

状態空間モデルを用いた飲食店売上の要因分解

山口 類, 土屋 映子, 樋口 知之

1. はじめに

1990年代に入りいわゆるバブル経済が崩壊し、それ以来日本は不況の波に襲われている。そのため、あらゆる産業において、業務の効率化が叫ばれている。そのような状況のもと、効率的かつ効果的なマーケティング手法が求められ、その重点はマーケットの成熟化や消費者の好みの多様化とあいまって、従来型の不特定多数の消費者を対象とし大量生産大量消費を目指すマスマーケティングから、より小さなセグメントを対象とし、それごとに対応を変えるマイクロマーケティングや、さらには個人を対象とする One-to-One マーケティングへと移ってきている[1, 2].

外食産業においても、外食マーケットの成熟化や出店過剰の状況のもとで、チェーン展開するファミリーレストランやファーストフード、居酒屋などでは画一的・均一的な運営から脱却し、独自性や他店との差別化を図ろうという動きが活発になってきた。地域限定のメニューや個店をイメージした内装や食器、制服など、従来との違いを明確にして、客層や消費者の好みの変化・多様化に responding [3]. つまり各店舗固有の状況を考慮に入れた運営が図られている。飲食店の運営においては売上の長期的な変動(トレンド)を知ることと、その日その日の売上を予測することが重要である。特に後者は仕入れるものが食材で日持ちしないということから、他の産業よりも的確に予測する必要がある。飲食店の日々の売上は、曜日、祝日、天気、近所での催し物への人出等の様々な要因に左右される。

やまぐち るい

九州大学 大学院数理学研究院

〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

つちや えいこ

東京工業大学 理学部

〒152-8550 目黒区大岡山 2-12-1

ひぐち ともゆき

統計数理研究所

〒106-8569 港区南麻布 4-6-7

受付 03.11.11 採択 04.3.3

またその要因の売上への寄与の仕方は店舗ごとに異なる。そこで各店舗の売上時系列データをこれら各要因成分に分解するモデルを構成し、そのモデルによって得られる各店舗固有の情報に基づいて将来の売上を精度良く予測することは、仕入れ、人員配置、新規出店計画等、様々なレベルにおける経営戦略立案上有益であることは疑いようもない。本研究では、状態空間モデルの柔軟な表現力と情報量規準によるモデル評価を利用した売上予測手法を提案し、実際に、ある大規模催事場およびビジネス街に隣接した飲食店の2年間分の日々売上データに応用した。本論文では以下、まず節2でモデルの提案を行う。節3ではモデルを実データに応用し得られた結果を示し考察する。そして節4で予測性能の評価と考察を述べ、まとめを節5で行う。

2. モデル

本研究は飲食店の売上時系列データとしてランチ： $y_{1,n}$ 、宴会： $y_{2,n}$ 、一日総計： $y_{3,n}$ の3種類を用いる。また同時に隣接催事場で開かれるイベントへの予想平均入場者数： $X_{1,n}$ 、天候： $X_{2,n}$ 、および曜日： d_n の時系列を使用する(表1参照)。データの出典は、売上時系列 $y_{i,n}$ ($i=1, 2, 3$) および天候 $X_{2,n}$ については当該飲食店店長の記載によるものである。またイベントへの予想平均入場者数 $X_{1,n}$ は、隣接催事場運営会社が発表する月間催事予定表に記載された、イベントの会期および会期中の延べ入場者見込み数を基とするものである。これについては節2.3で詳しく述べる。

本研究では3種類の売上時系列 $y_{i,n}$ ($i=1, 2, 3$) を説明するために上述したような要因を考慮に入れ、それぞれモデルを構成した。以下3種類の時系列で解析対象とする売上を y_n と書き、その要因分解モデルを示す。

$$y_n = t_n + W_n + R_n + E_n + r_n + \varepsilon_n, \quad (1)$$

ここで t_n は確率差分方程式 $t_n = 2t_{n-1} - t_{n-2} + v_{t,n}$, $v_{t,n} \sim N(0, \sigma_t^2)$ に従うトレンド成分である[4]。また、ここで $N(0, \sigma_t^2)$ は平均0、分散 σ_t^2 のガウス分布を表す。

表1 使用する時系列

$y_{1,n}$: ランチの売上	$y_{2,n}$: 宴会の売上	$y_{3,n}$: 一日の総計
$X_{1,n}$: 平均入場者数 [人]	$X_{2,n}$: 天気 {1,2, ..., 5}	d_n : 曜日 {1,2, ..., 7}

表2 Indicator functions

	h_{1n}	h_{2n}	h_{3n}
1	月～金の祝日	祝日ではない月～木で翌日が祝日	休日 (土日祝)
0	それ以外	それ以外	それ以外

W_n は週周期成分, R_n は雨効果, E_n はイベント効果成分である. r_n は $r_n = \sum_{j=1}^2 a_j r_{n-j} + v_{r,n}$, $v_{r,n} \sim N(0, \tau_r^2)$ の定常2次ARモデルに従う成分である. AR項数を2次としたことに特に理由はない. 必要に応じて増やすことも可能である. $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$ は残差成分である. 本節では, W_n , R_n , および E_n 各項のモデルについて詳述する.

