むだばなし“水とモデル”

からくり堂隠居

この稿では，モデルが作られるそのちょっと前の段階について考えてみたいと思います．モデル，特に数理モデル等は一挙に作られるわけではなく，さまざまなものが頭の中を駆け巡って，その結果，運がよければ，モデルという形に結実するのだと思います．

あれこれと思いを巡らすとき，我々は考える対象を卑近なものになぞらえます．その意味で万人共通なものの一つが“水”です．厳密にいえば，“少々の粘性のある非圧縮流体”ということになりますが，イメージ作りのよすがにするだけですから，あまり厳密な必要はありません．

古来，水については多くの研究がなされており，今日，我々の多くはこれらの研究の幾分かは知っていますし，それ以前に日常の経験から，水の振る舞いについては多くのことを学んでいます：“水は方円の器に随う”，“水の低きに就くが如し”，“井戸の呼び水”….ですから，我々が理解しよう，モデルを作ろうとして考えを巡らすとき，“水”が頭に浮かぶのは少なくないはずです．

そんな訳で，この稿では，イメージとしての水がモデル作りにどのように関わるのかをいくつかの例を通じて見ていくことにします．いわば，モデル作りを巡るとりとめもない隠居の無駄話として読んでいただければ幸いです．

*

真偽の程はともかく，アルキメデス（前287頃～212）の逸話は有名です[1]．シラクサの僭主ヒェロン王は作られてきた黄金の冠に銀が混ぜられていないか心配になりました．そこで，アルキメデスにその検査を依頼します．ただし，〈非破壊検査〉です．アルキメデスは考えあぐねたまま，風呂に入り，そこであの有名な発見をするのです．つまり，水の中にものを入れれば，〈それが押しのけた水の重さだけ〉の浮力がそのものに働くというアルキメデスの原理です．この発見に喜んだアルキメデスは裸のまま風呂を飛び出し，“ユーレカ！（見つけたぞ！）”と叫びます．

“ユーレカ！”というのは素晴らしい言葉です．恐らく，人間にとって最高に幸せな瞬間を表現していると思います．自分で“ユーレカ！”を叫ぶことができればもちろん，そうでなくても，ヒューリスチクス（発見的説明；ユーレカが語源）は，物事の今後の発展のためにぜひ必要なことです．

しかし，ここで発見のよすがとなった〈水〉のことを忘れてはなりますまい．アルキメデスが梃子や滑車の原理に通じていたことはよく知られています．筆者の想像ですが，アルキメデスは，恐らく，体を水から出したり，沈めたりしてみたに違いありません．アルキメデスにとってこの場合の水は天秤の桿や反対側の錘と同じ役割を果たすものと思えたはずです．天秤の方がモデルになっていたともいえるでしょう．

水の実際的応用が，多くの場所で行われていたのは言うまでもありませんが，アルキメデスのような知的な目でこれを見つめることはルネッサンスの頃まで待たなければなりませんでした．よく知られているように，ガリレオは落下の法則を研究しました[2]．ガリレオはまず，砲丸のような固いものの落下から考え始めたようです．しかし，物の落下というのはスピードが速い．アッという間の出来事です．これをしっかりと見つめて解析するには，今日ならば，スローモーション・カメラを使うところでしょうが，当時そんな物はありません．ガリレオはいろいろと工夫します．

錘を紐で吊ってみます．――振子です．これも落下の一形態です．斜めに寝かせた溝の上で重い球を転がします．今日の言い方をすれば，重力加速度を一定の比率で減らす方法です．このような実証的実験に深い思考実験を加えて，〈落下の法則〉，〈放射体の運動〉，〈振子の等時性〉，等を導いたのです．

しかし，今われわれが考えてみると，噴水の形こそは放射体のスローモーション映像になっています．それなのに，ガリレオの「新科学対話」には噴水の話は出ていないようです．噴水なら，イタリアにはいくら

