制代替案」と呼ぶことにする．

ところで，評価基準の重みの分布は，規制代替案の数だけ存在することになるが，それは評価基準の重み決定に関して規制代替案間の争いを予想させるものである．しかし，われわれは常にそのようなものとして評価基準の重みを煮詰めるプロセスをとっているわけではない．意思決定は，リスクが少なければ多少の誤差を許容してでもできるだけ少ないコストで済ませようとするはずである．

ここでは，そのような要望に応える有力な方法として，次のようなアプローチを考察することにする．

つまり，評価の根拠として決めた規制代替案による評価基準の重みの考え方に支障がなければ，そのまま最後までその方針で評価してしまうアプローチである．

そこで，本稿では次のような評価方法を考える．すなわち，各評価基準の重みは，それぞれの規制代替案によって異なる分布をする．しかし，その分布は，意思決定者の恣意によって選ばれた規制代替案によって一意に決定されるものとする．つまり，評価の根拠として決めた規制代替案以外の規制代替案に関する各評価基準の重みは，根拠となる規制代替案に関する各評価基準の評価に<完全に服従>するものとする．

ここでは，このような支配力を持つ規制代替案を「支配代替案」，また支配代替案に服従する規制代替案を「服従代替案」と呼ぶことにしよう．つまり，服従代替案の評価基準の重みは，支配代替案の各評価基準の重みから自動的に導出される．そして，このモデルでは支配代替案は，各評価基準の重み分布のみならず，それぞれの重み分布から導かれる総合評価値までを支配する．

つまり，どの代替案が「支配代替案」になろうとも，同一の代替案の総合評価値は同じになる．

以下，ここで提案する新しいアプローチのことを「支配代替案法」と呼ぶことにする．

(2) 支配代替案法による計算例

ここでは，支配代替案法による計算を簡単な例により説明する．

① $\boxed{\text{ステップ1}}$

階層構造は，二つの評価基準（I，II）と三つの代替案（1，2，3）からなるとする（図1参照）．

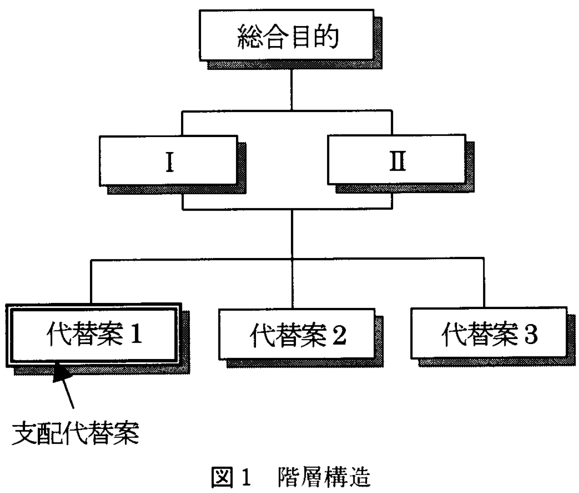


図1　階層構造

きのした　えいぞう
名城大学 都市情報学部
〒509-0261 可児市虹ケ丘4-3-3

② $\boxed{\text{ステップ 2}}$

評価基準（I, II）間の一対比較を，支配代替案（代替案 1）について行う．その結果，代替案 1 からみた I の重み（以下，この重みを I(1) と書く）は 0.4，代替案 1 からみた II の重み（以下，この重みを II(1) と書く）は 0.6 になったとする（一対比較値は表 1 参照）．

すなわち，支配代替案 1 が規制する評価基準 I，II の重みは 0.4 対 0.6 という意味である．

③ $\boxed{\text{ステップ 3}}$

評価基準（I, II）に対する各代替案（1，2，3）の評価を一対比較する．ただし，評価結果は，支配代替案（この場合は 1）を 1 に基準化する．すなわち，評価基準 I からみた 2 の評価は 1 の約 2 倍であり，3 の評価は 1 の約 3 倍である（表 2 参照）．

一方，評価基準 II からみた 2 の評価は 1 の約 0.5 倍であり，3 の評価は 1 の約 0.17 倍である（表 2 参照）．この結果，各代替案（1，2，3）の総合評価値が求まる（表 2 参照）．ただし，支配代替案 1 の総合評価値は 1 である．