2.1 モデル: 週周期成分

週周期成分 W_n は次のように書き表されると仮定した.

$$W_n = w_n + h_{1n}\beta_1(w_{\parallel,n} - w_n) + h_{2n}\{\beta_2(w_{\perp,n} - w_n) + \beta_3(w_{\perp,n} - w_n)\} \quad (2)$$

ここで第一項 w_n は周期7の季節成分モデル[4~6]

$$\sum_{j=0}^6 w_{n-j} = v_{w,n}, \quad v_{w,n} \sim N(0, \tau_w^2) \quad (3)$$

によって表される曜日成分である. この項は週の基本パターンを表す. 文献[7~9]はスーパーマーケットにおける, 日次店頭スキャナデータを, 上記の基本パターン項, トレンド成分, 説明変数項に分解するモデルを構成し値引き販促活動と売上との関係について考察している. 第二項は当日が祝日かつ月～金曜だったときの効果(祝日効果)であり, $h_{1n} \in \{0, 1\}$ はそのindicator function (表2参照). $\beta_1(w_{\parallel,n} - w_n)$ は祝日の売上は日曜の売上パターンに似ているであろうという期待をモデル化したものであり, 直近の日曜の曜日成分 $w_{\parallel,n}$ および当日の曜日成分 w_n の差と類似度を示す係数 $0 \leq \beta_1 \leq 1$ との積で表される. もし $\beta_1 = 0$ ならば祝日の週周期成分は $W_n = w_n + 0$ となり平日の曜日成分で表される. 一方 $\beta_1 = 1$ ならば祝日の週周期成分は $W_n = w_n + (w_{\parallel,n} - w_n) = w_{\parallel,n}$ となり直近の日曜の曜日成分で表される. 第三項は祝日の前日の効果(祝前日効果)を示しており $h_{2n} \in \{0, 1\}$ はそのindicator function である (表2参照). $\{\beta_2(w_{\perp,n} - w_n)$

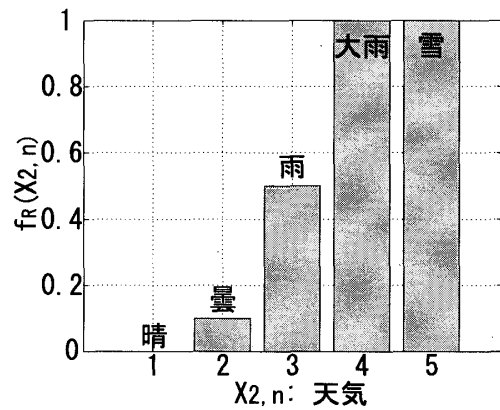


図1 $X_{2,n}$ vs $f_R(X_{2,n})$

$+ \beta_3(w_{\perp,n} - w_n)\}$ は, 祝日効果同様に祝前日の売上パターンは金曜および土曜の売上パターンに似ているであろうという期待をモデル化したものであり, 直近の金曜(土曜)の曜日成分 $w_{\perp,n}(w_{\perp,n})$ および当日の曜日成分との差と各曜日の祝前日効果への寄与度と類似度を示す係数 $0 \leq \beta_2, \beta_3 \leq 1$ の積で表される. ただし β_2, β_3 は $\beta_2 + \beta_3 \leq 1$ を満たす.

2.2 モデル: 雨効果

雨効果 R_n は天候による売上への影響をモデル化したものであり, 次式のものを仮定した.

$$R_n = \gamma_R f_R(X_{2,n}) \quad (4)$$

γ_R は金額を示す係数であり, $f_R(X_{2,n})$ は図1に示すように天候: $X_{2,n} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (晴, 曇, 雨, 大雨, 雪) によってその効果の大きさが変わることを示す関数である. この関数の形に特に根拠はない.

2.3 モデル: イベント効果

イベント効果 E_n は隣接する催事場で開催されるイベントへの人出 $X_{1,n}$ による効果をモデル化したものであり次式のようにするとした.

$$E_n = \alpha_{B,n} f_B(X_{1,n}) + I(f_B(X_{1,n}))(\alpha_w f_w(d_n) + h_{3n} \alpha_n) \quad (5)$$

第一項はイベントがある際の基本 (Basic) となる項であり予想平均入場者数 $X_{1,n}$ の非線形関数 $f_B(X_{1,n})$ と時変係数 $a_{B,n} = a_{B,n-1} + v_B$, $v_B \sim N(0, \tau_B^2)$ の積で表した。 $f_B(X_{1,n})$ はある閾値 X_{Eve} から効果が現れ、ある程度以上の人出では頭打ちになる様子をモデル化した次式で表した。

$$f_B(X_{1,n}) = \begin{cases} \frac{g(X_{1,n})}{\max\{g(X_{1,n})\}} & X_{1,n} \geq X_{Eve} \\ 0 & X_{1,n} < X_{Eve} \end{cases} \quad (6)$$

ただし、

$$g(X_{1,n}) = 1 - \exp\{-a(X_{1,n} - X_{Eve})\} \quad (7)$$

である (図2参照)。ここで注意を要するのは、予想平均入場者数 $X_{1,n}$ とはイベントごとに主催者側から発表される予想延べ入場者数を、イベントの期間で単純に割ったものであり (図3参照) 曜日や休日による入場者数の違いを反映していないことである。その効果は第二項以下で表される。

第二項中、 $I(\cdot)$ は階段関数であり、この項がイベント効果があるときに効いてくることを表す。 $I(\cdot)$ がかった括弧中第一項は曜日ごとにイベントへの客足が変わる効果を示す項であり (補正項第一項と呼

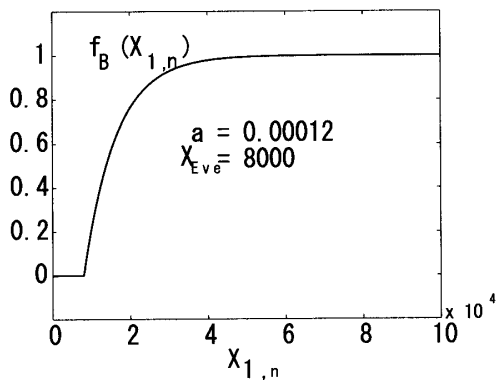


図2 $X_{1,n}$ vs $f_B(X_{1,n})$

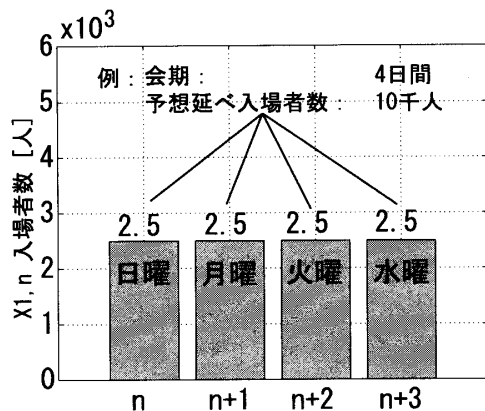


図3 予想平均入場者数 $X_{1,n}$ の例

ぶ), $f_w(d_n)$ は曜日: $d_n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ (日, 月, ..., 土) ごとの関数, a_w は定数係数である。括弧中第二項は、休日 (土, 日, 祝日) にイベントがあった際には、その他の日よりも売上がかさ上げされる効果を示している (補正項第二項と呼ぶ)。 a_h は定数項 (単位は金額), $h_{3n} \in \{0, 1\}$ は indicator function である (表2参照)。

