

# モデリング考

伊理 正夫

## 1. はじめに

この原稿執筆の依頼を受けて、本学会が創立40周年事業の一つとして編集・発行した“OR事典2000”(2001年5月1日, 第2版)を眺め直してみた。学会の総力を挙げて作ったものだけに、この作業に関わられた編集委員長の故水野幸男元会長, 編集幹事(補佐), 用語編, 基礎編, 事例編, 資料編の編集委員, 執筆者の方々の気合が滲み出ていて, 文字通りの“大作”であるとの感を新たにした。この事典の旧版が1975年に刊行されたときにも故森口繁一先生の着想と指導力に感嘆したものだったが, それから四半世紀の間のIT関連技術の目覚ましい進歩も取り入れた今回の新版は素晴らしいという他はない(この間, 森村英典先生が主導された“事例編”の追補の事業のことも忘れてはならない)。CD-ROM1枚で軽々と持ち運ぶことができ, 検索やジャンプが滑らかに可能なのは, 事典を使う上で大変助かる…そんなことは内容の本質には関係ないという固陋な人はもう居るまい。

そこで本稿の主題であるモデルあるいはモデリングという単語を含む用語編の目次項目を数えてみると104もあった。基礎編, 事例編, 資料編にもモデル, モデリングという言葉は目白押しである。OR全体がモデリングの学, モデリングの術ではないかと思えるくらいである。また実際そう言っても大きな誤りではなからう。

であるとすれば, モデルについてすべてを論ずることなど筆者にはとてもできることではないので, 本稿では, 筆者が日頃から個人的に抱いている“モデル”に関するやや斜に構えた感想・意見を述べるだけにさせていただきます。

## 2. モデリングという言葉

米語で modeling, 英語で modelling というこの言いり まさお  
東京大学 名誉教授

葉は, 時代によってまた国によって, 意味が一定していたわけではない。次第に意味は一般化されてきているようであるし, model あるいは modelling にびったり相当する言葉のないところもある。日本語でも一時“模型”と言おうという動きもあったようであるが, やはり片仮名言葉優勢の流れには抗し切れなかった。ロシア語では modelling に形としてはびったり対応する“моделирование”がどちらかという英語の simulation (日本語ではこれも“シミュレーション”と片仮名用語がキマリで, もう“模擬実験”などは古語になっている; くれぐれも“シュミレーション”というような間違いはしないようにとの先輩からの御注意を後輩に伝えるのも筆者の務めか) のような意味に使われることが多いようである。

よく考えると, モデリングはもう少し普通の言葉である“定式化(formulation)”とかなり意味の近い類義語である。実際, OR事典2000の中にも単にいくつかの数式が書いてあるだけの“…モデル”という項目がたくさんある。

## 3. モデルは多様

モデルにはいろいろなものがあるので, それを分類するのは不可能であるが, 敢えてそれを試みるためにモデルに付く形容句によって, 分類のためのいくつかの視点を挙げてみる。(“モデル”の部分は省略)。

- a. 確率(stochastic あるいは probabilistic), 決定論的(deterministic)。
- b. 線形(linear), 非線形(nonlinear)。
- c. 連続(continuous), 離散(discrete)。
- d. 静的(static), 動的(dynamic)。
- e. 現象的(phenomenal), 実体的(noumenal), 構造的(structural)。
- f. 規範的(normative), 記述的(descriptive)。
- g. 大域, 局所, 地域, 世界, 地球, ……
- h. エネルギー, 環境, 汚染, 経済, 人口, ……
- i. 重力(gravity), エントロピー(entropy),

.....

j. 固有名詞 (人名, 地名, 等々)

#### 4. モデルは物の見方

森口先生は、一時、「モデル人間とデータ人間」という対比を好んで用いられていた。ありとあらゆる大量のデータを揃えて、それに基づいて論を立てる人たちを“データ人間”と呼び、伝統的にはそのような議論のしかたが主流であったことは確かだが、それだけで本当に何か分かったことになるのであろうかという疑問を呈された。つまり、「これこれしかじかのデータはこのように見ればこのようなことが分かる。」ということが大切なので、その“物の見方”をモデルという形で積極的に強調した議論をすべきであるとおっしゃっていた。特にORにおいてはそのような“モデル人間”が増えなければならないとも。

モデルは模型と言われることもあるように、現実そのものではなく、そこに内在する本質 (の一部) をいくらか単純化して取り出したものである。単純化して取り出すことを英語 (<ラテン語) では abstract (抽象) という。取り出さなかったものは捨てられる、すなわち捨象される (和英辞典では抽象も捨象もいずれも abstraction となっていることから知られるように、抽象も捨象も同じことなのである)。

