

OR モデルと経済学モデル

今野 浩

40年間のOR人生で、筆者が最も衝撃を受けた数理モデルはCAPM (capital asset pricing model) である。“腰を抜かす”ほど驚いたといってもあながち誇張ではない。

これはマーコビッツの「平均・分散モデル」を下敷きとした経済学モデルで、このモデルの登場によって、ファイナンス理論はOR (もしくは工学) としてではなく、経済学の一分野として発展することになった。

ORの世界の住民であれば、10人中6人は平均・分散モデルをご存知だろう。しかしCAPMを知っている人は、たかだか1人か2人ではないだろうか。エンジニアが生み出した実務モデルを、頭の良い経済学者たちが換骨奪胎して作り上げ、“実務家を煙に巻いた”モデルである。ORモデルと経済モデルの違いをこれほどよく表わしたものはない。

マーコビッツの平均・分散モデルは、もともとは各々の投資家にとって最も望ましい投資比率ベクトル (ポートフォリオ) を求めるための、実務モデルとして考案された。

いま市場に n 種の資産 S_1, S_2, \dots, S_n があるものとし、それらの収益率を R_1, R_2, \dots, R_n とする。各資産への投資比率ベクトルを $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ とすると、平均・分散モデルは

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最小化} \quad V[R(x)] \\ \text{条件} \quad E[R(x)] = \rho \\ \quad \quad x \in X, \end{array} \right. \quad (1)$$

と定義することができる。 $E[R(x)]$, $V[R(x)]$ は、それぞれポートフォリオ x の収益率 $R(x)$ の期待値と分散、 ρ はある定数、そして X は投資可能集合と呼ばれる集合である。最も基本的なケースは

$$X = \{x=(x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_j = 1, x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

で与えられる場合である。

ところがこのモデルが生まれた時代には、実用的な

問題、例えば $n \geq 1000$ の問題を解くことはできなかった (今なら n が10万でも容易に解くことができる)。答が求まらなければ、モデルは絵に描いた餅である。

60年代のORモデルの多くは、この意味では絵に描いた壮大な餅だった。絵に描いたモチを食べるために、経済学者シャープは大胆な調理を施した (この工夫で、シャープはマーコビッツとともにノーベル経済学賞を受賞した)。

第1の工夫は、無リスク資産なる資産を導入することである。これは収益率がつねに一定値 r_0 をとる資産で、倒産の心配がない短期国債などがこれに当てはまるとされている。

第2の工夫は、変数の非負条件を取り外して、すべての資産を負の量だけ持つこと (空売り) を許したことである。こうすれば問題は著しく簡単になる。この結果得られる結論が、次に示すCAPMの2大定理である。

定理1. 平均・分散モデルにもとづいて投資決定を行うすべての投資家は、市場平均ポートフォリオと無リスク資産のみに投資するのがベストである。

定理2. 各銘柄の期待収益率 r_j と市場平均ポートフォリオの期待収益率 r_M との間には、

$$r_j - r_0 = \beta_j (r_M - r_0), \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

という関係が成立する。ここで「ベータ値」 β_j は

$$\beta_j = \text{cov}(R_j, R_M) / \text{var}[R_M], \quad (4)$$

で定義される定数である。

これらの定理の証明は極めて簡単である。ラグランジュの未定乗数法と統計学の入口さえ知っていれば十分である (詳しいことを知りたい読者は、例えば文献 [1]などを参照していただきたい)。

定理1は、すべての投資家は、(平均・分散モデルのことは忘れて) 市場平均ポートフォリオ (例えばTOPIX) と国債だけを買えばよい、ということの意味している。投資家ごとに違うのは、両者の保有比率

こんの ひろし

中央大学 理工学部

〒112-8552 文京区春日 1-13-27

だけである。

また定理2の関係式を使うと、ポートフォリオ x の収益率 $R(x)$ の期待値 $r(x) = \sum r_j x_j$ は、

$$r(x) - r_0 = (\sum \beta_j x_j)(r_M - r_0),$$

をみたく、したがって $\sum \beta_j x_j = 1$ なら $r(x) = r_M$ になる。つまり $\sum \beta_j x_j = 1$ となるポートフォリオの期待収益率は、市場平均ポートフォリオと一致する。

したがって、この条件をみたすポートフォリオの中で、市場平均からの乖離が小さいものを選んでくれば、それは将来も市場平均とほとんど同じ収益をもたらすであろう。市場が上昇傾向にあるときは、これで十分な利益が得られるはずである。こうして、上昇傾向にあった市場では、資産運用はベータ値をもとに市場平均ポートフォリオを構築する、“インデックス運用”が主流となった。

ではこのモデルは、十分よく現実を表現しているのだろうか。何年にもわたって様々な統計学的検証が行われたが、容易に結論は出なかった。しかしそれにもかかわらず、このモデルは世の中に浸透していった。巧妙なレトリックを用いて、この理論を実務家たちに売りこむシャープというカリスマ経済学者がいたことと、この結論が現場のファンド・マネージャにとって都合のいいものだったからである。

