

年金運用におけるダウンサイド・リスク最小化のための最適アセット・アロケーション

山口 勝業, 小松原 宰明

年金で運用される資産とその運用益は、受給者の将来の消費に充当されるものである。したがって、将来の購買力を実質的に確保するためには、インフレ率を上回るリターンを達成することが運用目標となる。本稿では、この運用目標を達成できないダウンサイド・リスクがどの程度あるのか、またそのリスクを最小化するためには株式と債券の配分比率はどうあるべきかを、日米の長期投資収益率データで検証する。

キーワード：戦略的資産配分、ダウンサイド・リスク、下方部分積率 (LPM)、インフレーション

1. はじめに

年金資金の運用のような長期投資では、どのようなポートフォリオが最適といえるのだろうか。代表的な資産クラスには株式と債券があるが、年金の運用ははたして株式中心でいくべきか、債券中心でいくべきか？

一つの極端な意見として、「年金の運用期間は超長期で、超長期では株式は債券よりも高いリターンを上げるはずだから、全額を株式で運用すればよい。短期的な価格変動にはこだわらなくてもよい」という説がある。しかし実際の運用責任者は人間だから、いずれ引退したり、交代したりする。また、自分の任期中は少なくとも失敗したくないと思うだろう。実際の運用者が持つ想定投資期間が数年だとすれば、株式だけに投資することはあまりにもリスクが高い。

もう一つの極端な意見は、「年金基金は大儲けする必要はない。給付が払えれば十分だから、債券中心で手堅く運用すべきだ」というものだ。我が国の年金運用では株式の不済なパフォーマンスに毎年のように苦しめられたが、2003年の国会では公的年金の運用に関して小泉首相が「デフレの時代に株式なんて、どう考えても危ない。安全なのは国債くらいしかない

じゃないか」と発言する一幕もあった。しかし、デフレになってからこんなことを言っても手遅れだ。デフレ脱出のために政府の講じた経済政策が功を奏して景気が回復すれば、いずれ金利もインフレ率も上昇するだろう。金利が上昇すれば債券ではキャピタル・ロスが生じるから、これもリスクが高い。

ややもすると忘れがちだが、年金で運用される資金はいずれ消費されるお金である。国や企業の年金制度での運用ではその資金はいずれ将来に受給者に給付金として支払われるし、個人が自己責任で運用する確定拠出年金や変額年金では、本人自身が将来受け取って老後の生活資金にするわけだ。となれば、一番気にしなければならないのはインフレ・リスクだ。将来年金が支給されるまでの間に物価が上昇していれば、受け取る年金の購買力が目減りしてしまうリスクである。

本研究では、最低限達成すべき目標リターンがインフレ率であるとき、それを下回るダウンサイド・リスクがどれだけあるのかを日米の長期データに基づいて検証した。現実の運用者が戦略的資産配分を決定する際に、想定している投資期間は5年から長くてもせいぜい10年程度であろう。そうした一定の投資期間で、株式と債券で構成されたポートフォリオの平均投資収益率が結果的にインフレ率を上回れなければ、これはダウンサイド・リスクが顕在化した状態といえる。本研究は、そうした状態が(1)どのくらいの確率で発生するのか、(2)インフレ率に対して平均的にはどれくらい負けるのか、そして(3)負ける場合はどれくらい広範囲にバラついているのか、を実証データで計測する。

やまぐち かつなり

イボットソン・アソシエイツ・ジャパン(株)

〒101-0065 千代田区西神田 2-5-6

専修大学大学院経済学研究科 (ファイナンス) 客員教授

〒101-8425 千代田区神田神保町 3-8

こまつばら ただあき

イボットソン・アソシエイツ・ジャパン(株)

〒101-0065 千代田区西神田 2-5-6

2. 先行研究と本稿の貢献

もっとも標準的な資産選択理論は Harry Markowitz が提唱した平均-分散アプローチであるが、この方法によって最適ポートフォリオを決定するためには、(1)投資家がリスク回避的であり、それが2次効用関数で表現されること、(2)リターンの分布が正規分布に従うこと、が要件となる。しかし、投資家のリスク回避度のパラメータを具体的な数値で特定することは現実には不可能だ。また、証券価格の分布はどちらかといえば対数正規分布に近く、歪度や尖度が正規分布とは異なることが知られている。さらに、ふつう平均-分散アプローチでは1期間でのポートフォリオ選択問題であるが、その解が年金資産のように長期的な運用においても妥当な解かどうかはただちに明らかでない。

