

## 施設の開設・閉鎖に伴う移動距離変化と頑健な規則的配置

宮川 雅至

大澤 義明  
筑波大学

腰塚 武志

(受理 2002年5月2日; 再受理 2003年9月29日)

**和文概要** 本研究の目的は、施設配置を考える際に施設の開設・閉鎖によって施設の利用可能性が変わることを想定し、そのような変化に対して規則的配置がどの程度頑健であるかを明らかにすることにある。災害時の被害による閉鎖、ならびに社会構造変化による計画的な開設・閉鎖を想定して、それぞれに対する利用者から施設までの距離の変化に着目して頑健性を評価する。得られた結果は以下の通りである：(1)「三角格子状配置が最適である」という通説は災害時の被害による施設閉鎖や計画的な閉鎖を考慮した場合には必ずしも成立しないことを示した。例えば2番目に近い施設までの平均距離は三角格子が最小とはならない。また、計画的な施設閉鎖の場合、閉鎖施設数の割合が大きいときには六角格子が他の規則的配置よりも望ましい。(2)施設の閉鎖に対して、計画者が計画的に閉鎖する場合とランダムに閉鎖する場合との平均距離、標準偏差を数値的に比較し計画の有効性を示した。

**キーワード:** 施設計画, 規則的配置, 開設・閉鎖, 平均距離,  $k$ 次近隣距離分布

### 1. はじめに

都市計画は将来に予測される変化を前提として、その変化に対応することを課題としている。地震、台風、火山噴火等様々な自然災害や火事、事故等人為的な災害が将来に発生する可能性がある上、少子化に伴う小・中学校の統廃合に代表されるように社会的な構造変化が急速に進展している。

阪神・淡路大震災では避難所として利用される教育施設や医療機関等の緊急対応施設にも大きな被害が生じ、その機能が長期的に低下した。被災地域内で構造的被害のあった公立小・中学校は66校(13.4%)に上り、倒壊・全焼・大破という重大な被害を被ったものは25校(5.1%)であった(阪神・淡路大震災 [6])。そして、被災者は復旧までの期間、遠距離通院等の不便を強いられることになった。

また、近年の少子化の進展による学齢人口の減少に伴い、学校統廃合が全国的に進められている。全国の小学校数は1995年の24548から2000年には24106へ1.8%の減少、東京都では1409から1385へ1.7%の減少を示している。一方で、施設によっては需要が急速に伸びており、例えば、急速な高齢化の進展に伴い、老人福祉施設は顕著な増加傾向にある。全国の施設数は1995年の12904から2000年には28643へ122%の増加を示している。

したがって、施設配置計画においても施設数が変化することを前提として、施設配置の安定性を評価する必要がある。しかし、平面上の施設配置を扱った既存研究(例えば谷村 [17], 大澤 [13], 岡部・鈴木 [12], Daskin [4], Drezner [5] 等)においては、ある一時点に対して最適化が行われていることがほとんどである。このような長期間の変化を考慮していない既存の研究方法で精緻に求められた施設配置は、陽に配置の変化を考慮した方法と比較して脆弱である可能性が高い。

本研究の目的は、利用者から最寄り施設への距離を評価尺度としたとき、施設の開設・閉鎖に伴う移動距離の変化に対して、平面上の規則的配置（正方格子，三角格子，六角格子）およびランダム配置（図 1）がどの程度頑健であるかを明らかにすることにある．効率性の指標としての平均距離，公平性の指標としての距離の標準偏差を比較する．

なお，本研究で考察する施設の開設・閉鎖は次の 2 種類である．

1. ランダムな施設閉鎖
2. 計画的な施設閉鎖および施設開設

ランダムな施設閉鎖は地震等の災害によって施設が被害を受けた場合，あるいは計画者が施設を閉鎖する際に移動効率性等の空間的關係を考慮せずに行う場合を想定している．一方，計画的な施設閉鎖・施設開設は計画者が閉鎖施設や新規施設の開設場所をコントロールできる場合を想定している．

本研究では対象領域が無限に広がっていると仮定する．すなわち，図 1 のパターンが連続している状況を想定し，施設密度（施設数 / 領域の面積）を一定として比較を行う．規則的配置を考察対象とする理由は次の通りである：(1) 単純な空間構造である，(2) 利用者分布の偏り，交通条件，地形条件等を考慮する必要がないときは総移動距離最小化問題の最適解となる，(3) 中心地理論において中心地の分布は三角格子が他のパターンより効率的であり，そのパターンが 1930 年代の南ドイツで観察されることが示されている (Christaller [1]) ．

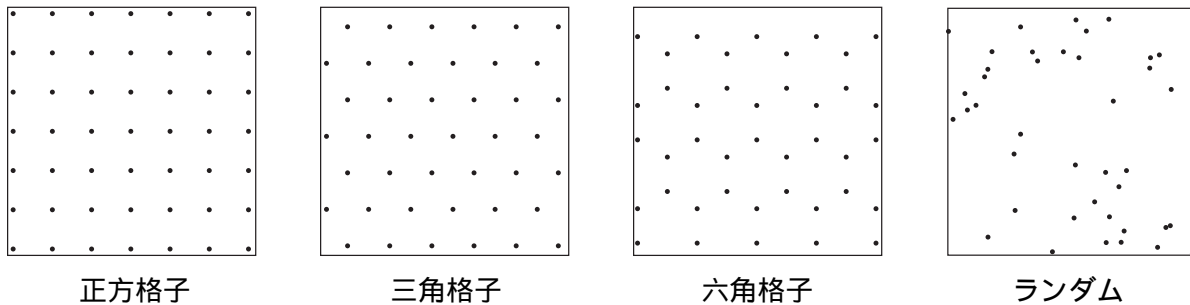


図 1: 規則的配置とランダム配置

実際の施設配置計画は利用者分布の偏り，交通条件，土地利用規制，地形条件等の制約を受けるため，上のような完全に規則的なパターンが現れることはない．しかし，公共施設の配置は公平性に配慮するため，規則的配置に近いと考えられ，柏原 [9] は大阪市の区役所の分布を例としてそれを実証している．そこで，これらの配置を理論的に評価することは施設配置を行う際の共通の理解を得るという点で重要である．

なお，実際の施設配置でも施設を開設・閉鎖した場合の平均距離，標準偏差を数値的に求めることはできる．しかし，結果を直観的に把握でき，解析解が得られることから規則的配置を仮定する．

## 2. ランダムな施設閉鎖

### 2.1. $k$ 次近隣距離分布

まず，施設を一様にランダムに閉鎖した場合に対する施設配置の頑健性や安定性を評価する．施設が閉鎖されない確率（残存率）を  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) とし， $p$  は全ての施設に対して同一であり，施設の閉鎖は互いに独立であると仮定する．

施設が閉鎖されたために，利用できる最も近い施設が，元の配置の 2 番目，3 番目，... に近い施設となる状況を明らかにしよう．最も近い施設を利用できるのはそれが残存している

場合であり、その確率は  $p$  である。2 番目に近い施設を利用するのは、最も近い施設が閉鎖され、かつ 2 番目に近い施設は残存している場合であり、その確率は  $(1-p)p$  である。3 番目以降に近い施設に関しても同様に考えれば利用する確率が求まり、 $k$  番目に近い施設を利用する確率は  $(1-p)^{k-1}p$  となる。これより  $k$  は幾何分布に従うことが分かる。残存率  $p$  が大きいときは最も近い施設までの距離が重要であるが、 $p$  が小さくなるに従って 2 番目以降の距離も考慮しなければならないといえる。