すなわち，

1 の総合評価値 1(E) は

$1(E)=1\times 0.4+1\times 0.6=1$

2 の総合評価値 2(E) は

$2(E)=1\times 0.4+0.5\times 0.6=1.1$

3 の総合評価値 3(E) は

$3(E)=3\times 0.4+1.17\times 0.6=1.3$

となる．

表 1　支配代替案 1 に関する評価基準 I，II の一対比較

	I	II	重み
I	1	2/3	0.4
II	3/2	1	0.6

表 2　評価表(1)

支配代替案	1	I (0.4)	II (0.6)	E 総合評価値
評価	1	1	1	1
	2	2	0.5	1.1
	3	3	0.17	1.3

④ $\boxed{\text{ステップ 4}}$

次に，支配代替案に関する情報を元に，服従代替案 2 が規制する評価基準 I，II の重みを求める．このとき，$\boxed{\text{ステップ 2}}$ より，支配代替案 1 に関する評価基準 I，II の重みは既知である．

$$\mathrm{II}(1)/\mathrm{I}(1)=0.6/0.4 \tag{1}$$

ここで，支配代替案 1 と服従代替案 2 がそれぞれ規制する評価基準（I，II）の重みの比は，評価基準（I，II）からみた支配代替案 1 と服従代替案 2 の評価値の比と同じであるとする．すなわち，以下の式(2)，(3)は既知である．

$$2(\mathrm{I})/1(\mathrm{I})=2/1=\alpha \tag{2}$$

$$2(\mathrm{II})/1(\mathrm{II})=0.5/1=\beta \tag{3}$$

ただし，1(I)，2(I) は評価基準 I からみた代替案 1，2 の評価値で，1(II)，2(II) は評価基準 II からみた代替案 1，2 の評価値である．

すると，式(2)，(3)より服従代替案 2 に関する評価基準（I，II）の重みの比は，以下の式(4)のように導かれる．

$$\frac{\mathrm{II}(2)}{\mathrm{I}(2)}=\frac{\beta\times\mathrm{II}(1)}{\alpha\times\mathrm{I}(1)}=\frac{0.5\times 0.6}{2\times 0.4}=\frac{0.3}{0.8}=\frac{0.273}{0.727} \tag{4}$$

このようにして，服従代替案 2 に関する評価基準（I，II）の重みが決定する．

この結果から，I(2) は 0.727，II(2) は 0.273 となる．また，表 2 のデータより，代替案（1，2，3）の総合評価値を服従代替案 2 の規制に基づく評価基準の重みにより求めると，表 3 のようになる．

すなわち，

1 の総合評価値 1(E) は

$1(E)=0.5\times 0.727+2\times 0.273=0.909$

2 の総合評価値 2(E) は

$2(E)=1\times 0.727+1\times 0.273=1.0$

3 の総合評価値 3(E) は

$3(E)=1.5\times 0.727+0.34\times 0.273=1.183$

となる．

表 3　評価表(2)

服従代替案	2	I (0.727)	II (0.273)	E 総合評価値
評価	1	0.5	2	0.909
	2	1	1	1
	3	1.5	0.34	1.183

⑤ $\boxed{\text{ステップ5}}$

次に服従代替案3の規制に基づく評価基準I，IIの重みI(3)，II(3)を $\boxed{\text{ステップ4}}$ と同様の方法で求める．この結果，I(3)は，0.922，II(3)は0.078となる．そして，この結果より $\boxed{\text{ステップ4}}$ と同様の方法で服従代替案3に関する各代替案の総合評価値を求める（表4参照）．

すなわち，

1の総合評価値1(E)は

$$1(E)=0.333\times 0.922+5.88\times 0.078=0.766$$

2の総合評価値2(E)は

$$2(E)=0.667\times 0.922+2.94\times 0.078=0.844$$

3の総合評価値3(E)は

$$3(E)=1\times 0.922+1\times 0.078=1$$

となる．

ここで，表2～4の総合評価値を正規化すると，いずれも1(0.294)，2(0.324)，3(0.382)となり，どの服従代替案の規制による評価基準の重みを適用しても，総合評価値は支配代替案による総合評価値と同じであることがわかる．