こうした問題点に加えて、専門家でない一般人は標準偏差をリスク尺度とすることに違和感を覚えるむきもある。分散や標準偏差はリターンが平均値の上下に確率分布している状態を表しているが、一般常識では平均より高いリターンをリスクと呼ぶのはなじまない。投資家にとって、リスクとは期待していたよりも悪い結果がどれだけ起こりそうか、つまりダウンサイド・リスクが最も気になる場所である。

しかしながら、ダウンサイド・リスクは金融経済学では主要な研究テーマではなかったようである。約50年前、現代ポートフォリオ理論の基礎を数学的に定式化した Markowitz は、*Portfolio Selection* (1959) のなかで14ページを占めるにすぎない第9章で、ダウンサイド・リスクの一種である半分散 (semi-variance) に言及している。そこで彼は「分散にもとづく分析よりも、半分散にもとづく分析がより良いポートフォリオを生み出す。分散を用いると、極端に高いまたは低いリターンをいずれも好ましくないとして排除するのに対して、半分散は損失を削減することに焦点を当てているからだ」とその利点を挙げている。しかし一方では、計算コスト、簡便性、統計値としての知名度などを考慮すれば分散のほうが優れているので、まずは取扱いが簡単な分散を用いるほうがよいと述べて、それ以上突っ込んだ議論を展開していない。

じつは Markowitz とほぼ同時期に、英国の A. D. Roy (1952) が「安全第一主義」での資産選択問題を発表していたが、その業績は脚光を浴びることはなく、

Bernstein (1992) が発掘するまで40年間にわたってほぼ忘れ去られてきた。この間、70年代に Bawa (1975, 1978) が本稿でとりあげる下方部分積率 (Lower Partial Moments) に関する論文を発表しているが、ダウンサイド・リスク問題が多く研究者や実務家から関心を集めたのは90年代になってからである。

例えばソロモン・ブラザースの Leibowitz (1989, 1996) は、目標収益率を達成できないリスク (ショートフォール) をテーマにいくつかの一連の研究を発表してきた。またフィデリティの Harlow (1991) は、ダウンサイド・リスクの観点から資産配分の最適化問題の解法を示した。我が国でも竹原 (1994) が平均-下方部分積率 (MLPM) モデルを紹介し、我が国のデータで数値分析を行った。その他、辰巳 (1996) は目標収益率を特定したうえでダウンサイド・リスクを最小化する手法を提示し、枇々木 (1999) はリスク尺度にオープン L 偏差を用いた最適化モデル (MOLD モデル) を MLPM モデルと比較している。

しかし、これまでのところ長期的な実証データによってダウンサイド・リスクを計測した例は皆無である。その最大の理由は、どこから下をダウンサイドと定義すべきかが一様には決まらないからであろう。ある投資家にとっては元本割れを回避すること (目標リターン=0%) かもしれないし、別の投資家にとっては何らかのプラスの目標リターンを達成できないことがリスクかもしれない。これまでの研究で数値例を示されている場合、なんらかの恣意的に固定した目標リターンを研究者が設定したうえで分析を行っている。

これらの過去の研究に対比して、本稿の貢献があるとすれば次の4点に要約されよう。本研究では(1)固定的な目標リターンを設定せず、運用期間中に確率的に変動するインフレ率を目標リターンとし、一定の投資期間において実質リターンがマイナスになることをダウンサイド・リスクと定義していること、(2)50年以上の長期間にわたる株式・債券の投資収益率データを用いて計測したこと、(3)米国と日本のデータを同じ方法で比較分析したこと、および(4)サンプル期間から得られた実測値をもとに理論値を推計したこと、である。

3. 分析方法とデータ

3.1 分析方法

ダウンサイド・リスクは下方部分積率 (Lower Partial Moment, 以降 LPM と略す) として、 n 次

のモーメントを持つ LPM_n は次の一般式で定義される。

$$LPM_n = \sum_{R_k = -\infty}^T p_k (T - R_k)^n \quad (1)$$

ただし、 T は目標リターン、 R_k はポートフォリオ k のリターン、 p_k はリターン R_k (ただし、 $R_k \leq T$) が出現する確率を表す。右辺の $(T - R_k)$ をリターン・ショートフォールと呼び、実際のリターン R が目標値 T にどれだけ足りないかを表している。