そこで、正方格子、三角格子、六角格子状配置における  $k$  次近隣距離分布を導出し、 $k$  番目に近い施設までの距離がどの位になるのかを明らかにする。距離分布  $f(r)$  は施設までの距離が  $r$  である利用者の密度を表す関数であり、施設までの距離  $R$  が  $r < R \leq r + dr$  の範囲にいる利用者の割合を  $f(r)dr$  と表すことができる。 $k$  次近隣距離分布  $f_k(r)$  は施設が  $k$  番目に近い領域の面積を  $S_k$ 、領域内で施設から距離  $r$  以内にある領域の境界の長さを  $L(r)$  とすると、

$$f_k(r) = \frac{L(r)}{S_k} \quad (2.1)$$

より導かれる(奥平他 [14])。  $k = 1$  とすれば最近隣距離分布  $f_1(r)$  が得られる。図 2 は正方格子、三角格子、六角格子における中央の施設が 1, ..., 7 番目に近い領域を表している。1 番内側の正方形、正六角形、正三角形がそれぞれの施設が最も近い領域であり、外側に向かって 2, 3, 4, 5, 6, 7 番目に近い領域となっている。

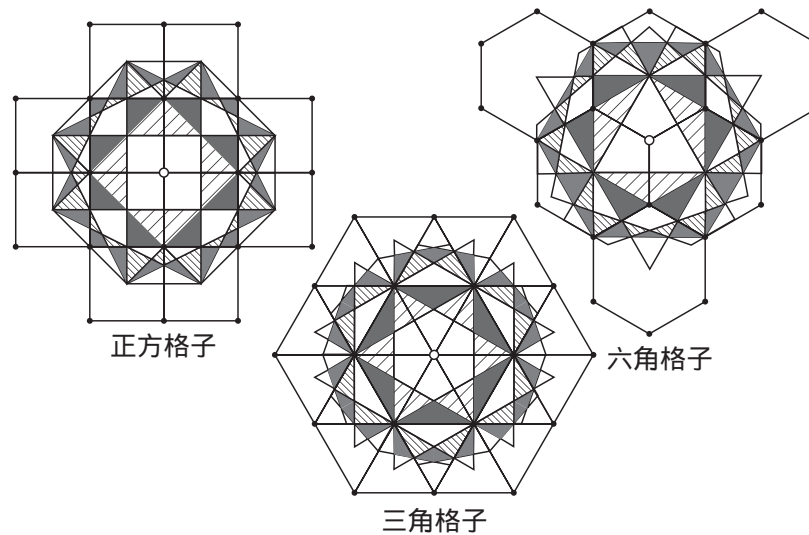


図 2: 施設が 1, ..., 7 番目に近い領域

規則的配置における  $k$  次近隣距離分布  $f_k(r)$  および平均値  $E_k(R)$ , 2 乗の平均値  $E_k(R^2)$  ( $k = 1, \dots, 7$ ) の式は付録に掲載する。正方格子の  $f_1(r)$  は Persson [15] で既に求められており、腰塚 [10] ではさらに  $f_2(r)$  も導出されている。三角格子の  $f_1(r)$  は Holgate [8], 腰塚 [11] で求められている。3 つの規則的配置の  $E_1(R)$  は例えば Puu [16] に求められている。また、腰塚 [10] では正方格子の  $E_1(R), E_2(R), E_3(R)$  が求められている。

施設が密度  $\rho$  で一様にランダムに分布するとき、 $k$  次近隣距離分布と平均距離、分散は Dacey [3] で導出されている

$$f_k(r) = \frac{2\rho\pi r(\rho\pi r^2)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\rho\pi r^2} \quad (2.2)$$

$$E_k(R) = \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \quad (2.3)$$

$$\sigma_k^2 = \left[ \frac{k}{\pi} - \left\{ \frac{(2k-1)!!}{2(2k-2)!!} \right\}^2 \right] \frac{1}{\rho} \quad (2.4)$$

以上求めた  $k$  次近隣距離分布を図 3 に示す．但し，施設密度は  $\rho = 1$  としている．どの配置パターンにおいても分布は単峰であり， $k$  が大きくなるに従い右へ動いていくことが分かる．また，規則的配置の距離分布は山頂が鋭いが，ランダム配置の分布は規則的配置に比べて山頂が丸く，分布の裾が長くなっており，施設から相当遠い利用者も存在する．

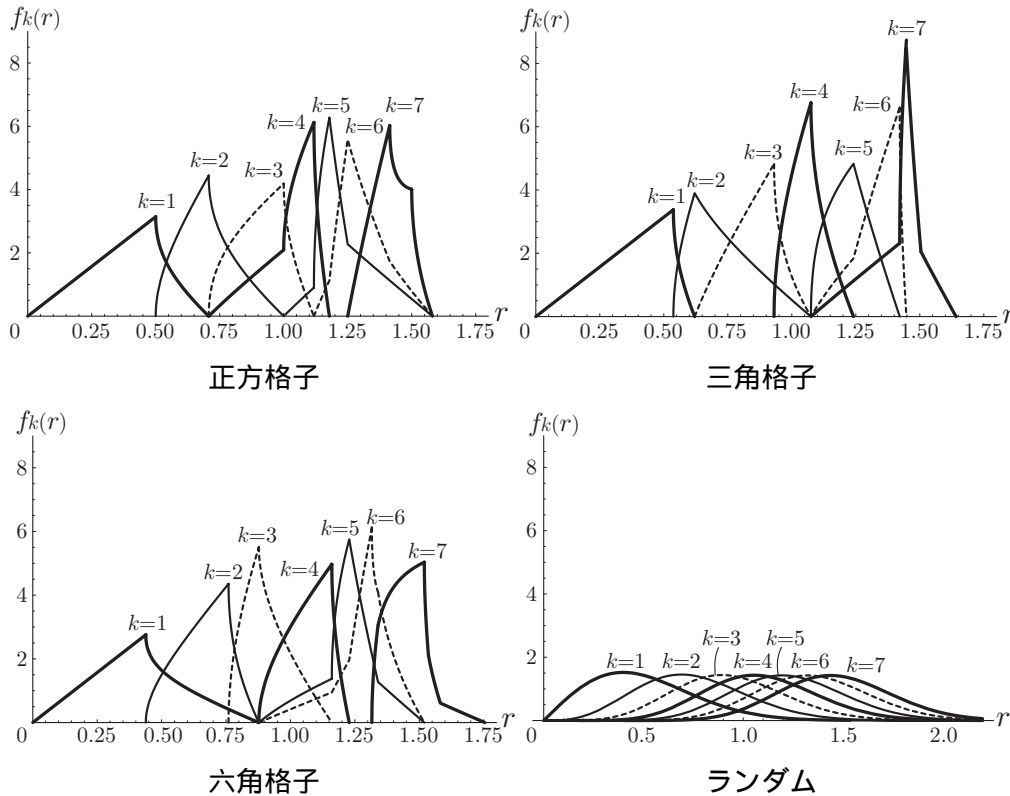


図 3:  $k$  次近隣距離分布

平均距離と標準偏差をまとめたものが図 4 である．最も近い施設までの平均距離  $E_1(R)$  は三角格子が最小となっているが，2 番目  $E_2(R)$  は六角格子，3 番目  $E_3(R)$  は三角格子，4 番目  $E_4(R)$  は正方格子が小さくなっていることが分かる．さらに，5, 6 番目  $E_5(R), E_6(R)$  は六角格子，7 番目  $E_7(R)$  は三角格子が小さくなる．つまり，施設の代替性を考慮すると，三角格子は必ずしも最適な配置ではないといえる． $k$  が大きくなると規則的配置とランダム配置の差も小さくなり，正方格子の  $E_5(R)$  がランダム配置の値を超えるように，これら 4 つの配置の違いはそれ程大きくないことが分かる．一方，標準偏差はランダム配置が明らかに大きい．最も近い施設までの距離の標準偏差  $\sigma_1$  は三角格子が最も小さく，2, 3 番目  $\sigma_2, \sigma_3$  は六角格子，4, 5, 6 番目  $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  は三角格子，7 番目  $\sigma_7$  は正方格子が小さくなっている．