このような状態を「支配代替案間の互換性」と呼ぶことにしよう．支配代替案間の互換性が成立するときは理想的な評価品質の状態にあるといえる．

しかし，現実に互換性が保たれることは稀で，多少の評価のずれ（ギャップ）が生じることが多い．そこで，このような評価のずれを調整する方法を，木下・中西は「一斉法」として提案した（3章参照）．この方法についてはSaatyが提案したスーパーマトリックスとよく似た役割を果たすものと思われる．

1.2 支配評価水準法[2]

(1) 相対評価法と絶対評価法

AHPには，連載講座2回目で紹介したように相対評価法と絶対評価法の二つの手法がある．

相対評価法は，評価基準のそれぞれに対する代替案間の一対比較結果を元に総合評価を行う．絶対評価法は，評価基準のそれぞれに対する各代替案の絶対評価値を元に総合評価を行う．前者は代替案間の直接的な比較が有効な場合に適用され，後者は評価尺度を媒介しての代替案間の間接的な比較が有効な場合に適用される．

ところで，木下・中西は，相対評価法における支配型AHP（支配代替案法）を提案した（前述）．そこで，ここでは，絶対評価法においても同じモデルが適用可能であることを明らかにするものである．

ところで，AHPの進化を，手法の拡張（絶対評価法としての拡張）と視点（考え方）の進化（支配型AHPとしての進化）から捉えると表5に示すようになる．

(2) 支配評価水準法による計算

ここでは，支配評価水準法（絶対評価法における支配型AHP）による計算を「経営戦略」の例により説明する．

ところで，支配代替案法（相対評価法における支配型AHP）の考え方は前述した．ただし，絶対評価法では，代替案評価に関する評価水準間にも相対評価法における支配代替案と同様の支配関係が存在することを明らかにする．

① $\boxed{\text{ステップ1}}$

階層構造は，二つの評価基準（A，B），五つの代替案（代替案I，II，III，IV，V）からなるとする（図2参照）．

② $\boxed{\text{ステップ2}}$

評価基準Aの評価水準はG（良い），M（普通），P（悪い）とする．そこで，これら三つの評価水準間の一対比較を行う．その結果は，表6に示したとおりである．一方，評価基準Bの評価水準もG（良い），M

表4　評価表(3)

服従代替案	3	I (0.922)	II (0.078)	E 総合評価値
評価	1	0.333	5.88	0.766
	2	0.667	2.94	0.844
	3	1	1	1

表5　AHPの拡張と進化

視点の進化 →

手法＼視点	従来の視点	支配的視点
相対評価法	従来型相対評価法	支配代替案法
絶対評価法	従来型絶対評価法	支配評価水準法

↓ 手法の拡張

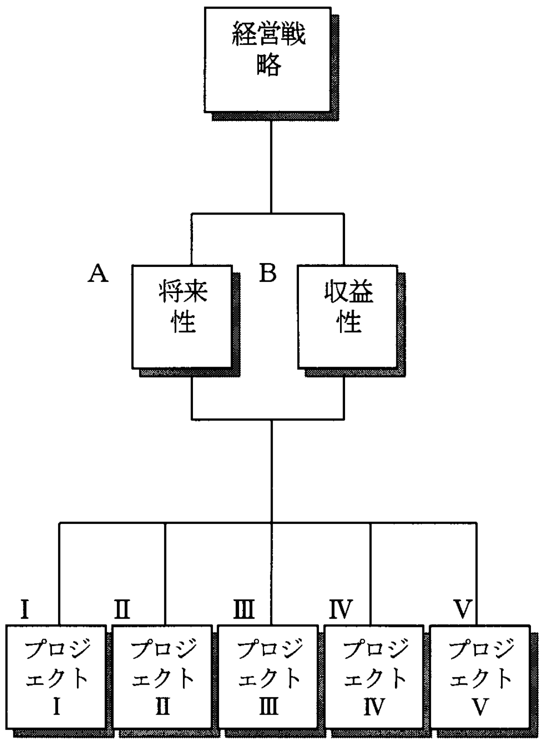


図2 階層構造

表6 評価水準間の一対比較

評価基準Aに関する評価水準間の一対比較

評価基準A	G	M	P	重み	基準化
G	1	4	7	0.687	1.0
M	1/4	1	5	0.244	0.355
P	1/7	1/5	1	0.069	0.100