ここで注意しておく、補正項第一項、第二項において土曜日、日曜日の補正が重複して行われている。これは後に節3.4で詳しく述べるが、モデルを段階的に構築していったことに由来する。まず休日は平日に比べて客の入りが増えるだろうと考えるのは自然であり、推定も困難ではないので休日のかさ上げ項 a_h (補正項第二項) を導入した。しかし上で述べたような $f_w(d_n)$ を、いきなり推定することは困難なので、この項を除いたモデルによって予測誤差を求め、その曜日ごとの平均値を平均的な客足の変動パターンとみなし、それを関数 $f_w(d_n)$ とした。そして、それに係数 a_w を乗じて補正項第一項とした。その結果、補正項第一項、第二項の両方において土日の補正が行われている。特記しておく、モデル化は段階的に行ったが後述の状態推定において最終的には全ての状態ベクトルに含まれる成分を同時に推定している。

2.4 モデル：状態空間表現

上記のモデルは状態ベクトルを

$$x_n = [x_{t,n}^t | x_{w,n}^t | x_{R,n}^t | x_{E,n}^t | x_{r,n}^t]^t \quad (8)$$

とすることにより、状態空間モデル [4, 5, 10]

$$x_n = F_n x_{n-1} + G_n v_n \quad [\text{システムモデル}] \quad (9)$$

$$y_n = H_n x_n + \varepsilon_n \quad [\text{観測モデル}] \quad (10)$$

で表現できる。ここで状態ベクトル中の $x_{t,n}$, $x_{w,n}$, $x_{R,n}$, $x_{E,n}$, $x_{r,n}$ はそれぞれ、トレンド成分、週周期成分、雨効果成分、イベント効果成分、ARモデル成分にかかわる部分ベクトルであり、それぞれ以下のように表される。

$$x_{t,n} = [t_n, t_{n-1}]^t \quad (11)$$

$$x_{w,n} = [w_n, w_{n-1}, w_{n-2}, w_{n-3}, w_{n-4}, w_{n-5}]^t \quad (12)$$

$$x_{R,n} = [\gamma_R] \quad (13)$$

$$x_{E,n} = [a_{B,n}, a_w, a_h]^t \quad (14)$$

$$x_{r,n} = [r_n, r_{n-1}]^t \quad (15)$$

注意しておく、状態ベクトルに含まれる γ_R , a_w , a_h はシステムノイズがなく、平滑化の結果として n に依存しない定数項となるものである。

状態遷移行列 F_n は次のような 14×14 行列である。

$$F_n = F = \begin{bmatrix} F_t & & & & \\ & F_w & & & \\ & & F_R & & \\ & & & F_E & \\ & & & & F_r \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここで F_t, F_w, F_R, F_E, F_r はそれぞれ、トレンド成分、週周期成分雨効果成分、イベント効果成分、AR モデル成分に対応する部分行列であり、以下のように表される。

$$F_t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$F_w = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$F_R = [1] \quad (19)$$

$$F_E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$F_r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

観測行列 H_n は、14次元横ベクトルであり、次のように表される。

$$H_n = [H_{t,n} | H_{w,n} | H_{R,n} | H_{E,n} | H_{r,n}] \quad (22)$$

横ベクトル $H_{t,n}, H_{w,n}, H_{R,n}, H_{E,n}, H_{r,n}$ はそれぞれ、トレンド成分、週周期成分雨効果成分、イベント効果成分、AR モデル成分に対応する観測行列である。

トレンド成分観測行列 $H_{t,n}$ 、雨成分観測行列 $H_{R,n}$ および AR モデル成分観測行列 $H_{r,n}$ は、それぞれ次のように表される。

$$H_{t,n} = H_t = [1 \ 0] \quad (23)$$

$$H_{R,n} = [f_R(X_{2,n})] \quad (24)$$

$$H_{r,n} = H_r = [1 \ 0] \quad (25)$$

またイベント効果成分観測行列 $H_{E,n}$ は、次のように表される。

$$H_{E,n} = [\zeta \ I(\zeta)f_w(d_n) \ I(\zeta)h_{3n}] \quad (26)$$

ただし、 $\zeta = f_B(X_{1,n})$ である。

週周期成分観測行列は $H_{w,n}$ は、indicator function $h_{1,n}, h_{2,n} \in \{0, 1\}$ の組み合わせにより次の三つの場合に分けられる (表2参照)。

1. 祝日、祝前日以外の日： $(h_{1,n}, h_{2,n}) = (0, 0)$

式(2)より $W_n = w_n$ である。ここで状態ベクトル x_n 中の週周期成分にかかわる部分ベクトル $x_{w,n}$ (式(12)) と、式(1), (10)より、

$$W_n = H_{w,n} x_{w,n} \quad (27)$$

となる。ゆえに $H_{w,n}$ は次のようになる。

$$H_{w,n} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (28)$$

2. 祝日： $(h_{1,n}, h_{2,n}) = (1, 0)$

式(2)より $W_n = (1 - \beta_1)w_n + \beta_1 w_{11,n}$ である。ここで直近の日曜の曜日成分 $w_{11,n}$ は $x_{w,n}$ の中に含まれるが、その位置は当日の曜日 d_n に応じて変わる (例：当日が月曜 ($d_n=2$) のとき、 $w_{11,n} = w_{n-1}$)。ゆえに式(27)より $H_{w,n}$ は次のようになる。

$$H_{w,n} = \begin{cases} [\kappa \ \beta_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], & \text{月 } (d_n=2) \\ [\kappa \ 0 \ \beta_1 \ 0 \ 0 \ 0], & \text{火 } (d_n=3) \\ [\kappa \ 0 \ 0 \ \beta_1 \ 0 \ 0], & \text{水 } (d_n=4) \\ [\kappa \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta_1 \ 0], & \text{木 } (d_n=5) \\ [\kappa \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta_1], & \text{金 } (d_n=6) \end{cases} \quad (29)$$