既存研究では最近隣距離の平均値  $E_1(R)$  の比較だけで三角格子の最適性を論じているに過ぎなかった．本研究では平均値と標準偏差を 7 番目まで解析的に求めることにより，3 つ

の規則的配置の差は小さく，三角格子の最適性は必ずしも安定していないことを示すことができた．

平均距離	$E_1(R)$	$E_2(R)$	$E_3(R)$	$E_4(R)$	$E_5(R)$	$E_6(R)$	$E_7(R)$
正方格子	$0.383 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.700 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.908 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.023 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.243 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.309 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.413 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
三角格子	$0.377 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.729 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.854 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.058 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.225 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.326 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.408 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
六角格子	$0.404 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.663 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.909 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.066 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.220 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.282 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.453 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
ランダム	$0.500 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.750 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.938 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.094 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.230 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.354 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$1.466 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

標準偏差	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_7$
正方格子	$0.142 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.103 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.092 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.098 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.108 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.088 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.068 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
三角格子	$0.135 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.119 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.091 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.064 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.077 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.080 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.106 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
六角格子	$0.172 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.096 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.086 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.081 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.109 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.111 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.076 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
ランダム	$0.261 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.272 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.276 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.277 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.278 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.279 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$	$0.279 \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

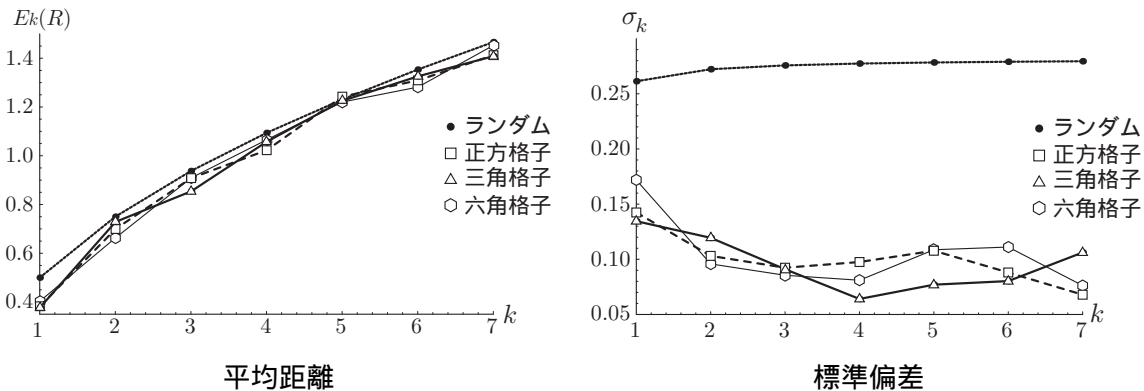


図 4:  $k$  番目に近い施設までの平均距離と標準偏差

## 2.2. 頑健な配置

施設の残存率と平均距離との関係を見ることによって配置の頑健性を評価しよう．どの施設も一様にかつ独立に利用できなくなると仮定する．そのときの平均距離は  $k$  次近隣距離の平均値  $E_k(R)$  と  $k$  番目に近い施設を利用する確率を用いて

$$E(R) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} E_k(R) \quad (2.5)$$

と表される．これを最小とする配置が最適であるとしよう．しかし，全ての  $E_k(R)$  を求めることは不可能なので，最適な配置を厳密に求めることはできない．その一方で，少なくとも  $p = 1$  のときは三角格子が最適であることが分かっており，また式 (2.5) は  $p$  に関して連続関数である．そこで，前節で求めた 7 番目までの  $E_k(R)$  の厳密な値とそれ以降の距離については上限値と下限値を用いることにより，三角格子が最適となり得る  $p$  の下限値を求めることでその目的の一部を果たすことにしよう．

$k$  次近隣距離の平均値  $E_k(R)$  の上限値と下限値は，それぞれ施設が  $k$  番目に近い領域からその施設までの距離の上限値と下限値とすることができる．ここで，施設が  $k$  番目に近い領域とは，図 5 のように領域内に中心を持つ円を描いたとき，円周上にその施設があり，内部に他の  $k-1$  個の施設が含まれるようにできる領域である．したがって， $k$  番目に近い領域から施設までの距離の上限値と下限値は，円周も含めて内部に  $k$  個の施設を含む円の半径の上限値と下限値であるといえる．これは，ある半径  $r$  の円を与えたときにその内部に含まれる施設数  $k$  の上限値と下限値を求めることに帰着する．さて，円の内部に含まれる施設を中心とする正方形の面積の総和と，円の面積との関係を見てみよう（図 6）．両者の差は高々円周と交わる全ての正方形の面積の和である．正方形の 1 辺の長さを  $a$  とすると，正方形内の最大距離は  $\sqrt{2}a$  であるから，円周と交わる正方形は全て，半径がそれぞれ  $r + \sqrt{2}a, r - \sqrt{2}a$  である 2 つの円の間に挟まれた幅  $2\sqrt{2}a$  の円環の中に含まれている (Hilbert and Cohn-Vossen [7])．したがって，

$$\pi(r - \sqrt{2}a)^2 < ka^2 < \pi(r + \sqrt{2}a)^2 \quad (2.6)$$

という関係が成立する．これを变形して  $r$  を  $E_k(R)$  とし，施設密度  $\rho$  を用いて表現すると

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} - \sqrt{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\rho}} < E_k(R) < \left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} + \sqrt{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (2.7)$$

と得られる．

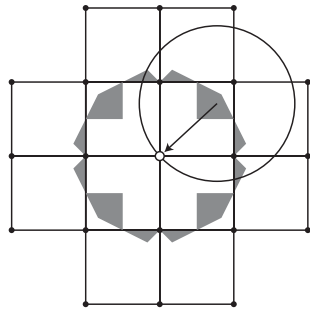


図 5:  $k$  番目に近い領域

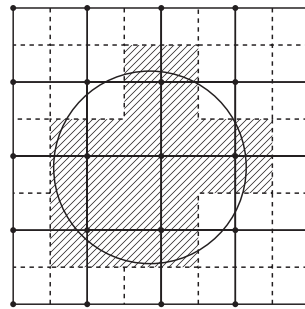


図 6: 円の内部に含まれる施設

式 (2.7) より，平均距離の上限値は

$$\begin{aligned} E(R) &< p \sum_{k=1}^7 (1-p)^{k-1} E_k(R) + p \sum_{k=8}^{\infty} (1-p)^{k-1} \left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} + \sqrt{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\rho}} \\ &= p \sum_{k=1}^7 (1-p)^{k-1} E_k(R) + \frac{p(1-p)^7}{\sqrt{\rho}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi\left(1-p, -\frac{1}{2}, 8\right) + \frac{\sqrt{2}}{p} \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

とできる．ここで  $\Phi$  はレルヒの超越関数  $\Phi(z, s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / (a+k)^s$ ．一方下限値は， $E_8(R) > E_7(R), E_9(R) > E_7(R), E_{10}(R) > E_7(R), \dots$  であり， $k = 25$  までは  $E_7(R)$  の方が式 (2.7) の左辺よりも大きいので，両者の大きい方を用いることにすると，

$$\begin{aligned}
 E(R) &> p \sum_{k=1}^7 (1-p)^{k-1} E_k(R) + p \sum_{k=8}^{25} (1-p)^{k-1} E_7(R) + p \sum_{k=26}^{\infty} (1-p)^{k-1} \left( \sqrt{\frac{k}{\pi}} - \sqrt{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\rho}} \\
 &= p \sum_{k=1}^7 (1-p)^{k-1} E_k(R) + p \sum_{k=8}^{25} (1-p)^{k-1} E_7(R) \\
 &\quad + \frac{p(1-p)^{25}}{\sqrt{\rho}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi \left( 1-p, -\frac{1}{2}, 26 \right) - \frac{\sqrt{2}}{p} \right\} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