C. I. =0.062

評価基準Bに関する評価水準間の一対比較

評価基準B	G	M	P	重み	基準化
G	1	3	5	0.637	1.0
M	1/3	1	3	0.258	0.405
P	1/5	1/3	1	0.105	0.165

C. I. =0.019

(普通)，P（悪い）とし，評価水準間の一対比較も表6に示した．

③ ステップ3

評価基準（A，B）間の重みの一対比較を評価者の恣意により選ばれた支配代替案について行う．この場合の支配代替案は評価基準Aに関する評価が評価水準G（良い）で，評価基準Bに関する評価も評価水準G（良い）であるような代替案を考える．このような仮想的な代替案は実際に存在してもしなくても構わない．

さて，このような支配代替案が規制する評価基準A，Bの一対比較は表7に示すようになり，重みは0.6対0.4になった．

表7 支配評価基準に関する一対比較

	A	B	重み
A	1	3/2	0.6
B	2/3	1	0.4

表8 評価水準（G，G）からみた総合評価

支配評価水準	(G，G)	A (0.6)	B (0.4)	E 総合評価値
評価	I	G 1.0	P 0.165	0.666
	II	M 0.355	P 0.165	0.279
	III	P 0.1	P 0.165	0.126
	IV	P 0.1	G 1.0	0.46
	V	M 0.355	G 1.0	0.613

④ ステップ4

評価基準（A，B）に対する各代替案（I, II, III, IV，V）の評価を絶対評価法で行う．この場合，支配代替案は評価基準A，Bとも評価水準G(良い）である．したがって，表6の重みを，評価基準A，Bとも評価水準Gを1.0に基準化する．

ここの代替案の評価は，このような仮想的な支配代替案を念頭に置いてそれとの比較で実施しているものと考えられる．

その結果，支配評価水準（A，BともGである）に関する各代替案の総合評価値は，評価基準の重みにより計算され，表8のようになる．

⑤ ステップ5

次に，支配評価水準の結果を元に，それ以外の評価水準（服従評価水準）に関する評価基準の重みと総合評価値を求める．ここでは，評価基準A, Bとも評価水準がP（悪い）になる仮想代替案が比較基準として念頭に置かれている．求め方は前述した支配代替案法の場合と同じである．

ただし，ここでは，支配評価水準と服従評価水準がそれぞれ規制する評価基準（A，B）の重みの比は，

評価基準（A，B）からみた支配評価水準と服従評価水準の評価値の比と同じである．

すなわち，$\boxed{\text{ステップ3}}$ より，

$$G(A)/G(B)=0.6/0.4 \tag{5}$$

は既知である．

また，$\boxed{\text{ステップ4}}$ より，次の式(6)，(8)は既知であり，式(7)，(9)が導出される．

$$P(A)/G(A)=0.1/1.0 \tag{6}$$

$$\therefore P(A)=0.1\times G(A) \tag{7}$$

$$P(B)/G(B)=0.165/1.0 \tag{8}$$

$$\therefore P(B)=0.165\times G(B) \tag{9}$$

したがって，式(5)，(7)，(9)より，式(10)が導出される．

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.1\times 0.6}{0.165\times 0.4}=0.909=\frac{0.476}{0.524} \tag{10}$$

このようにして，服従評価水準に関する評価基準（A，B）の重み（0.476対0.524）が決定する．また，服従評価水準（評価基準A，Bとも評価水準はPである）を仮想代替案とするため，表6の評価水準Pの重みを1.0に基準化する（表9参照）．

この結果，表8のデータより，代替案（I，II，III，IV，V）の総合評価値を服従評価水準（P，P）の規制に基づく評価基準の重みにより求めると，表10のようになる．ところで，この場合，服従評価水準（P，P）と同じ評価を有する代替案IIIは総合評価値が1.0となる．

⑥ $\boxed{\text{ステップ6}}$

次に，服従評価水準（M，M）の規制に基づく評価基準A，Bの重みを $\boxed{\text{ステップ5}}$ と同様の方法で求める．

評価基準A，Bの重みは（0.568対0.432）となる．そして，この結果より，$\boxed{\text{ステップ5}}$ と同様の方法で，服従評価水準（M，M）の規制に基づく評価基準の重みにより，各代替案の総合評価値を計算すると表12のようになる．