ここで $n=0$ の場合、式(1)は目標リターン T を下回る確率(式(2))となり、これをダウンサイド確率と呼ぶことにする。また $n=1$ の場合、式(1)は目標値を下回る悪い結果の確率的な平均値(式(3))を表すので、ショートフォール期待値である。さらに $n=2$ の場合は、式(1)は閾値 T を下回るケースがどれだけ広範囲に分布しているかの分散(式(4))で、ショートフォール分散と呼ぶ。ギャンブルの勝敗に例えれば、 LPM_0 は負ける確率を、 LPM_1 は平均的にはいくら負けるか、 LPM_2 は負けた場合に大損することもありそうなのかを示している。

$$n=0, \quad LPM_0 = \sum_{R_k = -\infty}^T p_k \quad (2)$$

$$n=1, \quad LPM_1 = \sum_{R_k = -\infty}^T p_k (T - R_k) \quad (3)$$

$$n=2, \quad LPM_2 = \sum_{R_k = -\infty}^T p_k (T - R_k)^2 \quad (4)$$

本研究は問題の本質をとらえるため、年金資金は株式と債券のポートフォリオで運用されているという2資産モデルで考察する。日米それぞれで株式市場指数と10年物長期国債の組合せて11種類のポートフォリオを構築し、そのポートフォリオのリターンから上記の式(2)~(4)で三つのダウンサイド・リスクを計測する。ここでダウンサイド・リスクとは、一定の投資期間においてポートフォリオの名目リターンがその間のインフレ率を下回る、すなわちインフレ控除後の実質リターンの平均が投資期間をつうじて0%未満となる場合と定義する。11種類の組合せのなかで、どのポートフォリオがもっともダウンサイド・リスクが小さいかが、本研究の主な関心である。

3.2 データ

株式リターンは代表的な市場指数の配当込みトータル・リターンの月次系列である。日本では東証1部上場全銘柄の加重平均(配当込み TOPIX)、米国では S & P 500 指数を用いた。債券リターンは満期10年の長期国債トータル・リターンの月次系列で、日本で

は10年物国債、米国では財務省証券の5年物と20年物から合成した平均満期10年の国債ポートフォリオを用いた。名目リターンを実質リターンに変換するために用いたインフレ率は、日米ともに消費者物価指数である。また、安全資産のリターンは米国が30日物 T-Bill の月次リターン、日本は有担保コールレート翌日物の月中平均である。計測期間は日米それぞれでデータが入手できる最長期間で、米国は1926年1月から2003年12月までの78年間、日本は1952年1月から2003年12月までの52年間である。

11種類のポートフォリオは次のように作成した。第0番のポートフォリオは安全資産100%である。第1番は債券100%：株式0%で、第2番は債券90%：株式10%、第3番は債券80%：株式20%…と以後10%ずつ構成比を変化させ、第11番では債券0%：株式100%である。ポートフォリオは毎月末にリバランスしながら運用し、指定した配分比率を維持しつつ各月のリターンを計測している。また投資収益にかかる税金はないものと仮定し、リバランスにともなう売買手数料など取引コストもないものと仮定している。

例えば投資期間5年の運用シミュレーションでは、米国では第1回を1926年1月から1930年12月まで、第2回を翌月1926年2月から1931年1月まで…という要領で、1ヶ月ずつ開始時期をずらしながら行い、実質リターンの平均と標準偏差および3種類のダウンサイド・リスク (LPM_0 , LPM_1 , LPM_2) を計測した。投資期間10年の場合も同様の手続きである。日本についても同様に1952年1月を第1回として、5年間および10年間の運用シミュレーションを行った(本稿では紙幅の関係で、投資期間5年の場合の計測結果のみを報告する。10年の場合も概ね同様の結果である)。

4. 運用シミュレーションの計測結果

4.1 計測結果の要約

図1Aは米国の、図1Bは日本での投資期間5年の実質リターンの年率平均をあらわしている。横軸は投資期間終了時点であらわしており、縦軸はその時点から過去5年間での実質リターンの年率平均である。11本のグラフは各ポートフォリオを過去5年間の実質リターンの年率平均を表し、0%より下回っている状態はその時点までの過去5年間で運用成績がインフレ率に負けたことを示している。

