

最長片道切符

宮代 隆平, 葛西 隆也

最長片道切符とは、JRで買うことができる片道切符のうち、経路の長さが最も長いものである。最長片道切符のルートがどのようなものになるかは昔から議論があったが、決定的な解答は得られていなかった。筆者らは、整数計画法を利用してこの問題に対する厳密な最長ルートを与えた。さらに、実際に最長片道切符を購入し、最長ルートを鉄道で旅行した。本稿では、最長片道切符のルートを求めた手法の紹介、および「最長片道旅行記」をお届けする。

キーワード：鉄道、最長路問題、整数計画法

1. はじめに

「JRの片道切符を1枚だけ使って、日本全国できるだけ長い距離を旅行するには、どのようなルートの片道切符を購入したらよいだろうか？」

上記の問題はかなり以前から知られており、この問題の解となる片道切符は俗に「最長片道切符」と呼ばれている。最長片道切符のルートは既にいくつかの文献で記述されているが[1~4]、それらの文献では「最長ルート」を示していながら、ルートが最長であることの数理的根拠が不明であった。筆者らはこの問題に対して、整数計画法を用いて厳密解を算出した[5]。本稿では、最長片道切符のルートを求めた手法と、実際に最長片道切符を購入しルートに沿って旅行したレポートを紹介する。なお誌面の都合上、割愛せざるを得ない部分も多かった。詳細に興味を持たれた方は、Webページ[6, 7]をご覧ください。

2. 最長片道切符のルートを求める

2.1 問題の定義

本稿では、「最長片道切符のルートを求める」という問題を Longest Oneway-ticket Problem (以下では LOP) と呼ぶ。LOP は、「片道切符を購入できる」という制約条件の下で、ルートの距離を最大化する問題である。

まず、片道切符を購入できるのはどのような条件を満たすルートかを整理する。JRの規則では、「一度通

った区間をもう一度通る(例：折り返し)」あるいは「同じ駅に2回到着し、さらに先へ進む」場合には片道切符にはならない。また当然のことながら、ルート全体として連結でなくてはならない。したがって、購入できる片道切符のルートの形状は以下の3タイプになることがわかる(図1)。

- ・一本の線で表現できるタイプL
- ・ループ状になるタイプO
- ・タイプOとタイプLが接続した形のタイプP

タイプLとタイプOに関しては、ルートを逆にたどっても構わないが、タイプPは片方の向きしか許されない。また日本のJR路線図の形から、タイプOのルートはLOPの最適解(最長ルート)にならないことがいえる。

次に、最適解のスタート、ゴールになる駅について考える。路線図において、駅を頂点、駅と駅を結ぶ線路を枝とみなしたグラフを考える。そのグラフ上において、次数1の頂点を終端駅、次数3以上の頂点を分岐駅、分岐駅に隣接している次数2の頂点を隣接駅、隣接駅以外の次数2の頂点をその他の駅と呼ぶことにする。以上のように分類すると、「その他の駅」は明らかに最適解のスタートやゴールの駅にならないことがわかる。またタイプLが最長ルートとなる場合、スタートとゴールともに終端駅になる。タイプPが最長ルートの場合、ゴールは分岐駅となるが、スタートに関しては2通りの可能性があり、終端駅が隣接駅