ただし，服従評価水準（M，M）を仮想代替案とするため，表6の重みを評価水準Mを1.0に基準化す

表9 評価水準（P，P）を基準にした評価水準の重み

評価基準A

	重み	基準化
G	0.687	9.957
M	0.244	3.536
P	0.069	1.0

評価基準B

	重み	基準化
G	0.637	6.607
M	0.258	2.457
P	0.105	1.0

表10 評価水準（P，P）からみた総合評価

服従評価水準	（P，P）	A (0.476)	B (0.524)	E 総合評価値
評価	I	G 9.957	P 1.0	5.264
	II	M 3.536	P 1.0	2.207
	III	P 0.1	P 1.0	1.0
	IV	P 0.1	G 6.067	3.655
	V	M 3.536	G 6.067	4.862

表11 評価水準（M，M）を基準にした評価水準の重み

評価基準A

	重み	基準化
G	0.687	2.816
M	0.244	1.0
P	0.069	0.283

評価基準B

	重み	基準化
G	0.637	2.469
M	0.258	1.0
P	0.105	0.407

表12 評価水準（M，M）からみた総合評価

服従評価水準	（M，M）	A (0.568)	B (0.432)	E 総合評価値
評価	I	G 2.816	P 0.407	1.775
	II	M 1.0	P 0.407	0.744
	III	P 0.283	P 0.407	0.337
	IV	P 0.283	G 2.469	1.227
	V	M 1.0	G 2.469	1.635

る（表11参照）．

ここで，表8，表10，表12の総合評価値を正規化すると，いずれも代替案I(0.310)，II(0.130)，III(0.059)，IV(0.215)，V(0.286)となり，どの服従評価水準の規制による評価基準の重みを適用しても総合評価値は，支配評価水準による総合評価値と同じであることがわかる．

ところで，本章で説明した絶対評価法における支配型AHPを，支配評価水準法と呼ぶことにする．

2. 支配型AHPの数学的説明

本章では，支配型AHPの数学的構造を評価基準が二つ（I，II），代替案が三つ（1，2，3），支配代替案1の場合で説明する．まず，支配代替案1からみた評価基準の重みベクトル b^1 を

$$b^1=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

として，評価マトリックス A を

$$A=\begin{array}{c} \\ 代替案1 \\ 代替案2 \\ 代替案3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 評価基準\mathrm{I} & 評価基準\mathrm{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{array}$$

とする（図3参照）．

このとき，総合評価値ベクトル E の導出は次のようになる．

$$E=\begin{bmatrix} 代替案1の総合評価値 \\ 代替案2の総合評価値 \\ 代替案3の総合評価値 \end{bmatrix}\equiv Ab^1$$

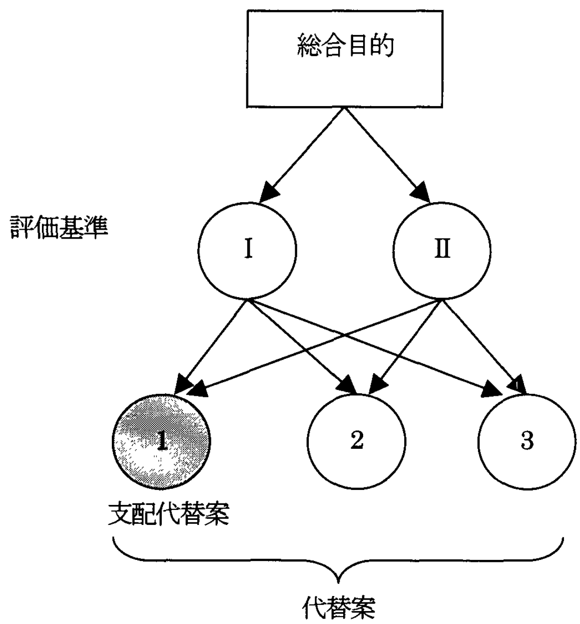


図3

すなわち，ベクトル E は評価マトリックス A と重みベクトル b^1 にのみ依存する．

また，ベクトル E は次のように表現できる．

$$E\equiv Ab^1=AA_1^{-1}A_1A_1^{-1}b^1$$

ただし，A_1 とは，支配代替案1の評価値 $(a_{1\mathrm{I}}, a_{1\mathrm{II}})$ を対角要素に有するマトリックスとする．すなわち，

$$A_1\equiv\begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり，単位行列となる．また，