まず米国については、大恐慌(デフレ)に見舞われ

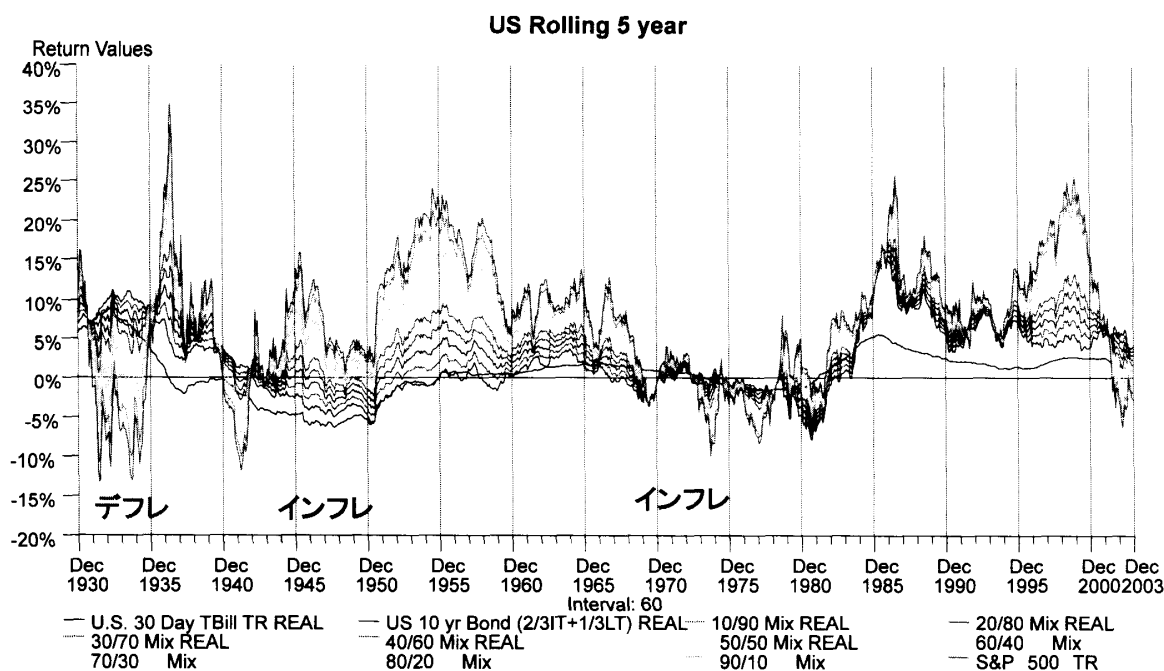


図1A 米国での投資期間5年の年率平均実質リターン (1926年1月～2003年12月)

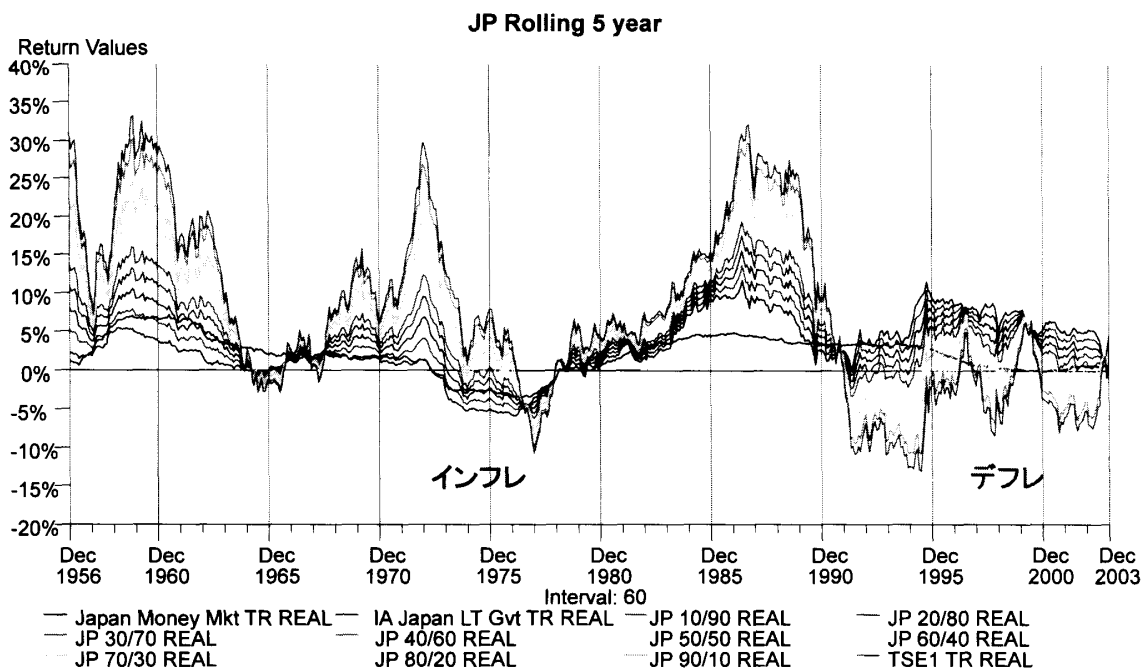


図1B 日本での投資期間5年の年率平均実質リターン (1952年1月～2003年12月)