投資家は、市場平均を出し抜こうとして様々な戦略を組立てる。しかしそのような試みはなかなか成功しなかった。良くて勝ったり負けたりで、コンスタントに勝ち続けるのは至難のわざである。そんなことに労力を注入するより、インデックスに投資していればそれでいいというのだから、こんな楽なことはない。

こうして60年代半ば以降、CAPMが教えるインデックス運用が資産運用のパラダイムとなった。実際いまでも経済学者の多くは、インデックス運用が王道だと考えている。

筆者がこの理論を詳しく勉強したのは、80年代半ばのことである。もう40歳代後半に入っていたが、感動のあまり夜も眠れないくらいだった。なぜ平均・分散モデルが実務に使われていないのかが、これでよく分かった。

もしここで感動したままだったら、私は経済学者の仲間入りさせてもらえかたもしれない。しかしこの理論を検証してみると、あまりにも問題が多すぎた。仮定がみつすぎるのだ。

CAPMの七つの仮定

1. 資産の取引にはコスト（手数料など）はかから

ない。

2. 資産は無限に分割可能である。
3. 投資家は資産価格に影響を及ぼすことはできない。
4. 投資家は無制限に空売りを行うことができる。
5. 投資家は無リスク資産の利率 r_0 で資金を無制限に貸し借りすることができる。
6. 投資家はリスク回避的であって、ポートフォリオ収益率の期待値と分散のみを指標として意思決定を行う。
7. すべての投資家は同一期間を対象として投資を行う。また各資産の収益率の収益率分布について完全な情報を共有する。

美しい理論を導くためには、当然様々な仮定をおく必要がある。実際、CAPMは素晴らしい結果を導いたのだから、理論としては素晴らしいものといえるだろう。

しかしそれを実務に使うとなると話は別である。仮定1~3はひとまずおくとして、問題は仮定4以下である。実際の市場で、これらの仮定が成立つと想定するのはきわめて難しい。特に仮定の6と7はあまりにも厳しすぎる。したがって、当然のことながら定理1と2の現場への適用に際して問題が起こる。

まず第1は β_j の安定性の問題である。過去のデータをもとに、定義式(4)を使って計算してみると、時代系列的にきわめて不安定な動きをする。コンスタントであるべきベータ値がランダムに変動するとすると、話はややこしい。

次の問題は、無リスク資産の利率とは一体何かという問題である。国債の利回りか、定期預金の利率か。実際には、無リスクだと思われるこの二つの金利には差があるのが普通だが、経済理論上はこれは一意的に決まることになっている。なぜなら、二つの異なる利率を持つ無リスク資産が存在すると、投資家は安い方の利率で借りた金を高い方の利率で預けることによって、無リスクで儲けることができる。しかしこれはファイナンス理論の大原則である「無裁定原理」に違反する——。これが取引コストや情報伝達スピードなどを無視して得られる経済理論の結論である。

CAPMの“実務的”役割は、この理論が生まれてから12年経った77年にRolleが振り下した一撃、「市場平均ポートフォリオを一意的に規定できない以上、CAPM理論の正当性を統計的に証明することは理論的に不可能である」で終わるのであるが、理論は

まだ生き続けている。現場では否定されても、美しく一貫した理論であれば、“理論”としては十分に価値があるというわけである。

CAPMは、経済学者が生み出した壮大なフィクションである。しかし、この理論のように分かりやすいモデルを作るのは容易でないこともまた確かである。そこで多くの研究者が、どこまで仮定を緩めることができるか検討を行った。筆者自身も、このモデルをより現実に合うよう作り直すための研究を手がけ、それを実務に応用しようと工夫してみた。しかし、やればやるほど工学的にはダメなモデルであることが分かって、がっかりさせられたものである。

筆者は80年代半ば以来、エンジニアとしてファイナンスの世界に参入し、ファイナンスをエンジニアのサイドに引き寄せる努力をしてきた。ポートフォリオ理論に、数理計画法を本格的に導入することによって、マーコビッツの当初の意図を実現しようという試みである。

巨大な平均・分散モデルの解法、平均・分散モデルにかわるより実用的なモデルの構築、大域的最適化や整数計画法を用いたそのモデルの解法、そしてその現場への応用などである。しかし残念ながら、全体的に言えばこの種の試みはまだ道半ばである（その上もう時間がない!!）。

経済学者たちから無視されるのは仕方がないとして、現場のエンジニアにもなかなか受入れてもらえないのである。エンジニアにとっても数理計画法はハードルが高く、“大体は分かった”という気分になれないためだという人もいる。

われわれがここ数年取組んできた問題の一つは、非凸型取引コストの下でのポートフォリオ構築である。実務上はきわめて重要な問題であるが、経済学者にとって、このような問題は考察の対象としては次元が低すぎるのだそうだ。実際取引コストなどをいうものが存在すること自体おかしいのだ、という経済学者もいるくらいである。したがって経済学者が取扱う取引コストとは、たかだか線形コストまでである。