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

も単位行列である．

次に，支配代替案以外のすべての代替案からみた評価基準の重みベクトルを評価マトリックスの推定ルールから説明する．このとき，A_i は，

$$A_i\equiv\begin{bmatrix} a_{i\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{i\mathrm{II}} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, 3$$

とする．ところで，支配型AHPに関するルールは次の二つである．

ルール1

> $A_iA_1^{-1}b^1$：代替案 i $(i\neq 1)$ からみた評価基準の重みベクトルの推定原理

ルール2

> AA_i^{-1}：代替案 i からみた評価マトリックスの推定原理

まずルール1の推定原理は次のように表現できる．

> b_j^i（代替案 i からみた評価基準 j の重み）と b_j（支配代替案1からみた評価基準 j の重み）の比は，a_{ij}（評価基準 j からみた代替案 i の評価値）と a_{1j}（代替案 j からみた支配代替案1の評価値）の比に一致する．

上記の内容を式で説明すると（$i=3$ の場合），次のように表せる．

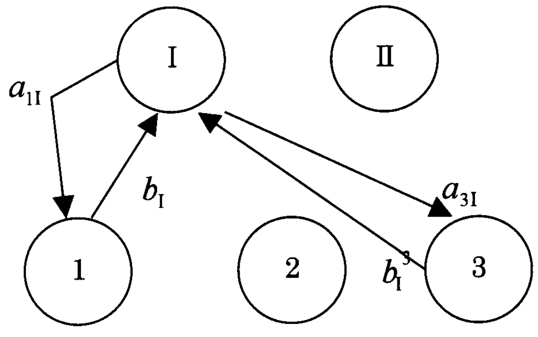
$$b^3=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^3 \\ b_{\mathrm{II}}^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & 1/a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$=A_3A_1^{-1}b^1$$

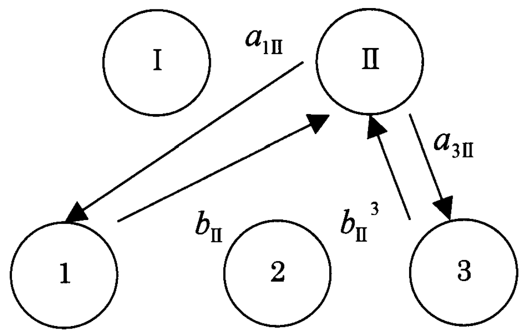
これは，以下の比例式から導かれる（図4参照）．

$$\frac{b_{\mathrm{I}}^3}{b_{\mathrm{I}}}=\frac{a_{3\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{I}}},\quad \frac{b_{\mathrm{II}}^3}{b_{\mathrm{II}}}=\frac{a_{3\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}}$$

例えば，1章の例で計算すると，



$$\frac{b_{\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{II}}}=\frac{b_{\mathrm{I}}^3}{a_{3\mathrm{I}}}$$



$$\frac{b_{\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}}=\frac{b_{\mathrm{II}}^3}{a_{3\mathrm{II}}}$$

図4

$$b^3=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^3 \\ b_{\mathrm{II}}^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.923 \\ 0.077 \end{bmatrix}$$

となる．

次に，ルール2の推定原理は次のように表現できる．

> すべての評価基準 j に対して，代替案 k に対する代替案 i の相対評価は次のように示すことができる．
>
> $$\frac{\text{代替案 } i \text{ の評価値}}{\text{代替案 } k \text{ の評価値}}=\frac{\text{代替案 } i \text{ の評価値}}{\text{代替案 1 の評価値}}\times\frac{\text{代替案 1 の評価値}}{\text{代替案 } k \text{ の評価値}}=a_{ij}\times\frac{1}{a_{kj}}$$

例えば，代替案3からみた評価マトリックスは，

$$A^3=\begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$=AA_3^{-1}$$

となる．例えば，1章の例で計算すると，

$$A^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1/2 \\ 3 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/3 & 6 \\ 2/3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．