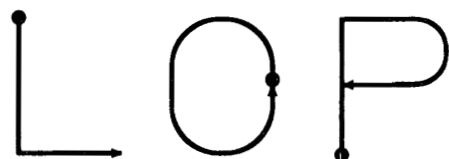


図1 タイプL, O, Pの形状

みやしろ りゅうへい

東京大学大学院 情報理工学系研究科

〒113-8656 文京区本郷7-3-1

かさい たかや

東日本旅客鉄道(株) 東京電気工事事務所

〒151-8512 渋谷区代々木2-2-6

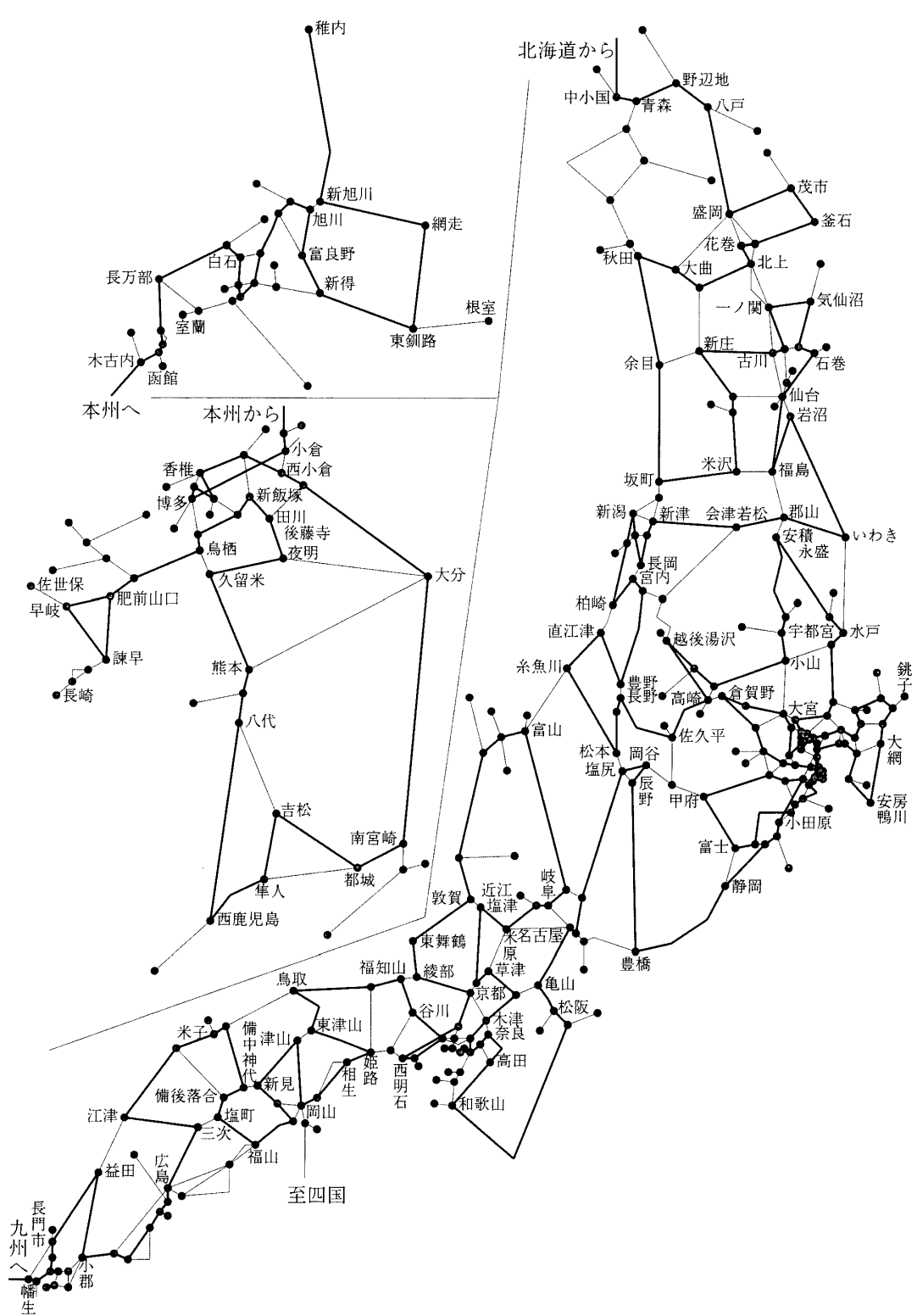


図2 最長片道きっぷ全経路 (2002年12月現在)
 ルート：稚内 (北海道)→肥前山口 (佐賀県)，運賃計算キロ：11614.9 km (JR全線の約6割)，運賃：91450円 (学割73160円)，有効期間：58日 (20日弱で旅行可能)。運賃計算の特例によって最短経路で計算すべき区間は、最短経路を表示している (詳細は文献[6]を参照)。

のどちらかである (図3)。タイプPのルートのうち、スタートが終端駅のものタイプPe、隣接駅のものタイプPnと呼ぶことにする。

以下では、JRの実際の路線図から隣接駅と「その他の駅」を取り去って簡略化したものの上でLOPを考える。隣接駅を考慮しないとタイプPnの最適解を

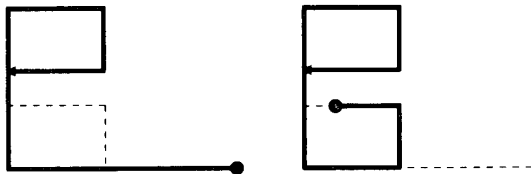


図3 タイプ Pe, Pn の形状

求める際に問題が発生するが、これに関しては節 2.3 で述べる。

また、北海道、四国、九州は、それぞれ本州と 1 本の枝だけで連結しており、本州内の路線距離は他 3 島と比較して圧倒的に長いため、最適解は必ず本州を通る。したがって、本州と接続している区間を通るという制約条件の下で、北海道、四国、九州の最長ルートを先に求めておく¹。その上で、路線図から本州以外の部分を取り除き、代わりに北海道、四国、九州の最長ルートと同じ距離を持つ 3 本の枝を本州につなげるにより、問題を解きやすくすることにした。