抽象・捨象はそれに関わる人の主観的な行為である。したがって、モデル作りをしたりモデルを使って何かをするときには、大袈裟に言えばその人の世界観が問われていることになるのではなからうか。

#### 5. モデルと数理と物理と

モデルとは「それに依って考えるもの」であるから別に“数学”を使わなければならないということはない。まして“複雑な数式”を使わなければならないということなど決してない。しかし、ともするとそういうことになりがちではある。「抽象的に考える」とことと「数学的に考える」とことは確かに“紙一重”ではある。せめて「数理的に考える」とことくらいにしておきたい (いやそうすべきなのかもしれない)。

世の中には数学より物理の方が好きな人もいる。そのような人たちにとっては「物理的に考える」のも一つの考え方であろう (両方ともきちんと考えるのはかなりしんどいので、筆者にはどちらでも同じようなものであるが)。また、伝統ある工学分野の電気工学や機械工学 (これらも“物理帝国主義者”と呼ばれる人

から見ると物理の一種であるということになるらしいが) などには分野ごとに特有の考え方がある。例えば電気工学では「森羅万象みな等価回路で表して回路的に考える」のが最も分かりやすいとされている。これは、何でもかんでも電気回路モデルを使って考えるということになるだろうか。

モデルは現実の問題の本質をある視点から抽象した“模型”であるとしても、具体的な形には“類同 (analogy)” (同型といってもよいか) の範囲でいろいろなものがありうるということである。

#### 6. モデルの普遍性, 不変性, 頑健性

ただ一つの特定の対象にしか適用できないようなものはモデルとはいえない。つまり、モデルは普遍性を持っていなければならない。これについてはどなたも異論はないであろう。

ところで、「モデルは不変性を備えていなければならない」ということについてはそれほど多くの人が注意を払っていないのではないかと懸念する。つまり、モデルの構成に必要なデータを集めるときには常にいくらかの恣意性が含まれているものであるが、その恣意性によって結果が大きく異なるようでは正しいモデルとは言えないということである。一番簡単な例を挙げよう。

ORにもよく現れる重力モデルを例にとってみよう。人口が  $m_1, m_2, \dots, m_N$  の  $N$  個の都市があり各都市間の距離が  $d_{ij}$  であるとする。このとき2都市間の交通量  $p_{ij}$  は  $p_{ij} = c \frac{m_i m_j}{(d_{ij})^2}$  で与えられる (ただし  $c$  は定数) というのが重力モデルの基本形である。このモデルには  $i=j$  のときに  $d_{ij}$  や  $p_{ij}$  をどうするのかという問題もあるが、まずは“分割・併合に関する不変性”について考える。このモデルを何かに適用して“結構良く合う”というので、さらに良く合うように二つのパラメタ  $\alpha, \beta$  を導入して“一般化された重力モデル”  $p_{ij} = c \frac{(m_i)^\alpha (m_j)^\alpha}{(d_{ij})^\beta}$  を使いたいという誘惑に駆られるのは自然であろう。しかし、都市という区切りは市町村合併でも分かるようになりにかなり恣意的なものである。そこで、その代わりに“メッシュ”を使うほうが良いとも考えられるが、メッシュの場合でもどの大きさのものを選ぶかはかなり勝手であり、最近のようにメッシュの区切り線である緯線・経線もその定義が変わったりする。いま、都市1と都市2をそれぞれ1', 1"と

2', 2'' に二分してみる。当然，人口については  $m_1 := m_{1'} + m_{1''}$ ,  $m_2 := m_{2'} + m_{2''}$ , となっているはずである。また簡単のため  $d_{1'2'} = d_{1'2''} = d_{1''2'} = d_{1''2''} = d_{12}$  としておく。交通量は  $p_{12} = p_{1'2'} + p_{1'2''} + p_{1''2'} + p_{1''2''}$  でなければならない。そのためには  $\alpha=1$  でなければならないことは明らかである。すなわち，この場合モデルの分子に関する限り不変性の観点から“一般化”は不可能である。分母の  $(d_{ij})^2$  や  $(d_{ij})^{\beta}$  は実はもっと悩ましい。 $(d_{ij})^2$  の肩の 2 が“重力モデル”の名の由来であろうが，これはむしろ，2 次元的に人口が一様に広く分布している場合「 $\beta > 2$  だと  $d_{ij}$  が小さいときに  $p_{ij}$  が発散し」，「 $\beta < 2$  だと  $d_{ij}$  が大きいときに  $p_{ij}$  が発散する」ので，その中間を取って  $\beta=2$  としたのだとも考えられる（ $\beta=2$  だと， $d_{ij}$  が小さいときにも大きいときにも発散するけれど，どちらもそんなにひどくはないので適当にごまかせるということか）。