最後に，代替案 i $(i\neq 1)$ からみた総合評価値ベクトルは，

$$AA_i^{-1}b^i=\underset{\text{ルール2}}{(AA_i^{-1})}\underset{\text{ルール1}}{(A_iA_1^{-1}b^1)}$$

となる．このことより，次の定理を導くことができる．

> 定理：ルール1，2の下では，支配代替案からみた総合評価値ベクトルは，他の代替案からみた総合評価値ベクトルと一致する．

代替案1が支配代替案のときは，

$$Ab^1=AA_1^{-1}b^1=AA_i^{-1}A_iA_1^{-1}b^1$$
$$=\underset{\text{ルール2}}{(AA_i^{-1})}\underset{\text{ルール1}}{(A_iA_1^{-1}b^1)}$$

となる．

3．一斉法[3]

支配型AHPにおいて，複数の支配代替案が存在する場合を考える．例えば，前述の例において，代替案1と代替案2が支配代替案と仮定する．このとき，代替案1からみた重みベクトル b^1，代替案2からみた重みベクトル b^2，さらに評価マトリックスAが与えられる．すなわち，入力データは，図5に示すようになる．このとき，支配代替案1から支配代替案2への推定は，ルール1，ルール2から次のようになる．

重みベクトルの推定：ルール1により，

$$b^1 \longrightarrow A_2A_1^{-1}b^1$$

となる．

評価マトリックスの推定：ルール2により，

$$AA_1^{-1} \longrightarrow AA_2^{-1}$$

となる．

一方，支配代替案2から支配代替案1への推定も同様にして求めることができる．

重みベクトルの推定：ルール1により，

$$b^2 \longrightarrow A_1A_2^{-1}b^2$$

となる．

評価マトリックスの推定：ルール2により，

$$AA_2^{-1} \longrightarrow AA_1^{-1}$$

となる．

ここで，重みベクトル b^1 と重みベクトルの推定値 $A_1A_2^{-1}b^2$ に「ずれ」が生じる場合を考える．重みベ

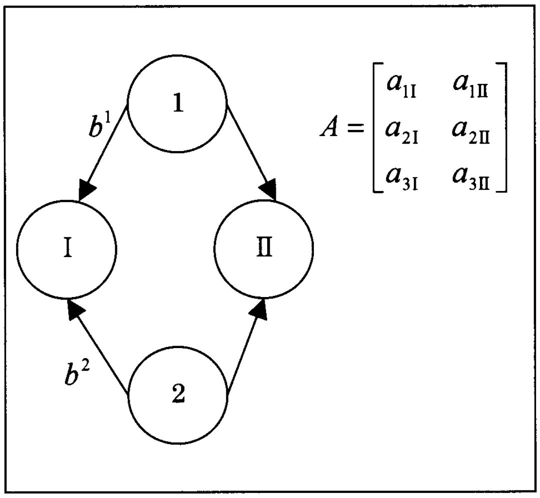


図5

クトルb^2と重みベクトルの推定値$A_2A_1^{-1}b^1$との「ずれ」も同様である．このような「ずれ」が生じない場合を，1章でも述べたが「支配代替案間の互換性」と呼んでいる．しかし，現実には互換性が保たれることは稀で，「ずれ（ギャップ）」が生じることが多い．そこで，このような「ずれ」を調整する方法を，木下・中西は「一斉法」として提案している．

そこで，次に，「一斉法」について，すべての代替案が支配代替案の場合（前述した例では，代替案の数は三つ）を例として説明する．

まず，支配代替案1からみた重みベクトルの調整値b^1は，オリジナルデータb^{11}，支配代替案2からの推定値b^{12}，支配代替案3からの推定値b^{13}の平均値とする．すなわち，

$$b^1=\frac{1}{3}\{b^{11}+b^{12}+b^{13}\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_1A_1^{-1}b^1}{e^TA_1A_1^{-1}b^1}+\frac{A_1A_2^{-1}b^2}{e^TA_1A_2^{-1}b_2}+\frac{A_1A_3^{-1}b^3}{e^TA_1A_3^{-1}b_3}\right\}$$