た1930年代、第2次大戦直後のインフレが昂進した時代、インフレと経済停滞（スタグフレーション）に悩まされた1970年代などに、実質リターンがマイナスになっていた。日本では、2度にわたる石油ショックなどインフレが高まった1970年代、バブル崩壊後のデフレの時代に、やはり実質リターンはマイナスになっている。日米ともに共通するのは、経済が極端にデフレまたはインフレになったときに、ダウンサイド・リスクが顕在化しているという点である。

その原因はポートフォリオの資産構成にある。株式

はデフレに弱いため、株式中心のポートフォリオではデフレのときにダウンサイド・リスクが顕在化する。一方、債券はインフレに弱いため、債券中心のポートフォリオはインフレの時代にやられる。安全資産も債券同様インフレに弱いという点では、必ずしも安全とはいえないことがわかる。極端なインフレやデフレに対して抵抗力を持つためには、株式と債券をブレンドしたバランス型ポートフォリオを保有していることが望ましい。これは「中庸がよろしい」という常識にも合致している。以下では数値でこれを検証してみよう。

表1 投資期間5年のケース

	ポートフォリオの資産配分				実質リターン		LPM ₀		LPM ₁		LPM ₂	
	No.	株式	債券	Cash	μ	σ	実測値	理論値	実測値	理論値	実測値	理論値
					%	%	%	%	%	% ²	% ²	
米国	0	0	0	100	0.6	6.8	36.6	42.1	0.903	0.935	3.586	3.330
	1	0	100	0	2.2	10.1	37.9	31.6	0.828	0.923	2.935	4.457
	2	10	90	0	2.8	9.7	28.5	25.9	0.594	0.679	1.872	2.990
	3	20	80	0	3.4	9.6	26.0	21.2	0.459	0.518	1.267	2.145
	4	30	70	0	4.0	9.8	22.5	17.9	0.383	0.426	0.962	1.735
	5	40	60	0	4.6	10.3	20.6	16.0	0.344	0.389	0.861	1.629
	6	50	50	0	5.1	11.1	17.7	15.2	0.333	0.395	0.928	1.765
	7	60	40	0	5.6	12.2	17.1	15.3	0.365	0.434	1.162	2.134
	8	70	30	0	6.1	13.6	18.7	15.8	0.446	0.504	1.651	2.766
	9	80	20	0	6.5	15.1	20.3	16.7	0.576	0.601	2.558	3.713
	10	90	10	0	6.9	16.8	21.0	17.8	0.743	0.725	4.052	5.047
11	100	0	0	7.3	18.7	20.8	19.0	0.935	0.874	6.276	6.846	
日本	0	0	0	100	2.1	5.5	14.3	20.0	0.301	0.272	0.833	0.630
	1	0	100	0	3.0	8.7	14.5	21.9	0.483	0.485	2.240	1.821
	2	10	90	0	3.6	8.5	12.9	17.6	0.399	0.361	1.563	1.273
	3	20	80	0	4.1	9.1	12.7	15.8	0.330	0.338	1.118	1.242
	4	30	70	0	4.6	10.3	13.8	16.0	0.279	0.386	0.885	1.605
	5	40	60	0	5.1	11.9	17.0	17.1	0.287	0.487	0.883	2.382
	6	50	50	0	5.5	13.8	19.3	18.6	0.370	0.631	1.217	3.653
	7	60	40	0	6.0	16.0	20.9	20.2	0.529	0.809	2.014	5.510
	8	70	30	0	6.4	18.3	23.4	21.7	0.736	1.016	3.373	8.043
	9	80	20	0	6.8	20.7	25.3	23.1	0.979	1.247	5.392	11.335
	10	90	10	0	7.2	23.2	27.4	24.4	1.261	1.499	8.176	15.466
11	100	0	0	7.5	25.7	29.2	25.6	1.569	1.770	11.827	20.501	

表1は投資期間5年のシミュレーション結果を、米国（上段）と日本（下段）で要約してある。まず当然のことながら、株式の組入れ比率が大きい（番号の大きい）ポートフォリオになるにつれて、実質リターンの平均μは高くなっているのは日米共通である。