ここで $\kappa = 1 - \beta_1$ である。

3. 祝前日： $(h_{1,n}, h_{2,n}) = (0, 1)$

式(2)より $W_n = (1 - \beta_2 - \beta_3)w_n + \beta_2 w_{\text{金},n} + \beta_3 w_{\text{土},n}$ である。ここで直近の金曜土曜の曜日成分 $w_{\text{金},n}, w_{\text{土},n}$ は祝日の場合と同様に $x_{w,n}$ の中に含まれ、その位置が当日の曜日 d_n に応じて変わる (例：当日が月曜 ($d_n=2$) のとき、 $w_{\text{金},n} = w_{n-3}, w_{\text{土},n} = w_{n-2}$)。ただし当日が木曜 ($d_n=5$) のとき、直近の金曜の曜日成分は $w_{\text{金},n} = w_{n-6}$ となり $x_{w,n}$ の中に陽には含まれない。しかしながら、この場合、式(3)の季節成分モデルにより $x_{w,n}$ の成分を用いて $w_{\text{金},n} = -\sum_{j=0}^5 w_{n-j}$ として表現できる。ゆえに式(27)より $H_{w,n}$ は次のようになる。

$$H_{w,n} = \begin{cases} [\xi \ 0 \ \beta_3 \ \beta_2 \ 0 \ 0], & \text{月 } (d_n=2) \\ [\xi \ 0 \ 0 \ \beta_3 \ \beta_2 \ 0], & \text{火 } (d_n=3) \\ [\xi \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta_3 \ \beta_2], & \text{水 } (d_n=4) \\ [\chi \ \psi \ \psi \ \psi \ \psi \ \omega], & \text{木 } (d_n=5) \end{cases} \quad (30)$$

ここで $\xi = 1 - \beta_2 - \beta_3, \chi = 1 - 2\beta_2 - \beta_3, \psi = -\beta_2, \omega = \beta_3 - \beta_2$ である。

3. 分析結果

前節で構成したモデルは式(9), (10)のように状態空間モデルで表現できることから、カルマンフィルタおよび固定区間平滑化と呼ばれるアルゴリズムを用いて効率良く状態推定および時系列の分解を行うことができる (付録参照) [4, 5, 10~15]。以下では時系列 Y_t

$=\{y_1, \dots, y_j\}$ が与えられた下での状態 x_n の条件付き平均と分散共分散行列を

$$x_{n|j} \equiv E(x_n | Y_j) \quad (31)$$

$$V_{n|j} \equiv E[(x_n - x_{n|j})(x_n - x_{n|j})^t] \quad (32)$$

と表す。状態推定では、時刻 n での状態を推定する際に利用する時系列 Y_j の時刻 j と時刻 n の関係に応じて、それぞれ $j < n$ の場合は、予測 (prediction), $j = n$ の場合は、濾波 (filtering), $j > n$ の場合は、平滑化 (smoothing) と呼ばれる。

統計的モデルの良さはモデルの予測能力によって評価することができる。モデルの尤度は近似的にそのモデルの予測精度の良さを評価したものである。したがって、尤度を最大にすることにより近似的には予測能力を最大とするパラメータを求めることができる。長さ N の時系列 y_1, \dots, y_N が与えられたとき、パラメータ θ を持つモデルによって定まる y_1, \dots, y_N の N 次元同時密度関数を $f_N(y_1, \dots, y_N | \theta)$ とする。このときこのモデルの尤度は $L(\theta) = f_N(y_1, \dots, y_N | \theta)$ によって定義される。さらにこの尤度は条件付密度関数の積により $L(\theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n | y_1, \dots, y_{n-1}, \theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n | Y_{n-1}, \theta)$ と表現できる。ただし $Y_0 = \phi, f_1(y_1 | \theta) = p(y_1 | Y_0, \theta)$ とする。したがって、時系列モデルの対数尤度は

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n | Y_{n-1}, \theta) \quad (33)$$

によって与えられる。時系列モデルのパラメータの最尤推定値 $\hat{\theta}$ を求めるためには、数値的最適化の方法により、この対数尤度を最大にするパラメータを求めればよい[4]。また異なるモデルの優劣を評価するには AIC (赤池情報量基準)[16~18]を比較すればよい。

本研究のモデルはパラメータベクトル $\theta = [\sigma^2, \tau_w^2, \tau_b^2, \tau_r^2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, a_1, a_2]^t$ により規定される。以下、ランチの売上時系列に対してモデルを適用しグリッドサーチによりパラメータの最適化を行い、時系列を各成分に分解した結果を示す。ただし以下に示す推定値は断りのない限り平滑化によるもの ($x_{n|N}, V_{n|N}, N = 731$) である。なお、実際には θ から σ^2 を除いた部分ベクトルにおいて、分散パラメータ ($\tau_w^2, \tau_b^2, \tau_r^2$) を σ^2 で割った $\theta^* = [\tau_w^2/\sigma^2, \tau_b^2/\sigma^2, \tau_r^2/\sigma^2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, a_1, a_2]^t$ をパラメータベクトルとして最適化を行った。このことにより探索すべきパラメータの次元を一つだけ落とすことができる[4]。分散パラメータに対するグリッドサーチの範囲はそれぞれ $-5 \leq \log_{10}(\tau_w^2/\sigma^2) \leq -4, -5 \leq \log_{10}(\tau_b^2/\sigma^2) \leq -4, -4 \leq \log_{10}(\tau_r^2/\sigma^2) \leq 0, -4$