2.2 タイプ L の最適解を求める

筆者らは、各タイプの最適解を求めるのに整数計画法を利用した。まず、簡略化した路線図に対応するグラフの各枝 i に 0-1 変数 x_i を割り当て、 $x_i=1$ のときにその枝を通過し、 $x_i=0$ ならば通過しないと定義する。また、便宜的にグラフの頂点にも整数変数を定義する。頂点 v (終端駅か分岐駅) に対応する整数変数 s_v の値は、 v に接続する枝に定義づけされている 0-1 変数の和とする。すなわち

$$s_v = \sum_i x_i \quad (i \text{ は } v \text{ に接続している枝})$$

が成り立つ。各 s_v を **駅変数** と呼び、駅 v に接続している枝のうち何本を通過するかを表している。

LOP は距離の最大化問題であるから、各枝 i に対応する距離を c_i とおくと、目的関数はタイプ L, Pe, Pn 共通で

$$\text{maximize } \sum_{\text{枝 } i} c_i x_i \quad (1)$$

となる。

タイプ L の制約式を考えよう。タイプ L の最適解においてはスタート、ゴールともに終端駅であるから、全国の終端駅のうち 2 箇所だけを訪れる。また、分岐駅においては駅変数の値は 0 か 2 になる。これらの特徴は、以下の制約式で表現できる：

$$\sum_{j: \text{終端駅}} s_j = 2, \quad (2)$$

$$\text{全ての分岐駅 } k \text{ に対して } s_k \in \{0, 2\}. \quad (3)$$

¹ 路線図の規模が小さく、かつスタートの駅が固定されているため、全探索でも容易に最長ルートが求められる。

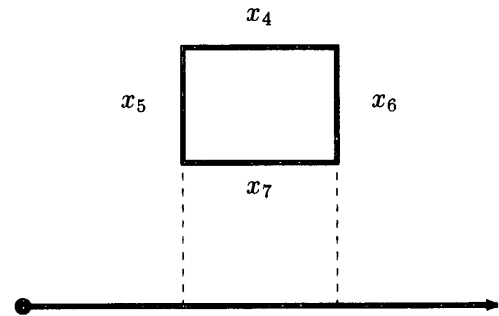


図4 タイプ L とループ

分岐駅に関する制約式(3)は線形不等式系で書き換えられる。例えば、 $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ と定義されているとき、 $s_1 \in \{0, 2\}$ という制約式は $-x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$, $x_1 - x_2 + x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ と等価である。次数 4 以上の分岐駅についても同様に線形不等式系で表現できる。

制約式(2), (3)の下で目的関数(1)を最大化すると、タイプ L のルートとは別にループを含んだ解が得られる(図 4)。これは、タイプ L の記述として制約式(2), (3)だけでは不十分なためである(ループが存在しても制約式(2), (3)を満たす)。そこで、図 4 のようなループが存在した場合、制約式 $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 3$ を追加して再び整数計画問題を解く。タイプ L のルートはループを含まないので、ループ除去の制約式を追加しても最適解には全く影響を及ぼさない。この「ループ除去の制約式を追加し、整数計画問題を解く」という操作(切除平面法)を、得られる解にループが存在しなくなるまで繰り返し行う。

逐次的にループ除去の制約式を追加して計算を繰り返した結果、12 回の計算でタイプ L の最適解を求めることができた(距離 11614.9 km, 総計算時間 97 秒, 追加制約式 34 本)。なお、全ての計算には CPU: Athlon 950 MHz, RAM: 640 MB, OS: Windows 98 SE の PC を使い、整数計画ソルバーとして CPLEX 7.0[8]を使用した(以降も同様)。