問題はリスクである。どれがリスク最小化ポートフォリオかという点で、通常使われている標準偏差を使う場合と、ダウンサイド・リスクの三つの尺度を使う場合では結論が異なる。表のなかで枠内の数値はそれぞれの列の最小値である。標準偏差で測ると第3番（米国）、第2番（日本）のポートフォリオがリスク最小であるが、ダウンサイド・リスクで測ると株式の組入れ比率がもっと多い第5~7番（米国）、第3~5番（日本）のポートフォリオでリスクが最小となっている。

ところで、表1ではダウンサイド・リスクの三つの尺度について、実測値とともに理論値も示してある。実測値は本稿で用いた米国の78年分、日本の52年分のサンプル・データから計測したものである。そこで得られたのは、統計上はあくまでもサンプルからの数値であって母集団の推計値ではない。かなり長期間をサンプル期間にしてはいるが、それでもまだ完全ではない。

そこでサンプルで計測された数値から、母集団におけるLPMを計測したのが「理論値」である。ポートフォリオkのリターン系列R_kにおいて実測された平

均値μ、標準偏差σから計算される確率密度関数f(R_k)は、

$$f(R_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

であるから、理論値としてのLPM_n^{*}は次の式で計算される。

$$n=0, \text{ LPM}_0^* = \int_{-\infty}^T f(R_k) dr \quad (2)$$

$$n=1, \text{ LPM}_1^* = \int_{-\infty}^T (T-R_k) f(R) dr \quad (3)$$

$$n=2, \text{ LPM}_2^* = \int_{-\infty}^T (T-R_k)^2 f(R) dr \quad (4)$$

4.2 ダウンサイド・リスクの効率的フロンティア

以上の結果は、われわれが現代ポートフォリオ理論の標準的な教科書で学んできた効率的フロンティアを再検討する必要があることを示唆している。表1のデータをもとに、縦軸に平均リターン、横軸のリスクに標準偏差をとった通常の効率的フロンティアを描いたものが図2である。キャッシュのみの第0番ポートフォリオを除いて、株式・債券から構成された危険資産のポートフォリオ群は上に凸型の曲線を描き、そのなかで最もリスクの低い最小分散ポートフォリオが存在するが、それは債券のみの第1番ポートフォリオからさほど遠くない場所に位置している。

通常の標準偏差をリスク（横軸）にとった効率的フロンティアでは右に行くほどリスクは高く、リターンは高いため、どこが最適ポートフォリオかはこの曲線だけからは特定できない。最適ポートフォリオを特定

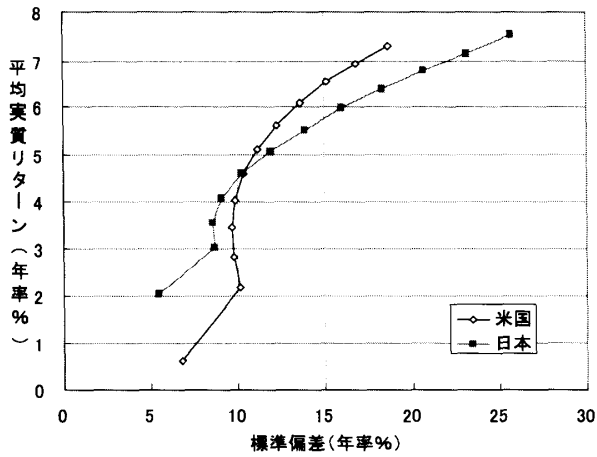


図2 平均-分散アプローチの効率的フロンティア (投資期間5年)

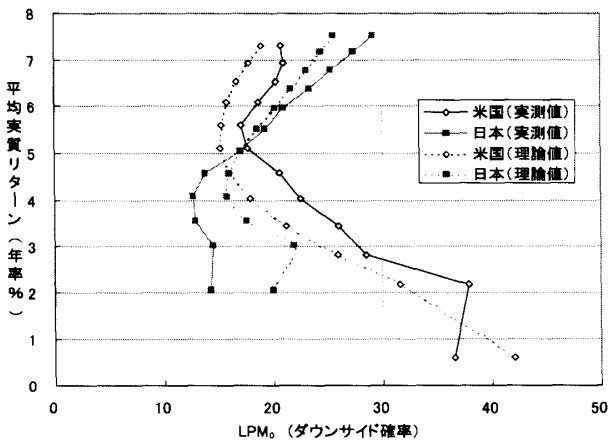


図3 LPM₀ (ダウンサイド確率) の効率的フロンティア

するには、投資家の効用をあらわす下に凸の効用曲線を仮定して、効率的フロンティアとの接点を求めることになる。しかし、現実には投資家の効用を数値で特定することはほとんど不可能である。