となる．三角格子，六角格子についても同様に平均距離の上限値と下限値を求めることができる．これより三角格子の上限値が正方格子の下限値，および六角格子の下限値よりも小さくなる  $p$  の範囲は  $p$  に関する不等式を解くことにより，

$$0.6869 < p \leq 1 \quad (2.10)$$

と求まる．単純な論法ではあるが，少なくとも残存率が 68.7% 以上のときには三角格子が正方格子や六角格子よりも効率の良い配置になることを証明できた．また，標準偏差で同様の範囲を求めると， $0.8875 < p \leq 1$  と得られる．図 7 は上で求めた平均距離と標準偏差の三角格子の上限値，および正方格子・六角格子の下限値を表しており，上の範囲で三角格子の上限値が正方格子や六角格子の下限値よりも小さくなっていることが読み取れる．

施設が密度  $\rho$  で一様にランダムに分布しているとき，残存率を用いた平均距離と分散は Clark and Evans [2] から

$$E(R) = \frac{1}{2\sqrt{p\rho}} \quad (2.11)$$

$$\sigma^2 = \frac{4 - \pi}{4\pi p\rho} \quad (2.12)$$

となる．規則的配置と平均距離を比較すると， $p = 1$  のときには正方格子は 23.5%，三角格子は 24.6%，六角格子は 19.3% ランダム配置より効率が良いことが分かる． $p$  が小さくなるとその差は縮まり， $p = 0.5$  のときには上限値で見ると正方格子は 9.7%，三角格子は 10.0%，六角格子は 9.1% となる．

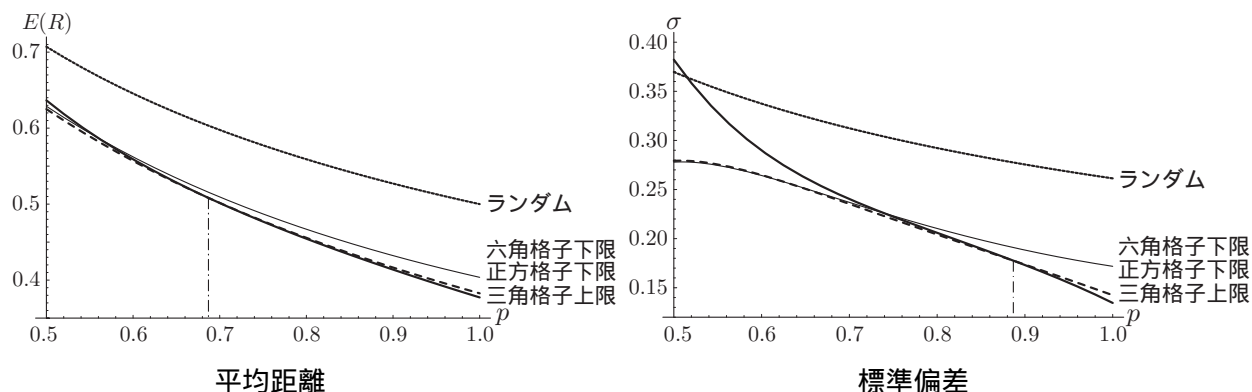


図 7: ランダムな施設閉鎖における平均距離と標準偏差

さて、実際の施設配置は規則的配置でもランダム配置でもなく、両者の中間と思われる配置であることが多い。図 8 中央はつくば市北部の小学校（13 校）の配置である。ここでは、小学校をランダムに閉鎖した際の平均距離、標準偏差を同一密度の三角格子状配置、ランダム配置と比較する。

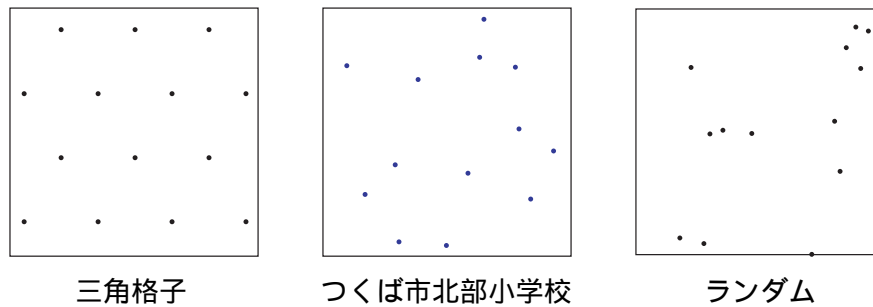


図 8: つくば市北部の小学校配置

図 9 は 3 つの配置の平均距離と標準偏差を表している。ただし、小学校配置の平均距離、標準偏差は閉鎖施設数を 1, 2, ..., 6 としたときの閉鎖の組合せパターンをランダムに与えて、それぞれの個別パターンごとに有限領域内で解析的に求める。この計算過程を 50 回繰り返すというシミュレーションの平均値をとっている。三角格子状配置については導出済みの上限値と下限値、ランダム配置については無限領域を仮定した理論式 (2.11), (2.12) を用いている。小学校配置の平均距離と標準偏差はいずれも三角格子とランダムのほぼ中間にあることが分かる。したがって、モデルで得られた結果は実際の配置に対してもある程度成立し、現実に適用する際にも十分意味があるといえるだろう。

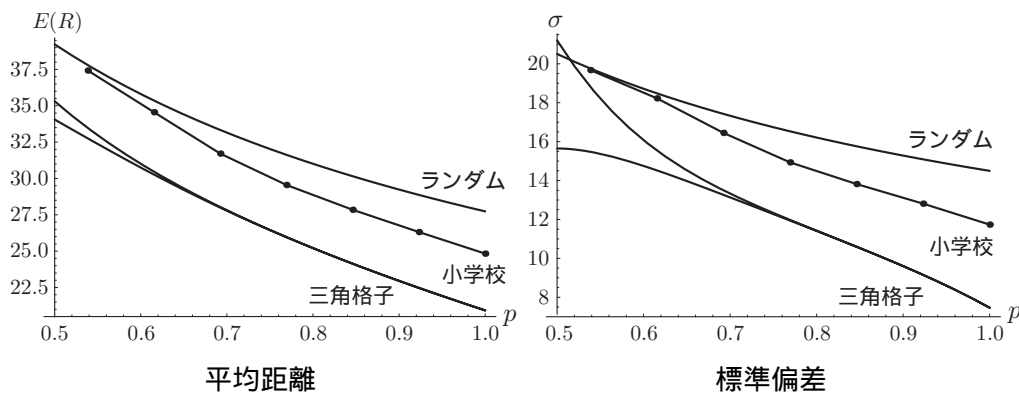


図 9: 小学校配置における平均距離と標準偏差

### 3. 計画的な施設閉鎖および施設開設

#### 3.1. 施設閉鎖の影響

施設を計画的に閉鎖した場合における施設配置の頑健性や安定性を評価する。施設を 0~50%まで計画的に閉鎖する状況を考え、その影響を比較する。閉鎖方法は移動効率性の減少が最も少なくなるように次のように決める。

正方格子、六角格子の場合は施設を 50%閉鎖した時点でそれぞれ図 10, 図 14 の 50%閉鎖配置となるように閉鎖候補施設を決め、その候補施設を 1 つずつランダムに閉鎖していく。三角格子の場合は、丁度 1/3 の施設を閉鎖した時点で六角格子になるように閉鎖し、その先は六角格子のルールを適用する。この方法は施設閉鎖による最大距離の増加が最小になることを目指したものである。



図 10 は正方格子状配置から既存施設を 12.5%, 25%, 50% 閉鎖したときの配置例である。実際には無限平面を仮定しているのので、このパターンが無限に繰り返される状況を想定している。が閉鎖した施設、が残った施設、破線が残った施設の勢力圏（施設が最も近い領域）を表している。