やない　ひろし
慶應義塾大学 名誉教授

でもあったはずです．しかし，ガリレオがアリストテレスの“重い物ほど速く落ちる”という説を論破するためには，固いものから始めなければならなかったのでしょう．ガリレオは一つの物体を，“二つに割って紐でつないで落としたら，割らない場合とどのように違うだろうか？”という例を用いてアリストテレスの学説に挑みます．そして〈落下の法則〉から幾何学的に〈放射体の運動〉が放物線を描くことを導きます．

しかし，噴水ならば水の一滴一滴が繋がって〈いるような—いないような〉，とにかく続いて飛び出してくるわけです．ですから，恐らく，ガリレオは水条の形が放物線であることに気づいていただろうと思います．しかし，晩年のガリレオは太陽の観測のためか，失明してしまいます．そこで，弟子のトリチェッリに物理学上の多くの問題の研究を託します．そしてトリチェッリが，水条の形が放物線であることを証明します．1644 年のことです[3].

〈植木算〉とか〈鶴亀算〉などと問題に渾名をつけることは，和算以来の素晴らしい伝統だと思います．その名を聞けば，問題の状況，要点，解法などが一度に頭に浮かびます．今日ではこのような呼び名があまり行われなくなったようですが，これらが，モデル化のカタログになっていたことを思えば，残念なことです．

このように渾名のついた問題の一つに〈流水算〉というのがあります．「船で川をくだるときは，毎時 30 km で，上るときは 10 km である．川の流れの速さと，静水での船の速さはいくらか？」というような問題です．筆者はまだ若かった頃，下りエスカレータを逆に駆け登ったことがありますが，その辛かったこと．ちょっとでも休めば下がってゆくのですから．流れを遡る船もそんなものでしょう．

河を横切ろうとする船の様子も面白いものです．船体は，その航跡よりもずっと上流側を向いています．つまり，その分だけ流されています．静水に船を浮かべたときの速度ベクトル——これが船体の向きです．これと河の流れが作る下流向きの速度ベクトルが合成されてものが，流れの中での船の速度ベクトルになるわけです．

力の平行四辺形の法則はニュートンの「プリンピキア」(1687) において，初めて，明確な形で述べられました．しかし，それ以前にガリレオはこのことを知っており，ニュートンもそれを認めています[3]．すなわち，水平面上で打ち出された物体は等速運動を続けます．そこで，物体を支持する平面を取り除けば，これが，落下距離が時間の 2 乗に比例する落体の運動と合成されます．こうして放射体の軌道は放物線を描くのだというのがガリレオの主張です[4].

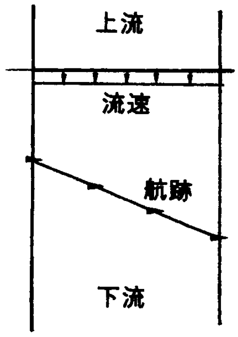


図 1

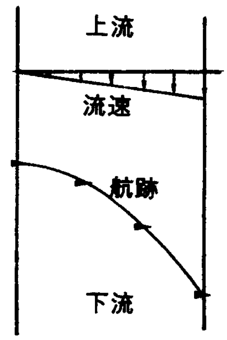


図 2

静水では一定の速度で進むボートを，川に浮かべてみましょう．舳先を真っ直ぐに彼岸に向けて進むとき，ボートが描く航跡は，無論，川の流速分布という上下方向には圧倒的な力をもつ速度場に依存します．流速が一様なら，ボートは直線を描いて斜めに川を下ります（図 1)．次に，流速が此岸からの距離に比例する場合を考えてみましょう．横断方向へはやはり等速で進みます．下流方向に向かっては，川の流れが与える速度場によって次第に速くなります．時間——つまり進んだ距離に比例する“下流方向への速度”を得ます．ボートは，ちょうど，水平に打ち出された放物体の場合と同様，放物線を描いて川を下って行きます（図 2).