ダウンサイド・リスクをもとに効率的フロンティアを描きなおすと、様相は一変する。図3では縦軸の平均リターンは図2と同様であるが、横軸のリスクにLPM₀ (ダウンサイド確率) をとってある。ここで11個のポートフォリオをプロットすると、左側に凸の弓形曲線が現れる。LPM₀を基準にすると、最小リスク・ポートフォリオは弓形の最も出っ張った点である。

ただし、LPM₀ではダウンサイド・リスクを把握するにはやや片手落ちの感がある。なぜならば、それはインフレに何回負けたかという回数を数えた確率であり、「負けるときに、どのくらい負けるのか」というマグニチュードを表していない。地震に例えていえば、どのくらい地震が頻発するかという確率も大事だが、地震が起きた時にどのくらい被害がでそうかのほ

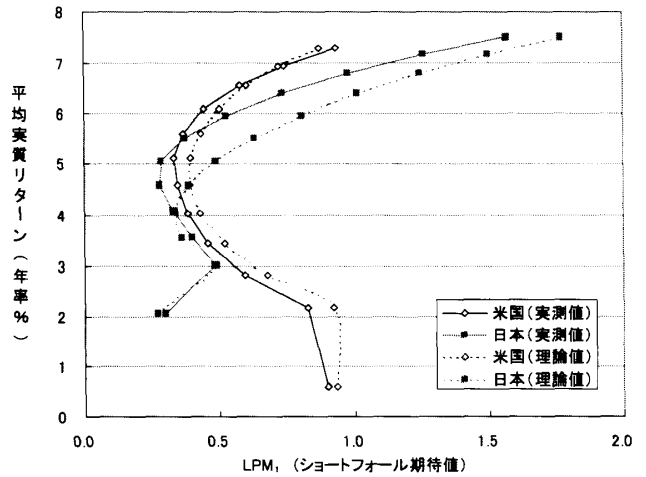


図4 LPM₁ (ショートフォール期待値) の効率的フロンティア

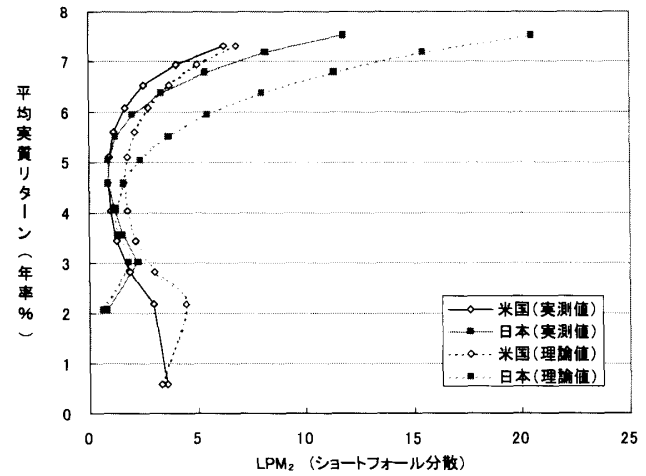


図5 LPM₂ (ショートフォール分散) の効率的フロンティア

うがもっと大事な情報である。

そこで達成目標であるインフレ率にどのくらい負けたか、勝ったかというリターン格差を、確率で重みづけをしたLPM₁ (ショートフォール期待値) で見てみよう。図4は横軸にLPM₁をとった場合の効率的フロンティアである。ここでは、さらに明確に左側に凸の弓形曲線が現れる。LPM₁を基準にすれば、日本の場合には実測値ベースでは第4~5番、理論値では第3番ポートフォリオがリスク最小である。また米国では、日本よりもっと株式の組入れ比率が高い第5~6番ポートフォリオがリスク最小となる。

第3のダウンサイド・リスク尺度であるLPM₂ (ショートフォール分散) は、「負け方のバラツキ具合」を考慮している。LPM₂を横軸にとった図5でも左に凸の弓形曲線ではあるが、LPM₁の場合と比較すると、リスク最小点である第4~5番ポートフォ