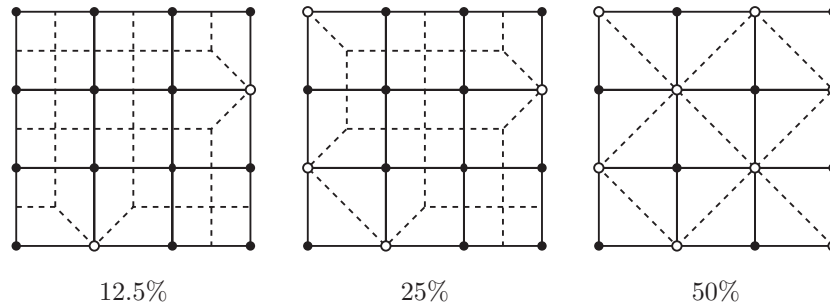


図 10: 正方格子状配置での閉鎖配置（破線が施設の勢力圏）

正方格子から施設を閉鎖したときの平均距離，分散は元の配置の勢力圏に着目して次のように求められる。閉鎖施設数の割合を  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1/2)$ ，対象領域の面積を  $S_1$ ，施設密度を  $\rho$  とすると，対象領域内には  $\rho S_1$  個の施設があり，その内で閉鎖をした  $\alpha \rho S_1$  個の施設の勢力圏は周囲の 4 施設に分割され図 11 (a) のようになる。したがって，閉鎖施設の元の勢力圏内では隣接する施設までの距離を測り，それ以外は閉鎖前と同様に最も近い施設までの距離を測ればよい。

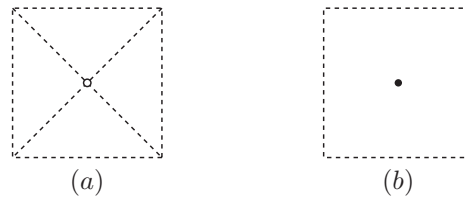


図 11: 閉鎖による勢力圏の分割 (a) と閉鎖前の勢力圏 (b)

式 (2.1) より最近隣距離分布  $f_1(r)$  を求めれば，それを用いて平均距離，分散が次式のように得られる

$$E(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left[ \sqrt{2} + 2(2 - \sqrt{2})\alpha + \left\{ 1 + 2(\sqrt{2} - 1)\alpha \right\} \log(1 + \sqrt{2}) \right] \quad (3.1)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} (0.317\alpha + 0.383).$$

$$\sigma^2 = \frac{1 + 2\alpha}{6\rho} - [E(R)]^2 \quad (3.2)$$

$$\approx \frac{1}{\rho} (-0.100\alpha^2 + 0.091\alpha + 0.020).$$

導出方法から明らかなように，閉鎖施設数が同じ，すなわち  $\alpha$  が一定であれば，隣り合う施設が閉鎖されない限り，閉鎖箇所依存せず上式は成立する。

図 12 は三角格子状配置から既存施設を 12.5%, 25%, 50% 閉鎖したときの配置例である。

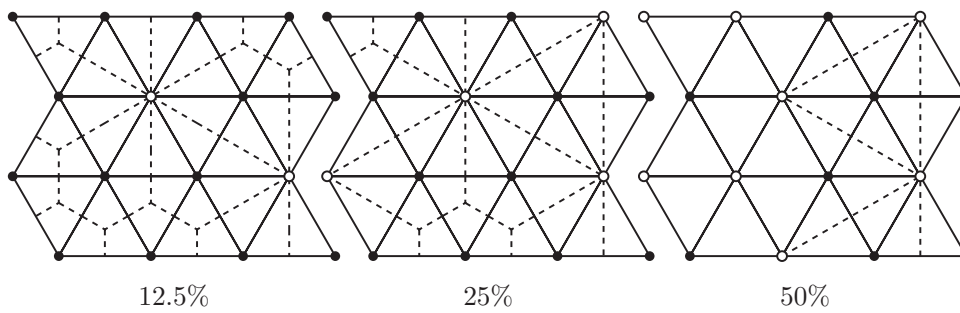


図 12: 三角格子状配置での閉鎖配置 (破線が施設の勢力圏)

三角格子から施設を閉鎖したとき,  $0 \leq \alpha \leq 1/3$  ならば, 閉鎖をした  $\alpha\rho S_1$  個の施設の勢力圏は周囲の 6 施設に分割され図 13 (a) のようになる.  $1/3 < \alpha \leq 1/2$  ならば,  $\alpha$  が  $1/3$  を超えて新たに閉鎖をした  $(\alpha - 1/3)\rho S_1$  個の施設の勢力圏は, 後述する六角格子の場合と同様に周囲の 3 施設に分割され図 15 (a) のようになる.

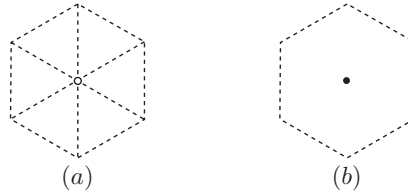


図 13: 閉鎖による勢力圏の分割 (a) と閉鎖前の勢力圏 (b)

正方格子の場合と同様に平均距離, 分散が次式のように得られる

$$E(R) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{1}{3} + (\sqrt{3} - 1)\alpha + \frac{1-3\alpha}{2} \log \sqrt{3} + \frac{\alpha}{2} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} & (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}) \\ \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(3\alpha - 1) \log \sqrt{3} - \frac{3\alpha-2}{6} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} & (\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho}}(0.352\alpha + 0.377) & (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}}(0.477\alpha + 0.377) & (\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}) \end{cases}.$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{54\rho}(5 + 12\alpha) - [E(R)]^2 & (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}) \\ \frac{\sqrt{3}}{18\rho}(1 + 6\alpha) - [E(R)]^2 & (\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{\rho}(-0.124\alpha^2 + 0.120\alpha + 0.018) & (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{\rho}(-0.227\alpha^2 + 0.257\alpha - 0.016) & (\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}) \end{cases}.$$

図 14 は六角格子状配置から既存施設を 12.5%, 25%, 50%閉鎖したときの配置例である. 50%閉鎖すると, 六角格子は三角格子になることが分かる.

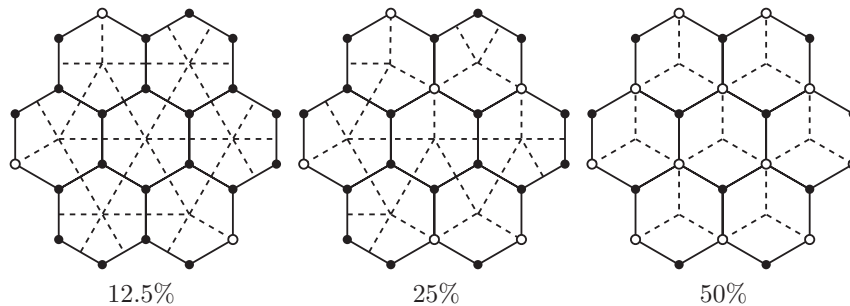


図 14: 六角格子状配置での閉鎖配置 (破線が施設の勢力圏)

六角格子から施設を閉鎖したとき，閉鎖をした  $\alpha\rho S_1$  個の施設の勢力圏は周囲の3施設に分割され図 15 (a) のようになる．

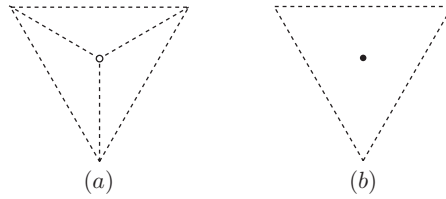


図 15: 閉鎖による勢力圏の分割 (a) と閉鎖前の勢力圏 (b)