$\leq \log_{10}(\tau_r^2/\sigma^2) \leq 0$, 刻み幅 0.5 とした。 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ に対するグリッドサーチの範囲は 0 から 1 まで、刻み幅 0.2 とした。AR 係数 a_1, a_2 はモデルが定常性の条件を満たすように、偏自己相関係数 (PARCOR) が -1 から 1 となる範囲で選んだ。実際にはトレンド項との競合を避けるためその値の絶対値が 0.95 より小さくなるように設定した。

3.1 結果：トレンド成分

ランチの売上原系列 y_n および推定されたトレンド成分 t_n を図 4 に示す。図中トレンド成分が原系列に含まれる緩やかな長期的変動を表現していることが見てとれる。またカルマンフィルタおよび固定区間平滑化により欠測値の部分の推定も行われていることがわかる。図 5 は通年のトレンド成分の変動を年毎に図示したものである。これを見ると両年とも季節に応じてよく似た変動が見られる。また同時期の変動は 2001 年 (実線) の方が 2000 年 (点線) に比べて、年末の一時期を除き、高い位置にあり総じて売上業績が伸びていることがわかる。

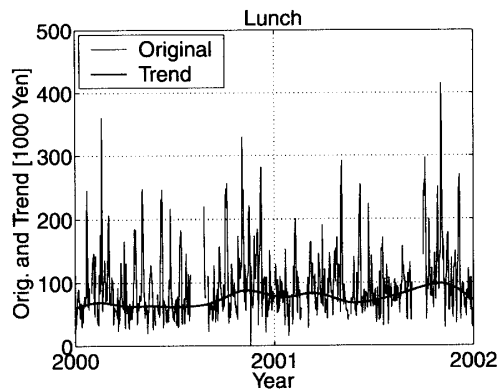


図 4 ランチ売上原系列 (細線) および t_n (太線)

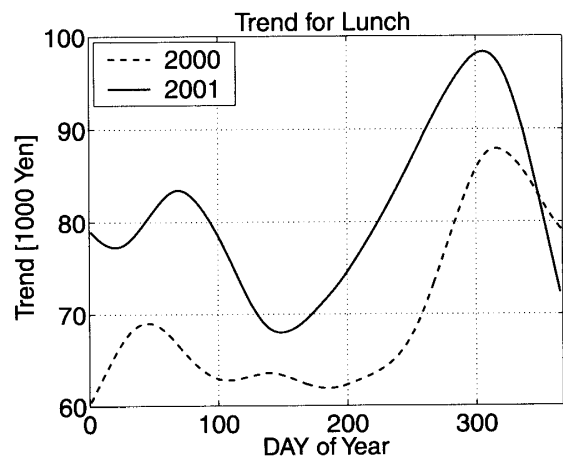


図 5 トレンジ成分通年変動：2000 年 (点線), 2001 年 (実線)

3.2 結果：週周期成分

週周期成分 W_n (式(2)参照) の成分は以下に示される。図6はランチの売上の曜日効果成分 w_n を曜日 d_n ごとに図示したものである。図中、週末に売上が下がり平日に売上が上がるというパターンが見られる。

当該飲食店がビジネス街に隣接していることを考慮に入れると、この結果から一週間のランチの売上の基本パターンが主にビジネス街に勤務する顧客層、つまり土曜、日曜には出勤のない人々の動向により担われていると類推できる。図7は祝日効果 $h_{1n}\beta_1(w_{11,n} - w_n)$ および祝前日効果 $h_{2n}\{\beta_2(w_{2n,n} - w_n) + \beta_3(w_{1,n} - w_n)\}$ を図示したものである。このときグリッドサーチによる $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ の最尤推定値はそれぞれ1.0, 0, 0.4である。このことは祝日効果を含んだ週効果が式(2)から $W_n^{\text{H}} = w_{11,n}$ となり、直近の日曜日の売上のパターンで説明されることを意味している。一方、祝前日効果を含む週効果は同様に式(2)から $W_n^{\text{H+P}} = 0.6w_n + 0.4w_{1,n}$ となる。図6を見ると $w_{11,n}, w_{1,n}$ は共に負の値をとることから、祝日、祝前日の週効果項は、普段の日の週効果項に比べて値が小さくなることがわか

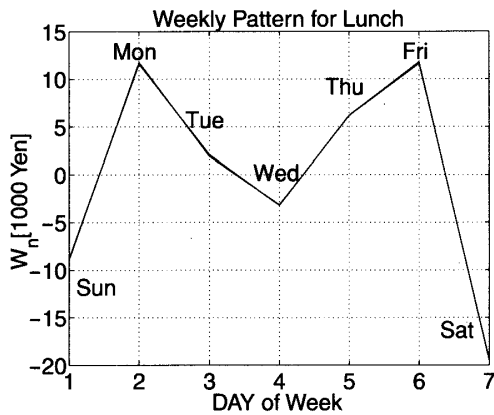


図6 曜日効果： w_n (ランチ)

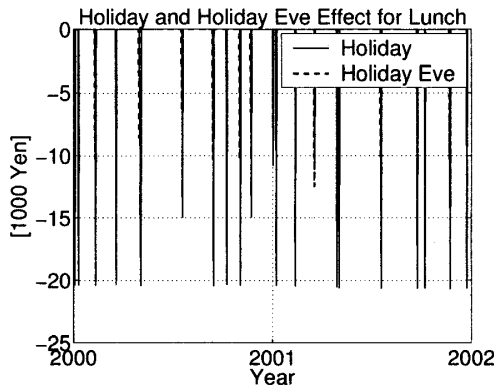


図7 祝日効果, 祝前日効果： $h_{1n}\beta_1(w_{11,n} - w_n)$, $h_{2n}\{\beta_2(w_{2n,n} - w_n) + \beta_3(w_{1,n} - w_n)\}$, (ランチ)