2.3 タイプ Pe, Pn の取扱い

タイプ Pe は、スタートが終端駅、ゴールが分岐駅となる。したがって、タイプ L と同じく終端駅と分岐駅だけを考えればよい。まず、タイプ Pe の形状から以下の制約式があげられる：

$$\sum_{j: \text{終端駅}} s_j = 1, \quad (4)$$

$$\text{全ての分岐駅 } k \text{ に対して } s_k \in \{0, 2, 3\}. \quad (5)$$

しかし制約式(4), (5)だけでは複数の分岐駅で駅変数の値が 3 となることを許してしまい、タイプ Pe のル

ートからは程遠い解しか得られない。したがって、「駅変数の値が3になる分岐駅はたかだか一つ」という制約を追加する必要がある。各分岐駅 k に対して、駅変数の値が3のときに1となる0-1変数 b_k を導入する。その上で

$$\sum_{k:\text{分岐駅}} b_k = 1 \quad (6)$$

という制約式を追加することにより、駅変数の値が3となる分岐駅をたかだか1個に抑えることができる。

変数 b_k の定義は以下のようになる。分岐駅 k の次数が3の場合、 $b_k \geq s_k - 2$ と定義すると駅変数 s_k の値が3のときに b_k の値が1となる。次数が4以上の場合については、文献[6]を参照されたい。

計算の結果、制約式(4)~(6)の下で得られた最適値は11137.4 kmであり、タイプLの最適値より小さかった²。得られた解はループを複数含んでおりタイプPeのルートそのものではないが、ループ除去により距離が長くなることはない。したがって、タイプPeはLOPの最適解ではないことが分かる。

一方タイプPnでは、スタート地点が隣接駅であるため、まともに最適解を求めようとすると隣接駅も考慮しなくてはならず面倒である。そこで、タイプPeの場合と同じく緩和問題を利用して計算の手間を省くことを試みる。

タイプPnの最適解においては、「スタート地点となる隣接駅」に隣接している分岐駅の中に、駅変数の値が2となるものが存在する³。これに着目し、ルートを1駅だけ延長してやり、「分岐駅→分岐駅」となるようなルートを考える(図5)。これをタイプBと呼ぶことにする。

タイプPnの代わりにタイプBの最適解を求めることにすれば、隣接駅を考慮する必要はなくなる。もちろん、タイプBの経路は片道切符にはならないが、

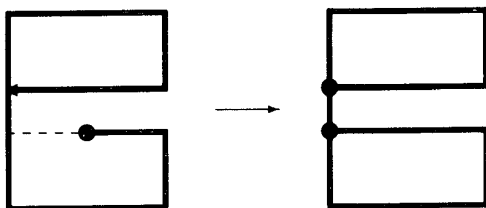


図5 タイプPnからタイプBへの変形

² 実際には、各変数の整数制約を取り除いた線形緩和問題を解いてもタイプLの最適値で限定できる。

³ 駅変数の値が3である可能性もあり、さらに別の定式化が必要になるが本稿では省略する。文献[6]を参照されたい。

タイプBの最適値がタイプLの最適値より小さければ、タイプPnがLOPの最適解ではないといえる。タイプBの制約式はタイプPeの場合とほとんど同じでよく、制約式(4)、(6)の右辺をそれぞれ0、2とすればよい。

計算の結果、タイプB(余分なループ含む)の最適値は9474.4 kmとなった²。これにより、タイプPnもLOPの最適解にはならないことが分かった。

求めた最長片道切符のルートは、図2に示したとおりである。

3. 最長片道切符のルートを旅する

最長片道切符。1999年秋のある日まで、それは私にとって一種の「あこがれ」でしかなかった。しかし翌年の夏、私⁴はそのあこがれのきっぷを手に、稚内に立っていた。怪しいオジサンといっしょに。

3.1 踏み出せない理由

自他ともに認める鉄道ファンの私のこと、最長片道切符というものがあことは昔から知っていた。が、それは手の届かない夢のような存在だった。

その理由の一つは、実際に旅行することの困難さだ。きっぷのねだんは10万円に迫る勢いだし、それを使って実際に旅行しようとするれば、最短でも約20日はかかる。学生のうちなら不可能ではないものの、アルバイトの稼ぎ時である夏休みをまるまるつぶして、逆に貯金をはたく覚悟が必要になる。

そして何より決定的だったのは、「真の最長経路」が実は未知なのではないか、という思いだ。「最長経路」と称するものはときどき鉄道雑誌に載るのだが、その経路が最長であるという根拠は示されていない。実際、最長片道切符の旅行記の中には、「旅行から帰ってきて、実はもっと長い経路があったことを知った」というオチのついているものもあって、自分がその二の舞になることだけはごめんだと思っていた。

3.2 ゼミは迂回の出発点

そんなある日、研究室でとなりに座っていた宮代くんがオペレーションズ・リサーチ誌[4]を持ってきた。それを読むと、数年前に授業で習った整数計画法を使えば、最長片道切符の経路を求めることができる、と書いてあるではないか!