正方格子の場合と同様に平均距離，分散が次式のように得られる

$$E(R) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}\rho} \left\{ \frac{1}{3} + \alpha \log \sqrt{3} + \frac{1-2\alpha}{6\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} \quad (3.5)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} (0.260\alpha + 0.404).$$

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{3}}{27\rho} (3 + 4\alpha) - [E(R)]^2 \quad (3.6)$$

$$\approx \frac{1}{\rho} (-0.067\alpha^2 + 0.047\alpha + 0.030).$$

### 3.2. 施設開設の影響

施設を計画的に開設した場合における施設配置の頑健性や安定性を評価する．施設を 0～50%まで開設する状況を考え，その影響を比較する．開設方法は移動効率性を考慮して次のように決める．

1. 施設は格子の中央に開設する．
2. 三角格子に限り，隣り合う格子には開設しない．

ルール1は既存施設から最も遠い地点に開設することにより，開設による最大距離の減少が最大となることを目指したものである．ルール2は三角格子の場合には，図 19(a) のように開設した施設の勢力圏が開設した格子の隣の格子にも現れることから，効率的に開設を行うために付加するものである．

図 16 は正方格子状配置へ新規施設 を 12.5%，25%，50%開設したときの配置例である．50%開設を実現するためには，半分の格子に開設すればよい．

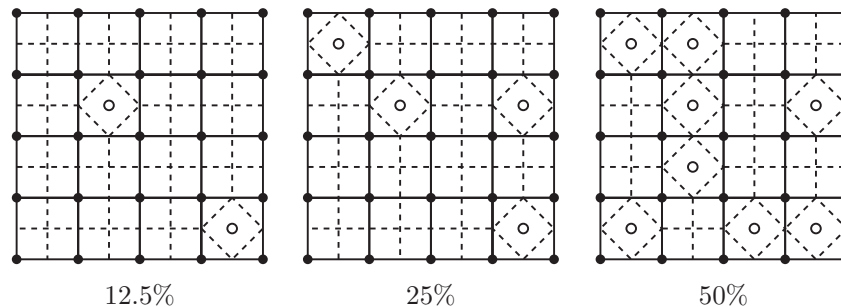


図 16: 正方格子状配置での開設配置（破線が施設の勢力圏）

正方格子に施設を開設したときの平均距離，分散は次のように求められる．閉鎖の場合と異なり，施設の勢力圏ではなく，格子に着目する方が導出が容易である．開設施設数の割合を  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1/2)$ ，対象領域の面積を  $S_1$ ，施設密度を  $\rho$  とすると，対象領域内には施設

数と同じ  $\rho S_1$  個の格子があり，その内で開設をした  $\alpha\rho S_1$  個の格子は図 17 (a)，開設をしなかった  $(1 - \alpha)\rho S_1$  個の格子は図 17 (b) のようになる．

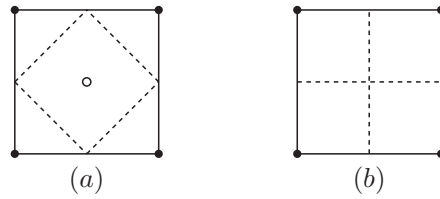


図 17: 施設を開設した格子 (a) と開設前の格子 (b)

したがって，式 (2.1) より最近隣距離分布  $f_1(r)$  を求めれば，それを用いて平均距離，分散が次式のように得られる

$$E(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left[ \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})\alpha + \frac{1}{2} \left\{ 2 + (\sqrt{2} - 2)\alpha \right\} \log(1 + \sqrt{2}) \right] \quad (3.7)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} (-0.112\alpha + 0.383).$$

$$\sigma^2 = \frac{2 - \alpha}{12\rho} - [E(R)]^2 \quad (3.8)$$

$$\approx \frac{1}{\rho} (-0.013\alpha^2 + 0.002\alpha + 0.020).$$

上式は開設施設数が同じ，すなわち  $\alpha$  が一定であれば，開設箇所に依存せず成立する．

図 18 は，三角格子状配置へ新規施設を 12.5%，25%，50%開設したときの配置例である．50%開設を実現するためには，4つの格子に対して1つ開設すればよい．

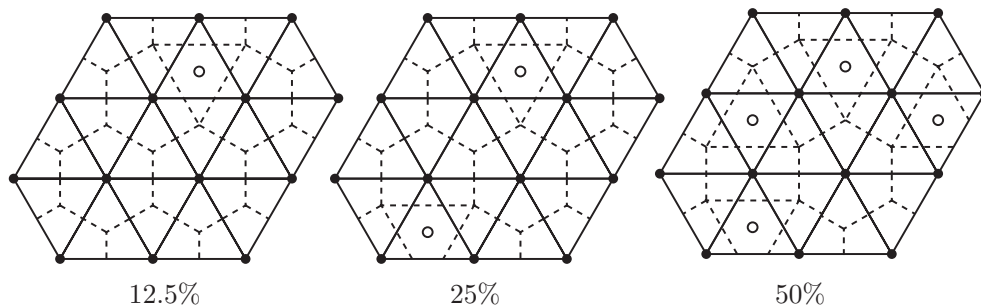


図 18: 三角格子状配置での開設配置（破線が施設の勢力圏）

三角格子の場合，4つの格子をまとめたものは対象領域内に  $\rho S_1/2$  個ある．その内，開設をした格子が含まれている図 19 (a) は  $\alpha\rho S_1$  個，含まれていない図 19 (b) は  $(1/2 - \alpha)\rho S_1$  個存在する．

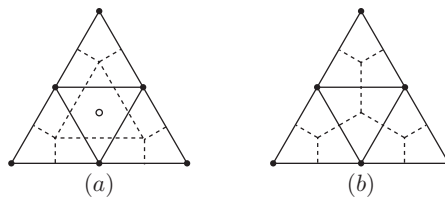


図 19: 施設を開設した格子 (a) と開設前の格子 (b)

正方格子の場合と同様に平均距離，分散が次式のように得られる

$$E(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{2} \log \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{18} \alpha \log(2 + \sqrt{3}) \right\} \quad (3.9)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} (-0.092\alpha + 0.377).$$

$$\sigma^2 = \frac{5-2\alpha}{18\sqrt{3}\rho} - [E(R)]^2 \quad (3.10)$$

$$\approx \frac{1}{\rho} (-0.008\alpha^2 + 0.005\alpha + 0.018).$$

図 20 は，六角格子状配置へ新規施設を 12.5%，25%，50%開設したときの配置例である．50%開設を実現するためには，全ての格子に開設しなければならない．50%開設すると，六角格子は三角格子になることが分かる．

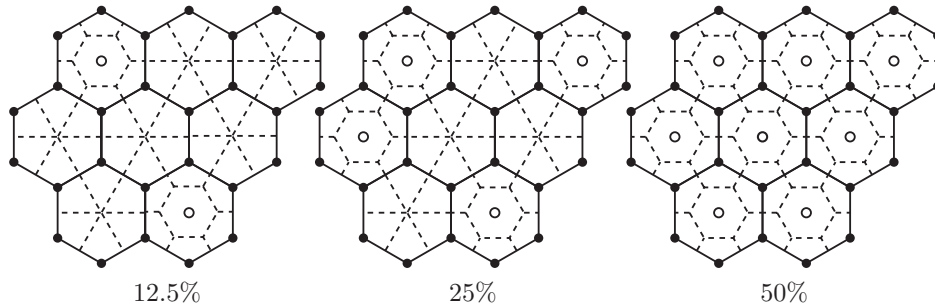


図 20: 六角格子状配置での開設配置（破線が施設の勢力圏）

六角格子の場合，対象領域内には施設数の半分の  $\rho S_1/2$  個の格子があり，その内で開設をした  $\alpha\rho S_1$  個の格子は図 21 (a)，開設をしなかった  $(1/2 - \alpha)\rho S_1$  個の格子は図 21 (b) のようになる．