る。

3.3 結果：雨効果

雨効果項 $R_n = \gamma_R f_R(X_{2,n})$ は $0 \leq f_R(X_{2,n}) \leq 1$ であることから、状態ベクトルに含まれる γ_R が正の値をとるか負の値をとるか意味合いが変わってくる。正の値をとる場合は天候が悪いと客足が付き、一方負の場合は天候が悪いと客足が遠のくことを意味する。ランチの場合の雨効果 R_n を図8に示す。平滑化の結果、定数係数 $\gamma_R = 11.3013$ となり R_n は正の値をとる。つまり天候が悪いと売上が伸びることを意味する。このことは当該飲食店がビジネス街と催事場と屋根つきの通路で結ばれているという立地条件にあるため、天候の悪い日には近場で昼食をすませてもらおうという顧客の心理を反映していると推測される。

3.4 結果：イベント効果

図9(a), (b)は、それぞれイベント効果 $E_n = \alpha_{B,n} f_B(X_{1,n}) + I(f_B(X_{1,n}))(\alpha_{wf} w(d_n) + h_{3n} a_h)$ の第一項 $\alpha_{B,n} f_B(X_{1,n})$ および、その係数部分 $\alpha_{B,n}$ を図示したものである。第一項は節2で述べたように、イベント効

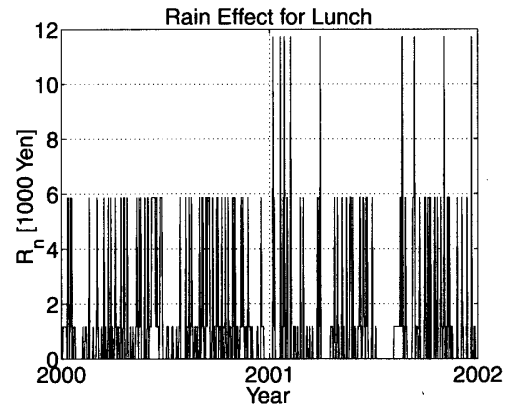


図8 雨効果： $R_n = \gamma_R f_R(X_{2,n})$

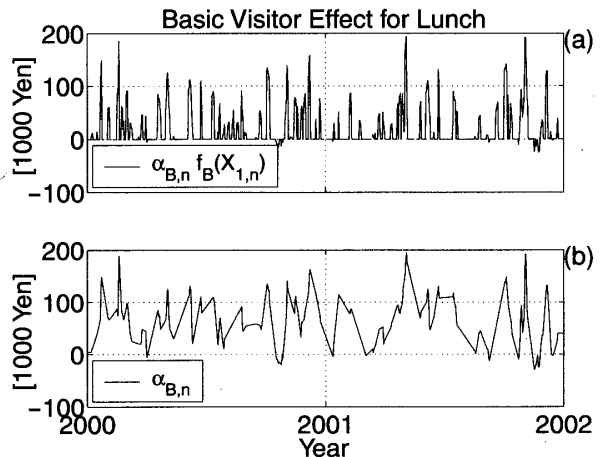


図9 (a) $\alpha_{B,n} f_B(X_{1,n})$ and (b) $\alpha_{B,n}$

果の基本的な部分を担うものである。これを見るとその値は週周期成分、雨効果成分に比して大きく、売上のかなりの部分を説明していることがわかる。このことから当該飲食店がベースとしてビジネス街の食堂という側面を持つ一方、イベントへの人出という外生効果により大きく売上が左右される催事場隣接の飲食店という側面を持つということを確認することができる。

第二項中、 $\alpha_w f_w(d_n)$ は節 2.3 でも述べたように、イベント効果の曜日ごと ($d_n \in \{1, \dots, 7\}$) の補正項である。補整項関数 $f_w(d_n)$ は、あらかじめ式(1)から、補正項を除いたモデル

$$y_n = t_n + W_n + R_n + E'_n + r_n + e'_n \quad (34)$$

を構成し、そのモデルで計算される予測誤差系列 $e'_{n|n-1}$ の曜日ごとの分布に含まれるバイアスから求める。ここで $E'_n = \alpha_{B,n} f_B(X_{1,n}) + I(f_B(X_{1,n})) h_{3n} \alpha_h$ である。上記のバイアスは、具体的には、予測誤差系列 $e'_{n|n-1}$ からイベント効果がある日 ($I(f_B(X_{1,n}))=1$) の値を抽出し、曜日ごとに平均をとった値である。補整項関数 $f_w(d_n)$ は対応する曜日ごとにそのバイアスの値をとる。その後、補整項 $\alpha_w f_w(d_n)$ を取り入れた、式(1)を構成し、あらためて式(8)の全状態ベクトルの推定を行う。この項を導入することにより尤度が 11.5764 上昇し (AIC は 21.1528 減少) 予測精度の向上に寄与していることがわかる。またこのことから、曜日により入場者数に偏りがあることがあらためてわかる。第二項中、 α_h は休日 (土、日、祝日) にイベントがあった際には、その他の日よりも売上がかさ上げされる効果を示している。平滑化の結果その値は正の値 ($\alpha_h = 11.7293$) となり、休日にイベントがあった場合は、平日のイベントの場合と比べて売上が伸びるという常識に沿った結果を得る。

3.5 結果：AR モデル項

定常 2 次 AR モデル項 r_n を図 10 に示す。この項

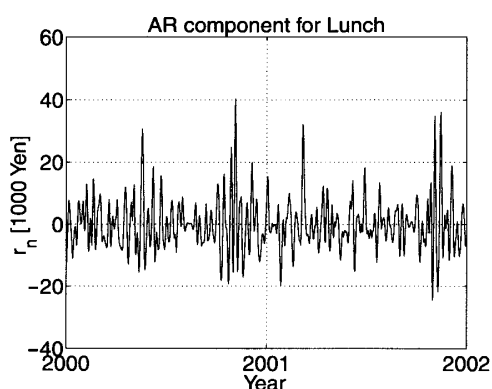


図 10 定常 2 次 AR 成分 r_n

は短期的な変動を担っている。またイベント効果項が大きな値をとるときに大きな値を示していることから、イベント効果で表現しきれなかった部分も補っていると考えられる。

4. 考察

モデルの予測性能は、予測誤差成分 $\epsilon_{n|n-1} = y_n - H_n x_{n|n-1}$ の分布により評価することができる。図 11 (a), (b) はそれぞれ、イベント効果がない日 ($I(f_B(X_{1,n}))=0$)、およびイベント効果がある日 ($I(f_B(X_{1,n}))=1$) の予測誤差頻度分布を图示したものである。イベント効果のない日は予測誤差が標準偏差 25.699 千円程度に抑えられている。一方、イベント効果がある日の予測誤差は標準偏差 62.673 千円とかなり大きくなっている。