となる．同様にして，支配代替案2，3からみた重みベクトル調整値b^2，b^3はそれぞれ次のようになる．

$$b^2=\frac{1}{3}\{b^{21}+b^{22}+b^{23}\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_2A_1^{-1}b^1}{e^TA_2A_1^{-1}b^1}+\frac{A_2A_2^{-1}b^2}{e^TA_2A_2^{-1}b^2}+\frac{A_2A_3^{-1}b^3}{e^TA_2A_3^{-1}b^3}\right\}$$

$$b^3=\frac{1}{3}\{b^{31}+b^{32}+b^{33}\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_3A_1^{-1}b^1}{e^TA_3A_1^{-1}b^1}+\frac{A_3A_2^{-1}b^2}{e^TA_3A_2^{-1}b^2}+\frac{A_3A_3^{-1}b^3}{e^TA_3A_3^{-1}b^3}\right\}$$

そして，新しい重みベクトルb^iと古い重みベクトルb^i $(i=1,2,3)$との間に「ずれ（ギャップ）」がなくなるまでこの手順を繰り返すことにする．なお，この手順により，重みベクトルb^iが収束することは，文献[4]に詳述している．

また，「一斉法」の例として，

$$b^{11}=\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}\quad b^{22}=\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}\quad b^{33}=\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}$$

の場合を表13に示す．

表13 「一斉法」の例

1	I	II
1	1	1
2	2	1/2
3	3	1/6

2	I	II
1	1/2	2
2	1	1
3	3/2	1/3

3	I	II
1	1/3	6
2	2/3	3
3	1	1

	1		2		3	
	I	II	I	II	I	II
①	0.4	0.6	0.7	0.3	0.2	0.8
			0.727	0.273	0.923	0.077
	0.368	0.632			0.913	0.087
	0.014	0.986	0.053	0.947		
②	0.261	0.739	0.493	0.507	0.679	0.321
			0.585	0.415	0.864	0.136
	0.196	0.804			0.814	0.186
	0.105	0.895	0.319	0.681		
③	0.187	0.813	0.466	0.534	0.784	0.214
			0.479	0.521	0.806	0.194
	0.179	0.821			0.797	0.203
	0.169	0.831	0.449	0.551		
	0.178	0.822	0.465	0.535	0.796	0.204

この結果，収束値は，

$$b^1=\begin{bmatrix}0.178\\0.822\end{bmatrix}\quad b^2=\begin{bmatrix}0.465\\0.535\end{bmatrix}\quad b^3=\begin{bmatrix}0.796\\0.204\end{bmatrix}$$

となる．

したがって，総合評価値はそれぞれ，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1/2\\ 3 & 1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.178\\ 0.822\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0.767\\ 0.671\end{bmatrix} \qquad (\text{支配代替案}1)$$

$$\begin{bmatrix}1/2 & 2\\ 1 & 1\\ 3/2 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.465\\ 0.535\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.3025\\ 1\\ 0.8725\end{bmatrix} \qquad (\text{支配代替案}2)$$

$$\begin{bmatrix}1/3 & 6\\ 2/3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.796\\ 0.204\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.4893\\ 1.1427\\ 1\end{bmatrix} \qquad (\text{支配代替案}3)$$

となる．しかし，上記三つの総合評価値は，正規化すると，すべて

$$E=\begin{bmatrix}0.410\\ 0.314\\ 0.276\end{bmatrix}$$

となり一致する．

最後に，本稿で紹介した支配型AHPと「一斉法」は，中西昌武氏（名古屋経済大学）との議論に追うところが大であり，また，支配型AHPと「一斉法」の数学的精緻化と収束証明は，関谷和之氏（静岡大学）にお願いした．両氏に厚く感謝する次第である．

参考文献

[1] 木下栄蔵，中西昌武：AHPにおける新しい視点の提案, 土木学会論文集, No. 569/4-36, pp. 1-8, 1997.

[2] E. Kinoshita and M. Nakanishi: Proposal of New AHP Model in Light of Dominant Relationship among Alternatives, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 42, No. 2, pp. 13-19, 1999.

[3] 木下栄蔵, 中西昌武：支配代替案法における追加データの処理手法「一斉法」の提案, 土木学会論文集, No. 611/IV-42, pp. 13-19, 1999.

[4] E. Kinoshita, K. Sekitani and J. SHI: Mathematical Properties of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 45, No. 2, pp. 198-213, 2002.