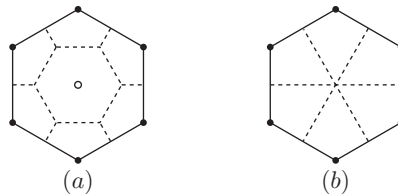


図 21: 施設を開設した格子 (a) と開設前の格子 (b)

正方格子の場合と同様に平均距離，分散が次式のように得られる

$$E(R) = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2(1-\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} \alpha + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \log \sqrt{3} + \frac{1-2\alpha}{6\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} \quad (3.11)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} (-0.191\alpha + 0.404).$$

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{3}}{81\rho} (9 - 8\alpha) - [E(R)]^2 \quad (3.12)$$

$$\approx \frac{1}{\rho} (-0.037\alpha^2 - 0.017\alpha + 0.030).$$

施設を計画的に開設・閉鎖したときの平均距離と標準偏差の変化は図 22 のようになる．但し，施設密度は  $\rho = 1$  としている．閉鎖の場合の  $\alpha$  は  $-\alpha$  として表現し， $\alpha = -0.5$  が

50%の施設を閉鎖した場合に相当する．規則的配置の平均距離は施設閉鎖によって線形に増加し，開設によって線形に減少することが分かる．三角格子が望ましいのは施設数の増減が小さいとき（閉鎖 15.6%未満，開設 26.6%未満）だけであることが分かる．逆に増減が大きいつき（閉鎖 36.7%以上，開設 26.6%以上）は六角格子が望ましい．これは，六角格子は開設・閉鎖によって次第に三角格子に近付いていくためである．正方格子は施設を閉鎖する場合には三角格子と六角格子の間に現れ，開設する場合には最適な配置とはなり得ない．

一方，標準偏差は施設を開設しても必ずしも小さくならず，閉鎖しても必ずしも大きくならない．最適な配置が現れる順序は平均距離の場合と同じで，増減が小さいとき（閉鎖 8.1%未満，開設 35.9%未満）は三角格子，増減が大きいつき（閉鎖 35.9%以上，開設 36.4%以上）は六角格子となる．

図 22 から，施設数の変化に対して三角格子の平均距離・標準偏差の変化が大きく，一方で正方格子や六角格子の値は相対的に安定していることが分かる．三角格子は現状では最適であっても，施設数が変化する場合には不安定であるといえる．

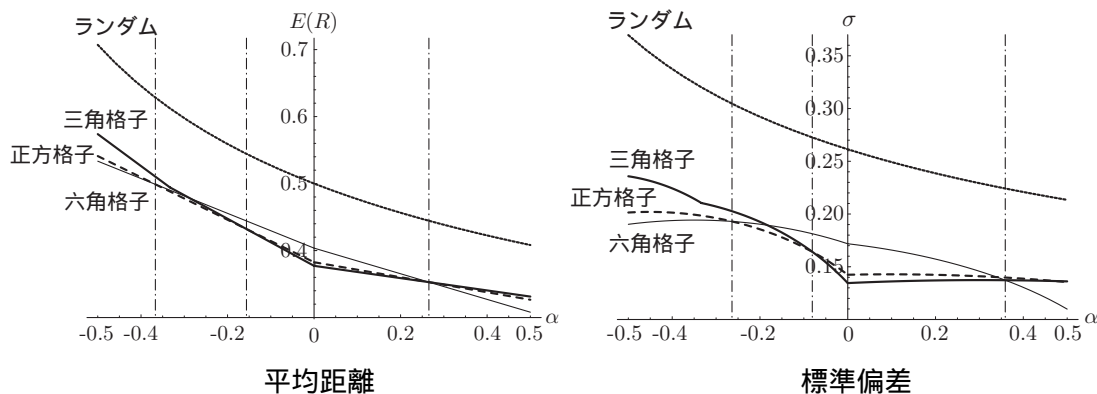


図 22: 計画的な施設開設・閉鎖における平均距離と標準偏差

3種類の規則的配置において施設を開設・閉鎖した場合には，元の配置とは異なる配置が現れる．しかし，施設がランダムに分布している場合には，施設の開設や閉鎖を行っても，ランダムであることに変わりはない．そこで，ランダム配置との比較によって規則的配置の違いを見てみよう．施設が密度  $\rho$  で一様にランダムに分布しているとき，施設を開設・閉鎖したときの平均距離，標準偏差は式 (2.11), (2.12) から得られる．規則的配置の平均距離をランダム配置の場合と比較すると，開設・閉鎖を行わないときは正方格子は 23.5%，三角格子は 24.6%，六角格子は 19.3%ランダム配置よりも効率が良い．差が最も小さくなるのは三角格子で 43.2%閉鎖したときと六角格子で 14.8%閉鎖したときの 18.4%である．したがって，開設・閉鎖を行っても，規則的配置は少なくとも 18.4%ランダム配置より効率が良いといえる．

標準偏差を比較すると，開設・閉鎖を行わないときは正方格子は 70.3%，三角格子は 73.5%，六角格子は 56.8%ランダム配置よりも公平性が高い．差が最も小さくなるのは三角格子で 26.1%閉鎖したときと六角格子で 10.9%開設したときの 55.7%である．平均距離の場合と比べると，規則的配置が特に公平性という点で有効であることが分かる．

### 3.3. ランダムな閉鎖との比較

3.1節で得られた結果を 2.2節の結果と比較しよう．例えば 20%の施設が利用できない場合，ランダムな閉鎖の場合には三角格子の平均距離が他の配置に比べて小さくなる．しかし，同じ 20%であっても，計画的な閉鎖の場合には正方格子が最適となる．このことは，計画者の

コントロールが存在するか否かで，最適な配置が異なるということを示唆している．

図 23 は施設を 0~50%までランダムに閉鎖した場合と計画的に閉鎖した場合の平均距離，標準偏差の変化を表している．上からランダムな閉鎖の上限値，下限値，計画的な閉鎖の順になっている．計画的な閉鎖の  $\alpha$  は  $p = 1 - \alpha$  という関係を用いて  $p$  で表現し，したがって 3 本は  $p = 1.0$  で同一の値をとる．平均距離，標準偏差のいずれも常に計画的な閉鎖の方が小さく， $p$  が小さくなるにつれて両者の差が大きくなることが確認できる．