この結果から、モデルの予測能力を向上させるためには、まずイベント効果項の改良が考えられる。式(5)を参照すると、イベント効果の基本項はイベントへの予想平均入場者数 ($X_{1,n}$) により特徴付けられている。その中ではイベントの種類による来場者の質や行動の違いはないものとして取り扱われている。しかし、実際には当然ながらイベントの内容や、イベントの会場と飲食店の位置関係により顧客の行動が異なってくる。予測誤差の大きい日のイベントとして、例えば子供向けのイベントやある種の物産展などが挙げられる。前者は当該飲食店のメニューや外観が、年齢がやや高めの顧客層向けに設定されているため、親子連れには利

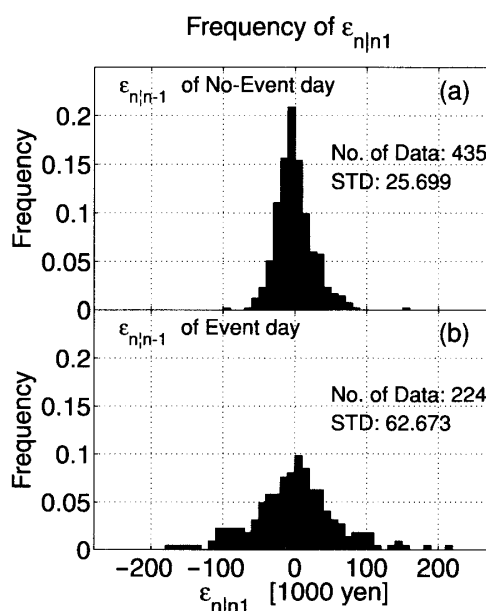


図 11 予測残差成分 ($\epsilon_{n|n-1}$) 頻度分布, (a) イベント効果がない日, (b) イベント効果がある日

用しづらく、イベントへの予想入場者数の割りに売上が伸びないと考えられる。後者では、食物を扱うような物産展においては、試食品コーナーや弁当販売があり、催事場に隣接しつつも、ややビジネス街よりにある当該飲食店まで顧客が足を運ばないことが、売上が伸びない理由として考えられる。そこでイベントの種類ごとに、異なる補整項を導入するなどの方策が考えられる。

極端には、過去の同じイベントでの実績を、いわゆる case-based に、参照すればよい。しかしながら、それではモデルが当該店舗のみに特化したものとなり、一般性が失われてしまう。そのような一般性は例えば新規出店計画立案の際に重要になってくる。そこで、ある程度一般性を持たせつつイベントの種類による違いを表現できるようなモデルを構築する必要がある。具体的には、イベントを内容や開催時間、会場によって分類し、その類型ごとに適応するモデルを切り替えることなどが考えられる。それは今後の課題である。

ところで以上のように考察したモデルの改良点は、誤差項つまりモデルで説明しきれない効果を詳細に調べることにより初めて明らかになったことである。つまり誤差項を考察することによりイベントに来る顧客の動向等を類推することができた。このようにして抽出された情報や知見は情報量規準の評価を通して適切に新たなモデルに反映させることができる。また、さらにそのモデルから得られた情報を次のモデルに反映させる、という作業を繰り返すことにより、永続的なモデルの発展と新たな知識の抽出を望むことができる [19, 20]。

5. むすび

本研究では、飲食店の日々の売上時系列を、曜日、祝日、天気、近所での催し物への人出などの各要因に分解するモデルを提案し、実際に、ある大規模催事場およびビジネス街に隣接した飲食店の売上データに適用した。その結果、トレンド効果項、週効果項、雨効果項、イベント効果項、定常2次AR成分および、残差項を得た。各項を詳細に検討することによりそれぞれ背景にある合理的な理由の存在を考察することができた。また状態空間表現と情報量規準による評価という枠組みを用いることにより今まで現場の勘というものではしか語るることのできなかつたような効果(例: 祝日効果)をも積極的かつ柔軟にモデルに取り入れ、それらを定量的かつ合理的に推定することが可能であ

ることを確認した。同様にその枠組み内で残差項を分析することにより、新たな知識の発見とモデルの永続的な改良が可能であることを考察した。

提案したモデルの実装として、個人経営等の単体店舗向けには表計算ソフトへのアドインプログラムが考えられる。そのソフトに各店舗の日々の売上や天気予報などの情報を入力することにより翌日の売上が動的に予測する。その結果は仕入計画等に役立てることができる。また推定された各項から得られる知見(例: 週効果のパターン)は、実データに基づいた、その店固有の情報である。それらを販促等に利用することにより、より対象を明確にしたマーケティング、つまりマスマーケティングではなくマイクロマーケティングを行うことが可能である。一方フランチャイズチェーン向けにはウェブベースのソフトウェア化が考えられる。それにより、例えば本部で各加盟店の売上のトレンドを比較することにより業績評価等を行うことができる。また新規出店の際に立地の似た店舗の売上のパターンを用いて売上のシミュレート等も可能であると考えられる。今後はモデルの改良をすすめ以上提案した実装の実現を急ぎたいと考えている。