水条の形が放物線だと分かれば，いわゆるトリチェッリの原理——つまり，桶の側面から噴出する水の速度が水頭の平方根に比例するという原理を実験結果から導くのは容易なはずです．放物線上の水条の落下点と水頭の関係を調べればよいのですから．

海岸の崖の上にある家の風呂の栓を抜いて排水しました．水は，キューッと音を立ててものすごい勢いで流れてゆきました．排水管が，崖のずっと下の海の方までのびていたのです．トリチェッリの定理により，管口における流速は落差の平方根に比例します．落差はポンプに比すべき役割を果たしていたのです．もっとも，管が太すぎては，空気が入ってしまうのでこの効果は期待できません．

そこで気がつきました．煙突は高いほどよろしい．

〈浮力加速度〉という係数を考えれば，トリチェッリの定理と似たような定理が導けるはずです．また，煙突内の煙が密になるよう，分散しないで一本の煙突に煙を集める方がよいのです．工場の煙突は，事実そうなっています．そういえば，数年前，英国展で見たスチーヴンスンの機関車ロケット号の煙突は高いものでした．そうでないと排煙が十分でなかったのでしょう．その後，煙突内に蒸気を吹き込むことによって短くすることができるようになりました．

1665年頃からニュートンは微分法の研究を始めています．ニュートンが微分商の概念を表現するのに用いたのはfluxion＝流率という語でした[1]（これは，流れるというラテン語の動名詞です)．このことからすれば，ニュートンは微分商を考えるとき，頭の中に，水の流れというモデルを持っていたことになります．溜まっている水の量は，はっきりと眼にも見え，量を測ることができます．しかし，その変化の割合——速度を測るということになると，当時の技術ではなかなか難しかったのです．ガリレオが苦労したのもこの点です．ところが，ニュートンの考えるところ，運動している物体の各瞬間の〈釣り合い〉は，この微分商の，そのまた微分商の世界で成立しているのです．

湾岸戦争の頃，エクゾセというミサイルの飛ぶところがテレビに映りました．ミサイルはほぼ水平に飛んで行きます．噴出されて後に残る煙もほぼ水平なのですが，飛翔体自身はそれよりかなり頭を上げているのです．つまり，飛翔体と煙は“くの字”に折れ曲がっているように見えます．——飛翔体は重力の場で〈落下したい〉のです．それを，水平に飛ばすのには，噴射によってこれを支えなければならないのです．

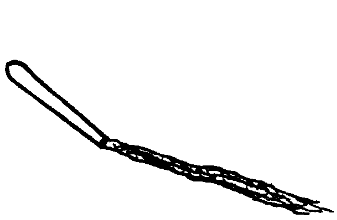
いずれにせよ，こうして物理学では，微分方程式モデルが頻繁に使われるようになります．

一方，トリチェッリの定理は，ベルヌーイの定理という形に拡張されます．1743年のことです．ダニエル・ベルヌーイは縮まない，いわゆる完全流体の定常流を考えます．つまり，流れのなかには無数の細いパイプ（これを流管といいます）があり，流体がその各々の中を分かれて流れているのと同じに考えてよい場面を想定したのです．ベルヌーイはこの流管の一部分の流体に関して，位置，圧力，運動のエネルギーの関係を考え，

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{一定},$$

p：圧力，ρ：密度，g：重力加速度

というベルヌーイの定理を導いたのです．トリチェッリの定理はベルヌーイの定理の特別な場合になります．



エクゾセの飛翔

図3

今は昔，箱根小湧園で日科技連主催の数理計画シンポジウムが行われました．その折，ある鉱山技師が坑道内の換気の問題をシミュレーションによって解析した事例を報告しました．こんな事例はまだ珍しかった頃の話で，数式モデルそのものがピンときません．参加の聴衆が皆，釈然としない顔を見せたのでしょう．その技師は次のように説明しました．“坑道は網の目のようです．これを電子回路と考えて下さい．換気扇は起電力，細く続く坑道は抵抗，大きな空洞はコンデンサーです．ここに空気という電流を流すのです…”ここで皆が納得したのです．数理計画シンポジウムの参加者なら，誰でもキルヒホフの方程式くらいはよく知っていたのです．