ORの研究者にとっては、より現実にフィットした非線形取引コストの扱いが最も面白い部分であるが、これまでは計算技術が十分でなかったため、経済学者の怠慢を批判してあまり説得力がなかった。しかし時代は変わった。経済学者たちが展開した美しく単純なモデルを下敷きにして、エンジニアが納得できるモデル作りを行うことが可能な状況が生まれているのであ

る。

ORの研究者が先鞭をつけたモデルに経営学者が化粧直しを施し、いまOR研究者の間でも流行の兆しを見せているモデルが、「リアル・オプション」である。これは60年代以来、OR研究者たちによって研究されてきた「決定分析 (decision analysis)」に、ファイナンス理論の分野で発展した「オプション理論」を組合わせて、不確定性の下での投資プロジェクトを評価するための方法である。

無裁定原理や自由な参入・退場を前提とするオプション理論を、1回限りの個別プロジェクト評価に使うことは妥当かという基本的疑問はある。しかし問題によっては、素晴らしい結果を導くことが知られている。

決定分析は、60年代から70年代にかけてORの分野で確立された手法であり、主として米国で現実問題に適用され成功を収めた。ここに70年代に登場したオプション理論を組合せるのは、ごく自然な発想といえるだろう。

しかしこの当然の拡張に、リアル・オプションという^{こわくてき}名前をつけたのが、経営学者の賢いところである。この結果、決定分析が流行しなかった日本でも、OR研究者の間でこのモデルが研究されるようになった。ORで生まれた手法が一旦経営学者の手に渡り、そしていまORの研究者が本格的にこの研究に乗り出しているというわけである。

ファイナンス理論がOR理論として誕生し（平均・分散モデルは当初から現在にいたるまで経済学ではないと批判されつづけている）、長らく経済学者という里親の下で養育されたあと、いまエンジニアたちによって精力的に研究されているのと似た現象が、ここでも起こっているのである。

モデルが流行するためには、多くの人にアピールすること、そして“大体は分かりました”という感覚を持ってもらうことが肝心である。この意味でいえば、線形計画法やAHPなどはまことに分かりやすいモデルである。特に線形計画法は、汲めども尽きせぬ泉のように、多くの使い道がある。これほどの資産を持っている学問分野はそう減多にない。

一方、その延長線上にある非線形モデルは、線形モデルに比べるとずっと分かりにくく解きにくい。したがってなかなか流行しなかったが、最近の計算技術の発展によって、状況は大きく変化している。

またAHPは、理論的根拠についてやや不明な部分があるモデルである。しかし分かりやすく使いやすく、

使ってみると十分に納得できるモデルである。これと対置されるのが、多属性効用分析である。これは経済学的裏づけのあるモデルだが、理論が難しいのと手間がかかるのが原因で、日本ではほとんど使われなかった。AHPが流行したのは、理論の分かりやすさと、サーティーというカリスマをとりまく強力なプロモータたちがいたおかげであろう。

ORは「モデルの宝庫」を持っている。絵に描いた餅であれば、普及しなくてもそれは仕方ない。しかし、かつてそうであったこれらのモデルは、次々と本物のモチに変身した。整数計画法、非線形計画法、動的計画法、確率計画法、様々な確率モデル、シミュレーション技術エトセトラは、いまや完全に実用段階に入った。

例えば整数計画法は、いまでは3,000変数くらいまでの問題はパソコン上で普通に解けている。これによって、ポートフォリオ理論における様々な現実モデルや大型のスケジューリング問題、SCM問題なども手軽に解けるようになった。10年前には考えられなかったことである。しかしこのような事実を知っている人は、ORの専門家の中でも少数派である。ここ数年の進歩があまりにも速いためかもしれない。

これらのモデルに少々のレトリックを加味してやれば、大化けするものがたくさんあるはずである。エン

ジニアの中から、もっと多くのサーティーやシャープが出現し、ORの生み出した資産が、より広く利用されるようになることを期待したいものである。ORを普及させるためには、「マーケティングのOR」だけでなく、「ORマーケティング」の研究が求められるゆえんである。

世の中では、難しい問題群を解決するために、「文理融合」アプローチに対する期待が高まっている。しかし「文理融合」には、文系上位のイメージと中途半端なイメージが染みこんでいる。いま求められているのは、このような“生ぬるい”アプローチでなく、理系分野で開発された技術と、文系分野で生まれた理論を換骨奪胎した技術を総合して、現実の問題群を解決する「理文総合」アプローチである。

計算技術の劇的進歩によって、「理文総合」を実現するための条件は整いつつある。そしてそのプロモータとして最も期待されるのは、OR学会が擁する豊富な人材群である。こう考えれば、われわれは未来に明るい展望を持つことができるのではないだろうか。

参考文献

- [1] D. G. ルーエンバーガー：「金融工学入門」, 日本経済新聞社, 2002年.