6. 付録：カルマンフィルタおよび固定区間平滑化アルゴリズム

以下の2式で表される状態空間モデルを考える。

$$x_n = F_n x_{n-1} + G_n q_n \quad (35)$$

$$y_n = H_n x_n + u_n \quad (36)$$

式(35), (36)はそれぞれシステムモデルおよび観測モデルと呼ばれる。また q_n, u_n はそれぞれガウス分布 $N(0, Q_n), N(0, U_n)$ に従う白色雑音であり、システムノイズおよび観測ノイズと呼ばれる。状態空間モデルに関連して重要な問題は、式(31), (32)の状態 x_n の条件付き平均と分散共分散行列を求めることである。上記の状態空間モデルに対しては、それらを求めるためにカルマンフィルタ (Kalman filter) [21] と呼ばれる逐次的な計算アルゴリズムが存在する。ただしカルマンフィルタで直接取り扱うのは $j=n-1$ (一期先予測) の場合と $j=n$ (フィルタ) の場合である。次のアルゴリズムが示すように一期先予測およびフィルタを交互に繰り返すことにより、これらを順次求めることができる [4]。

「一期先予測」

$$x_{n|n-1} = F_n x_{n-1|n-1}$$

$$V_{n|n-1} = F_n V_{n-1|n-1} F_n^t + G_n Q_n G_n^t \quad (37)$$

「フィルタ」

$$\begin{aligned}K_n &= V_{n|n-1} H_n^t (H_n V_{n|n-1} H_n^t + U_n)^{-1} \\x_{n|n} &= x_{n|n-1} + K_n (y_n - H_n x_{n|n-1}) \\V_{n|n} &= V_{n|n-1} - K_n H_n V_{n|n-1}\end{aligned}\quad (38)$$

ここで K_n はカルマンゲインと呼ばれる。

平滑化の問題は時系列 $Y_N = \{y_1, \dots, y_N\}$ が与えられたとき途中の状態 x_n を推定する問題である。この場合も固定区間平滑化と呼ばれる次のアルゴリズムが存在する。

「固定区間平滑化」

$$\begin{aligned}A_n &= V_{n|n} F_{n+1}^t V_{n+1|n}^{-1} \\x_{n|N} &= x_{n|n} + A_n (x_{n+1|N} - x_{n+1|n}) \\V_{n|N} &= V_{n|n} + A_n (V_{n+1|N} - V_{n+1|n}) A_n^t\end{aligned}\quad (39)$$

以上のように平滑化のアルゴリズムではカルマンフィルタの結果、すなわち $x_{n|n-1}$, $x_{n|n}$, $V_{n|n-1}$, $V_{n|n}$ が利用される。したがって、平滑化を行うためには、まずカルマンフィルタによって $\{x_{n|n-1}, x_{n|n}, V_{n|n-1}, V_{n|n}\}$ ($n=1, \dots, N$) を求めた後、式(39)のアルゴリズムによって $x_{N-1|N}$, $V_{N-1|N}$ から順に時間的に逆方向に $x_{1|N}$, $V_{1|N}$ まで求めればよい[4]。

それぞれのアルゴリズムの導出に関しては、文献[4, 11~13]等を参照されたい。

謝辞 本研究の一部は、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「機能数理学の構築と展開」(九州大学大学院数理学府)、並びに日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(A) (14208025) からの援助による。

参考文献

[1] 矢田勝彦, 加藤直樹, 羽室行信: “発見科学とデータマイニング”, 顧客の購買履歴からのデータマイニング, bit 別冊, 共立出版, pp. 169-178, 2000.
[2] 恩藏直人: “マス・マーケティングとマイクロ・マーケティング~市場細分化の考え方~”, 環境マーケティングビジネス, p. 110, 2003.
[3] 社団法人日本フードサービス協会: 最近の外食産業の動向, <http://www.jfnet.or.jp/data.htm>
[4] 北川源四郎: FORTRAN 77 時系列解析プログラミング, 岩波コンピュータサイエンス, 岩波書店, 1993.
[5] G. Kitagawa and W. Gersch: “A smoothness priors-state space modeling of time series with trend and seasonality”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 79, No. 386, pp. 378-89, 1984.

[6] 北川源四郎: “時系列の分解—プログラム DECOMP の紹介—”, 統計数理, Vol. 34, No. 2, pp. 256-270, 1986.
[7] 近藤文代: “デイリー POS データにおける曜日変動および値下げ効果の抽出”, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 44, No. 3, pp. 154-163, 1999.
[8] F. N. Kondo and G. Kitagawa: “Time series analysis of daily scanner sales: extraction of trend, day-of-the-week effect and price promotion effect”, *Marketing Intelligence & Planning*, Vol. 18, No. 2, pp. 53-66, 2000.
[9] H. Kitagawa, T. Higuchi, and F. N. Kondo: “Smoothness prior approach to explore mean structure in large-scale time series”, *Theoretical Computer Science*, No. 292, pp. 431-446, 2003.
[10] G. Kitagawa and W. Gersch: *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, Springer-Verlag, New York, 1996.
[11] 廣田薫, 生駒哲一: 確率過程の数理, 数理工学基礎シリーズ, 第 4 巻, 朝倉書店, 2001.
[12] 片山徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
[13] 片山徹: 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 2000.
[14] A. C. Harvey: *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, New York, 1989.
[15] M. West and J. Harrison: *Baysian Forecasting and Dynamic Models*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
[16] H. Akaike: “A new look at the statistical model identification”, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-19, pp. 716-723, 1974.
[17] 坂元慶行, 石黒真木男, 北川源四郎: 情報量統計学, 共立出版, 東京, 1983.
[18] Y. Sakamoto, M. Ishiguro, and G. Kitagawa: Akaike Information Criterion statistics: “Mathematics and its application”, *D. Reidel, Norwell, Mass.*, 1986.
[19] 北川源四郎, 樋口知之: “予測とモデル”, 数理科学, No. 423, pp. 11-18, 1998.
[20] 北川源四郎, 樋口知之: “発見科学とデータマイニング”, 知識発見と自己組織型の統計モデル, bit 別冊, 共立出版, pp. 159-168, 2000.
[21] R. E. Kalman: “A new approach to linear. filtering and prediction problems”, *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., J. Basic Engineering*, Vol. 82, pp. 35-45, 1960.