もう一つの不変性の観点は，一種の次元解析的なセンスである。例えば，東京都の各区の，年間犯罪発生数を線形回帰分析によりいくつかの要因で説明しようとするとき，区の昼間人口，夜間人口，建物数，総面積，等々の要因ではあまりよく説明できなかつた。そこで，区民一人当たりの平均収入を説明変数に加えてみたら，格段によく合うようになった。というようなことがあったとしよう。「合ったのだから良いではないか」と喜ぶ人もいるかもしれないが，そうはいかない。ある区を等質に二等分したと想定してみよう。平均収入以外の変数はみな半分になるが，平均収入だけは変わらない。こんなモデルはいくら合ったからといってとても受け入れられるものではない…少なくとも筆者には。

モデルに含まれる各種のパラメタの中には適当にいい加減な値を与えておけばよいものと，非常に慎重に選ばないと分析結果に大きな影響が出るものがある。別の言い方をするとパラメタの感度分析が大切である。このことは事前に理論的に行うのでもよいし，パラメタをいろいろと動かして実験的に行うのでもよいが，それがきちんとなされていないと何かが分かったことにはならないであろう。

## 7. モデルの誤用

言うまでもないことであるが，現象的モデル（実験式や統計的モデルなど；投入産出分析などもこの類）は使い方に注意がいる。いくつかの量の間で定量的な関係があるからといってそれらの量の間で因果関係が

あるとは限らないからである。「インフレにすれば所得が上がる」など，ばねに加える力とばねの伸びのように因果とは別に関係のあるものもある。しかし，低速の輸送機の主翼面積  $S$ ，積荷も含めた輸送機の総重量  $W$ ，飛行速度  $v$  の間には，ある単純化されたモデルによれば， $C$  をある比例定数として  $v^2 = CW/S$  という関係があるという。これを，「翼面積  $S$  の飛行機を速度  $v$  で飛ばそうと思ったら総重量  $W$  が  $v^2 S/C$  になるように荷を積みよばい」と読んではいけない。 $v^2 = CW/S$  は「速度が  $v$  だと翼面荷重  $W/S$  は  $v^2/C$  までしか取れない」とか「翼面積  $S$  で総重量  $W$  を支えるには少なくとも速度  $v = \sqrt{CW/S}$  で飛ばなければならない」と読むべきものである。

この種の誤用を防ぐようなモデル記述言語もないわけではないが，式の書きっぱなしではなく日常言語でモデルの使い方を親切に記述するのがよからう。

## 8. モデルの妥当性，検証

モデルは所詮主観的なものである，とはいっても，それは独善的であってよい，あるいは他人に対して説得力がなくてもよいということではあるまい。モデルにはその適用対象と適用の目的とがあるわけであるから，その目的に適ったものでなくてはならない。それをモデルの“妥当性 (adequacy, validity)”といい，妥当性を示すことをモデルの“検証 (validation)”という。

検証の責任は誰にあるのかということ，筆者は時々考える。誤解を恐れずに言えば，モデルの妥当性の検証の責任はモデルの提案者，使用者にある。「私は今までにない良いモデルを考えついた。多くの人がこれを使ってその有効性を確認してほしい。」とか「先生にこのモデルを使えと言われたので，それを使って修士論文を書きました。」とかいうのは，何か変ではないであろうか。実際，世の中にはとても検証不可能としか思えないモデルも多数ある。その検証方法まで含んだモデルであって初めて完成したモデルといえるのではないか。新しいモデルを提案するときには，その検証方法まで含めて提案すべきであるし，モデルはその選択と使用法が最も大切なのであって，そこをしっかりと考えなければ修士の学生だか単なるコンピュータだか分からない。

## 9. 現実に忠実なモデルとモデルに忠実な現実と

モデルは簡単なものの方がよいとはいっても、あまり現実離れしたものでも困る、というときには「モデルをなるべく現実に近づける」という意図を我々は持つ。

しかし、工学や物理の分野では「現実をなるべくモデルに近づける」ということも行われる。電気工学な

どで“集中定数系”という概念が生まれるとなるべく“電磁場”を通しての干渉が少ないような素子、回路を作ろうとの努力が始まる。“二値システム”というモデルの性質を調べているうちに「それに忠実な現実を作ってしまう」ということになる、等々。

ただ、このモデルと現実との関係は、そして上に長々と述べてきたことから全体も、人間が関係してくる社会・経済システムについては難しい。