この報告の講評で，森口繁一先生はいつものようにニコニコとして，次のように言われました“いま，電流という言葉が出たとたんに，皆さんは納得されたようです．しかし，もともと電流という概念は昔の人が電気に関する現象を理解しようと頭をひねっているうちに，水の流れに譬えたらどうかと思いついたものではありませんか？　しかし今，皆さんは空気の流れより電流の方がよくお分かりのようです．…”

そうです．1750年，電気を流体になぞらえて，電気流体説を唱えたのは雷と凧で有名なフランクリンです[4]．その後1827年になるとオームは導線が電気流体を通すパイプで，分岐させない限りここから脇への電流の出入りはない．したがって，結合点では物質収支に相当する関係が成立することを述べました．そして，電流＝電圧/抵抗という有名なオームの法則を発表します．もっとも，オームは熱と電気のアナロジーによってこの法則を導いたということですが，その熱伝導の方程式にしても，熱が流体であるかのように扱って定式化されています．

さらに，1845～1849年にはキルヒホフが電気回路

のキルヒホフの法則を導きます[4]．これはオームの法則の一般化です．水と対比していえば，トリチェッリの法則がオームの法則に，ベルヌーイの法則がキルヒホフの法則に対応すると見ることができます．

さらにこれから，キルヒホフの方程式が導かれます．また，コイル（インダクタンス）やコンデンサ（キャパシタンス）を含む過渡現象の微分方程式や交流回路の方程式へと発展します．しかし，これらは基本的に線形であったので，解法もさほどは困難ではありませんでした．複素解析や線形代数，そして演算子法も発達してきます．

これに比べると，先輩格の水の方は不利でした．ベルヌーイの定理と物質収支を組み合わせると，理論的には電気回路のキルヒホフの方程式に相当する方程式が作れますが，これは非線形です．それにパイプの抵抗やポンプ等という要素を加えれば話はもっと複雑になります．

それでも，都市には水道が必要です．溝の中を高い所から低い所へ水を流すだけの上水道でも，複雑な網全体にわたって適切な傾斜を設定するのは，設計上も施工上も，かなり骨の折れる仕事ですが，これが，パイプの中を加圧した水を流すとなると大変です．方程式を立てても，キチンと解くことはできず，反復計算による近似計算が必要になります（上に述べた坑道の中の空気の流れなら，圧縮や膨張も考えなければならないので，もっと複雑です）．今日のような電子計算機が出現するまでは，チームを組んで各人が部分的計算を担当し，それをまとめて近似解を得ました．その各人がコンピュータと呼ばれたのが，今日，電子計算機をコンピュータと呼ぶ，その名の由来だということです[5]．

＊

水とモデルをめぐる無駄話はいくらでも続きそうですが，そろそろ終わりにしましょう．

近代的な自然科学におけるモデル，特にコンピュータ時代における数理モデルの有用さは言うまでもありません．数理モデルを用いたシミュレーションから，いろいろな結果を導き，それをもとに現象を解釈するヒントを得ることができます．モデルが妥当で，精緻な物ならば，予測もできます．最適条件を推定することもできます．しかし，これらは“良いモデルができていれば”の話です．モデルそのものを組み立てることになると話が違います．とりとめのない“夢想”も必要です．それがないと文化としての科学の内容は豊かなものにならないでしょう．そして，その夢想もごく身近なものに触発されるのではないでしょうか？

参考文献

[1] ベル，E. T. 著，田中勇，銀林浩訳，「数学をつくった人々」, 早川書房, 2003.
[2] ガリレイ著, 今野武雄, 日田節次,「新科学対話」, 岩波文庫, 1953.
[3] ダンネマン，F. 著，安田徳太郎訳，「大自然科学史」，三省堂, 2002.
[4] 伊東俊太郎, 坂本賢三, 山田慶児, 村上陽一郎編,「科学史技術史事典」, 弘文堂, 1983.
[5] ペトロスキー，H. 著，忠兵美幸訳，「ゼムクリップから技術の世界が見える」, 朝日新聞社, 2003.