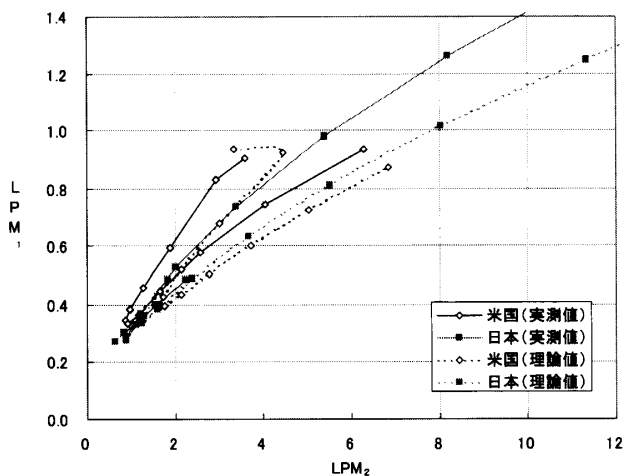


図6 ショートフォールの期待値と分散

リオの近傍ではほとんど縦方向に垂直に近くなっているのが特徴である。LPM₂が急激に増えていくのは、株式の組入れ比率がある一定限度（理論値ベースで日本は40%、米国は60%のあたり）を越えたところからである。

米国では年金基金では株式60%：債券40%が伝統的な政策アセット・ミックスといわれてきたが、ダウンサイド・リスクの観点からみて概ね最適な資産配分といえる。リスクを極端に高めないようにしながら、株式を組入れて高いリターンを追求するには、株式への配分比率60%が上限であろう。

ではダウンサイド・リスクの三つの尺度は、どれを使えばもっとも効果的なのだろうか。すでに述べたとおり、LPM₀はたんに確率を示すだけでマグニチュードに関する情報がないので、少なくともこれは好ましくない。筆者はLPM₁とLPM₂を同時に考慮することをお薦めする。LPM₁はショートフォール側の期待リターンであり、LPM₂はダウンサイドに着目した分散だからである。縦軸にLPM₁、横軸にLPM₂をプロットしたものが図6であるが、注意すべき点は縦軸のリターンがショートフォールなので低いほうがより好ましいという点だ。図6では原点に向かってV字型のグラフが現れるが、このV字の頂点がリスク最小化ポートフォリオとなる。

5. おわりに

株式や債券で年金運用を行ううえでは、将来の年金支給時点までのインフレ率が不確実であるので、購買力を維持するためには実質リターンがプラス、すなわちインフレ率を上回ることを運用目標とすべきである。

ここでのリスクとは、運用期間をつうじた実質リターンがマイナスとなるダウンサイド・リスクである。株式はデフレに弱く、債券はインフレに弱いという性質をもつため、こうした極端な経済状態に対して最も抵抗力が高いポートフォリオが最適といえる。実質リターンがマイナスとなるダウンサイド・リスクを確率(LPM₀)、期待値(LPM₁)、分散(LPM₂)で定義し、それらを最小化する資産配分を、日米の長期データによって検証したところ、標準偏差が最小となるポートフォリオに比べてやや株式の組み入れ比率が高いポートフォリオがダウンサイド・リスクを最小化するポートフォリオであることが確認された。

参考文献

- [1] Bawa, V. S., "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects," *Journal of Financial Economics*, March 1975.
- [2] Bawa, V. S., "Safety First, Stochastic Dominance and Optimal Portfolio Choice," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1978.
- [3] Bernstein, Peter L., *Capital Ideas*, Free Press 1992, 55-56 (青山護・山口勝業訳『証券投資の思想革命』東洋経済新報社1993年, 64-66).
- [4] Harlow, W. V., "Asset Allocation in a Downside-Risk Framework," *Financial Analysts Journal*, September-October 1991 (片岡淳訳、『証券アナリストジャーナル』1994年2月号).
- [5] Markowitz, Harry M., *Portfolio Selection*, Yale University 1959, 188-200.
- [6] Leibowitz, M. L. And Roy D. Henriksson, "Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk," *Financial Analysts Journal*, March-April 1989.
- [7] Leibowitz, M. L., Barder, L. N. and S. Kogelman, *Return Targets and Shortfall Risks—Studies in Strategic Asset Allocation*, McGraw-Hill, 1996.
- [8] Roy, A. D., "Safety First and the Holding of Assets," *Econometrica*, Vol. 20, 1952, 431-439.
- [9] 竹原均, 「下方リスク・モデルの概要と実用上の諸問題」, 証券アナリストジャーナル, 1994年2月号.
- [10] 辰巳憲一, 「ジャジメンタル・クオンツとダウンサイド・リスクについて」 学習院大学経済論集 1996年8月, 87-95.
- [11] 枇々木規雄, 「下方リスクを考慮したポートフォリオ最適化モデル」 慶応経営論集 1999年2月, 85-114.