これは研究室内のゼミのネタにちょうどいいし、何より、未知だと思っていた最長経路が明らかになるの

⁴ 本節以降は、最長片道切符で実際に旅行してきた葛西が執筆している。

は画期的だ。宮代くんとともに、さっそく計算に着手した。OR 誌の記事[4]で不完全だった部分をちょよっと手直しして…と思ったら前述のとおり意外に奥が深かったのだが、ともかく、厳密な最長経路を求めることができた。

満を持してゼミで発表すると、予定どおりウケた。あとは Web ページで結果を公開すれば一件落着、のはずだった。

ゼミから少し経ったある日、研究室のとある先生が「PTT⁵で発表してみないか」という話を持ってきた。PTT という研究会の参加メンバーには鉄道好きの人が多いため、きっとウケるだろうというのだ。聴衆に興味があるなら発表することはやぶさかではないので、いそいそと出かけた。

発表は予定どおりウケたのだが、そのあとが予定外だった。研究会終了後の懇親会の席上、「最長経路を求めたんだから、あとは実際に乗ってくるしかないね」という話が出たのだ。「そりゃ乗りたいとは思いますが、先立つものが…」と私が答えを渋っていると、この奇妙な、いやありがたい方々は、躊躇せず「募金するから乗ってこい」というではないか。

酒の席での話だけに、実際に募金が集まるのかどうか半信半疑、いや、「二信八疑」ぐらいの気分で家に帰ってみると、メーリングリストで募金が始まっていた。しかも 20000 円はすでに内定したという。…何なんだ、このノリのよさは。研究の内容が内容だけに、話の展開まで迂回を始めたのか。

ともかく、この一件で、実際に旅行することがあっさり決まってしまった。研究会以外の人にも対象に Web で募金をしてみたら、最終的には約 26 万円も集まった。募金をしてくださった方々には、ここであらためてお礼申し上げる。

3.3 稚内発、波乱の幕開け

そんなこんなで、2000 年 7 月 29 日、私は稚内に立っていた。手にはあこがれの最長片道切符、そして横には怪しいオジサン、もとい、募金言い出しっぺの某氏。せっかく稚内に来たのだからと、出発を前に、ウニやら何やらをごちそうになった。

昼間から酒も入ってごきげんになったところで、件のきっぷ (図 6) を取り出し、いよいよ旅行開始。稚内駅では改札の人がきっぷを見て一瞬凍りつくという期待どおりのリアクションを見ることができた。

が、その後すぐに凍りついたのは自分だった。日本酒を飲みすぎたようで、1 本目の列車を降りるときには夕食を受けつけない状態。立っているのもつらいほどで、夜行列車が出るまでの約 4 時間、旭川駅の待合室でごろごろしているしかなかった。これから約 1 カ月、約 250 本の列車を乗り継ぐ大旅行だというのに、1 本目でダウンしていたのでは先が思いやられる。

3.4 首都圏入りを阻むもの

波乱の幕開けとなった旅行だが、その後しばらくはほぼ順調に行程を消化することができた。2 日目の昼ごろから少しずつ食べ物を受けつけるようになり、小樽の親戚宅でひと休みしたあと、4 日目の夜に北海道を抜けた。以後、八戸、秋田、盛岡、仙台と東北地方の主要都市を転々と泊まり歩き、出発から 8 日目、8 月 5 日を迎えた。

この日は太平洋側のいわきから日本海側の新潟まで本州を横断することになっていたのだが、郡山を目前にしてあちこちに落雷が始まり、ついに信号設備が故障してしまった。無線もろくに通らない山の中で待たされること約 2 時間、待ちぼうけの乗客を「救出」す

東 冊 1101-07	甲 (C) R 521
① 2 3 4 片 往 新 新	領 取 額 Amount Received
道 復 往 復	¥ 75,090
原 券 經由	種 別 号
收 受 又 は 変 更 区 間	稚 内 ▶ 肥 前 山 口 59 日間有効 Days Good for
1 2 3 4 5 6	經由 別紙参照 (No. 1, 2)
人 員 大人 Adult 人 小 児 Child 人 学 割 0/1 人	接 続
再 掲 自動車運賃 円 運 送 運 賃 計 円	記 事 7月29日の有効 (東京)
1 往片内 2 復片戻	発 売 額 計 75,090 円
平成 12 年 7 月 29 日	東 京 駅 発 行
(入 鉄 ・ 途 中 下 車 印)	
⑧	

図 6 最長片道切符 (このほかに B5 の別紙 2 枚)

⁵ <http://www.tanaka.ecc.u-tokyo.ac.jp/~ktanaka/ptt/>

るバスがやってきたが、計画は狂ってしまった。

翌日は研究室の合宿があったので、いったん新潟県の新津まで行き、ここから夜行列車で東京に戻って、荷物を入れ替え伊豆へ。2泊3日の合宿を終えるとすぐさま家に戻り、1時間そこそこで身支度を整えてから夜の新幹線に飛び乗って最長経路に復帰。新潟まですっ飛んでいき、駅前のホテルに転がり込んだ。これでようやく当初の計画に復帰することができたが、翌朝の出発は5時だ。

さらに2日後の8月10日、またも天気によられた。長野、越後湯沢、小山を経て、これが終われば首都圏に入れる、というところで待っていたのは運転見合わせ。理由は集中豪雨だという。この前に足止めを食らったところから直線距離で20 kmと離れていない駅で再度の足止め。もう開き直って笑うしかない。

結局、列車は2時間遅れで水戸に着いた。このままだいけば0時過ぎには家に帰れるな、と思った矢先に人身事故の一報が入り、家にたどり着けない可能性も出てきた。幸い、40分ほどで復旧したので家には帰れたものの、時計は深夜1時を回っていた。

3.5 夏バテにも負けず

この一件ですすがに災厄が出尽くしたようで、以後はすこぶる順調だった。3日かけて首都圏をぐるぐる回り、ひと休みしてから、8月15日に三重県の津まで一気に西進。以後、兵庫県の実家と「中断地点」を何度か往復しながら近畿以東を乗り終えた。

8月21日の夜、いよいよ最終ラウンドに突入。本数の少ない中国地方のローカル線を驚異的な乗り継ぎで進んでいく。といっても、経路が経路だけに、朝方に通った駅の一つとなりの駅へ、半日かけて移動するなんてこともざらにある。暑いせいか、午後になると毎日バテてしまって自分でも心配になるほどだったが、乗り遅れも乗り過ぎもなく済んだのは鉄道ファンの最後の意地といえるかもしれない。

8月24日の夕方、ついに九州に上陸。大分、宮崎、鹿児島、熊本と時計回りに進んだあと、かつて炭鉱で

栄えた福岡県田川市で一泊し、最後の日を迎える。

3.6 迂回は続くよどこまでも

出発から実に29日目となる8月26日、目覚めはさわやかだった。朝から佐賀、長崎と西へ向かって進んでいくと、四国4県と沖縄を除く42都道府県の訪問を期せずして達成。もっとも1カ月もかかっているのので、巡回セールスマンもあきれて物が言えまい。

肥前山口から全行程で唯一のループに入る。一周約150 kmの「環状線」を反時計回りにたどり、最終ランナーの「白いかもめ」で諫早湾を眺めてから、さっき通った肥前山口駅に戻ってきたのは15時34分。「同じ駅を2度通ったら、そこで旅行を打ち切る」というルールにしたがい、約1カ月にも及ぶ大旅行をここで終えることにした。

…と思ったら甘かった。募金が少々余ったので、どうしようかと募金者に尋ねたら、多かった回答が「四国に行ってこい」。さすがは最長片道切符、ゴールまでの道のりはまだ遠い。

参考文献

- [1] 東大旅行研究会：“最長片道旅行”，大宅壮一ほか編集：日本の発見，中央公論社，311-346，1962.
- [2] 宮脇俊三：“最長片道切符の旅”，新潮社，1979.
- [3] 光畑茂：“最長片道切符の終着駅”，旅と鉄道，103，鉄道ジャーナル社，104-105，1996.
- [4] 山路航太，林宏明：“チャレンジ最長片道きっぷ”，オペレーションズ・リサーチ，39，674-676，1994.
- [5] 宮代隆平，葛西隆也，松井知己：“最長片道きっぷの厳密解を求める”，OR学会2000年秋季研究発表会アブストラクト集，24-25，2000.
- [6] 葛西隆也：“最長片道きっぷの経路を求める”，Webページ，<http://www.swa.gr.jp/lop/>
- [7] 葛西隆也：“PROJECT LOP”，Webページ，<http://www.swa.gr.jp/plop/>
- [8] ILOG：“ILOG CPLEX 7.0 Reference manual”，ILOG，Gentilly，2000.