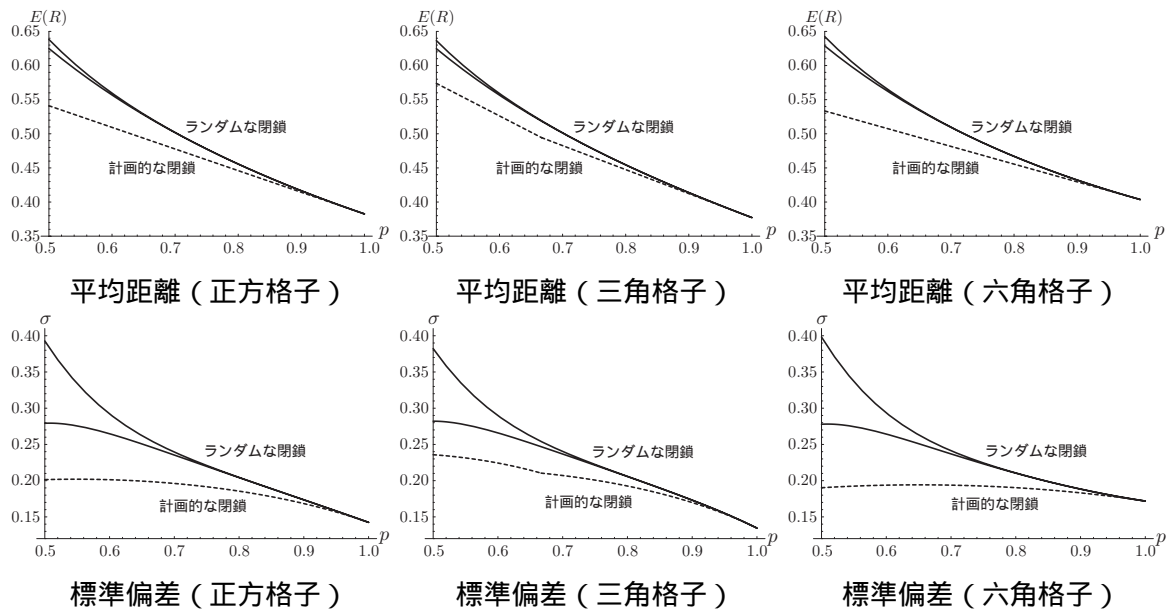


図 23: ランダムな閉鎖と計画的な閉鎖における平均距離と標準偏差

50%の施設が利用できない場合，両者の平均距離の差は正方形では 13.4%，三角格子では 8.1%，六角格子では 15.2%となる．一方，標準偏差は正方形では 27.9%，三角格子では 16.4%，六角格子では 31.5%となる．計画者のコントロール，例えば震災時に隣り合う施設が利用不可能とならないように耐震補強を行うこと等，によってこの差の分だけサービスレベルの低下を抑えることができるといえる．

#### 4. おわりに

本研究では，厳密な結果を得るために理論化が容易な規則的配置とランダム配置を対象として頑健性を評価した．得られた主たる結論は次の 2 点である．

第一に，「三角格子状配置が最適である」という通説は災害時の被害による施設閉鎖や計画的な閉鎖を考慮した場合には，必ずしも成立しないことを示した．例えば 2 番目に近い施設までの平均距離は三角格子が最小とはならない．また，計画的な閉鎖の場合，閉鎖施設数の割合が大きいときには六角格子が他の規則的配置よりも望ましい．

第二に，計画者が意図して閉鎖する場合とランダムに閉鎖する場合との平均距離，標準偏差を数値的に比較し計画の有効性を示した．例えば 50%の施設を閉鎖する状況において，計画者が隣り合う施設が利用不可能にならないようにすれば，ランダムに閉鎖するときと比べて平均距離を正方形で 13%，三角格子で 8%，六角格子で 15%，標準偏差を正方形で 28%，三角格子で 16%，六角格子で 32%小さくできることが分かった．

## 謝辞

糸井川栄一先生（筑波大学），田口東先生（中央大学），栗田治先生（慶應義塾大学）には論文の内容に関して貴重な御助言を頂きました。また，匿名の査読者には論文を改訂するにあたり，表現を適切にすべく詳細なご意見を賜りました。心より御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] W. Christaller: *Die zentralen Orte in Süddeutschland* (Gustav Fische, 1933) (江沢譲爾訳: 都市の立地と発展 (大明堂, 1969)).
- [2] P.J. Clark and F.C. Evans: Distance to nearest neighbor as a measure of spatial relationships in populations. *Ecology*, **35**(1954)85–90.
- [3] M.F. Dacey: Two-dimensional random point patterns: A review and an interpretation. *Papers of the Regional Science Association*, **13**(1968)41–55.
- [4] M.S. Daskin: *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications* (John Wiley & Sons, 1995).
- [5] Z. Drezner: *Facility Location: A Survey of Applications and Methods* (Springer-Verlag, 1995).
- [6] 阪神・淡路大震災調査報告編集委員会（編）：都市安全システムの機能と体制. 阪神・淡路大震災調査報告 (丸善, 1999).
- [7] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie* (Springer, 1932) (芹沢正三訳: 直観幾何学 (みすず書房, 1966)).
- [8] P. Holgate: The distance from a random point to the nearest point of a closely packed lattice. *Biometrika*, **52**(1965)261–263.
- [9] 柏原士郎: 地域施設計画論: 立地モデルの手法と応用 (鹿島出版会, 1991).
- [10] 腰塚武志: 都市施設の密度と利用者からの距離との関係について. 都市計画論文集, **20**(1985)85–90.
- [11] 腰塚武志: 空間分布モデル. 日本建築学会（編）：建築・都市計画のためのモデル分析の手法 (井上書院, 1992), 35–50.
- [12] 岡部篤行, 鈴木敦夫: 最適配置の数理 (朝倉書店, 1992).
- [13] 大澤義明: 施設配置理論モデル. 日本建築学会（編）：建築・都市計画のためのモデル分析の手法 (井上書院, 1992), 136–149.
- [14] 奥平耕造, 腰塚武志, 他: 地域研究 (その1). オペレーションズ・リサーチ, **24**(1979)152–159.
- [15] O. Persson: Distance methods: the use of distance measurements in the estimation of seedling density and open space frequency. *Studia Forestalia Suecica*, **15**(1964)1–68.
- [16] T. Puu: *Mathematical Location and Land Use Theory: An Introduction* (Springer-Verlag, 1997).
- [17] 谷村秀彦: 施設配置計画の数理. 谷村秀彦, 梶秀樹, 池田三郎, 腰塚武志: 都市計画数理 (朝倉書店, 1986), 56–95.



## A 付録

規則的配置における  $k$  次近隣距離分布  $f_k(r)$  および平均値  $E_k(R)$ , 2乗の平均値  $E_k(R^2)$  ( $k = 1, \dots, 7$ ) を以下に示す. 但し, 施設密度を  $\rho$  とする.

正方格子

$$f_1(r) = \begin{cases} 2\rho\pi r & \left(0 < r \leq \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\right) \\ 2\rho\pi r - 8\rho r \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} & \left(\frac{1}{2\sqrt{\rho}} < r < \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\right) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$f_2(r) = \begin{cases} 8\rho r \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} & \left(\frac{1}{2\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\right) \\ 2\rho\pi r - 8\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}} & \left(\frac{1}{\sqrt{2\rho}} < r < \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$f_3(r) = \begin{cases} 2\rho\pi r + 8\rho r \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2\rho}} < r \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\arcsin \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} < r < \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho}}\right) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$f_4(r) = \begin{cases} 8\rho r \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2\rho}} < r \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}}\right) & \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho}} < r < \frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{\rho}}\right) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$f_5(r) = \begin{cases} 8\rho r \left(-\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\frac{\pi}{4} + 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\frac{5}{4}\pi - 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}}\right) & \left(\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{5}{4\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\frac{3}{4}\pi - \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}}\right) & \left(\frac{5}{4\sqrt{\rho}} < r < \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{\rho}}\right) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$f_6(r) = \begin{cases} 8\rho r \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(-\frac{\pi}{2} + 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{\rho}} < r \leq \frac{5}{4\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} - 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\frac{5}{4\sqrt{\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{2}{\rho}}\right) \\ 8\rho r \left(-\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{2\sqrt{\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\rho r}} - 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}}\right) & \left(\sqrt{\frac{2}{\rho}} < r < \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{\rho}}\right) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$f_7(r) = \begin{cases} 8\rho r \left( -\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{\sqrt{\rho r}} + 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} \right) & \left( \frac{5}{4\sqrt{\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{2}{\rho}} \right) \\ 8\rho r \left( -\frac{\pi}{4} + 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho r}} \right) & \left( \sqrt{\frac{2}{\rho}} < r \leq \frac{3}{2\sqrt{\rho}} \right) \\ 8\rho r \left( -\frac{\pi}{4} + 2 \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho r}} - \arccos \frac{3}{2\sqrt{\rho r}} \right) & \left( \frac{3}{2\sqrt{\rho}} < r < \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$E_1(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left\{ \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$E_1(R^2) = \frac{1}{6\rho} \quad (\text{A.9})$$

$$E_2(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} (2\sqrt{2} - 1) \left\{ \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$E_2(R^2) = \frac{1}{2\rho} \quad (\text{A.11})$$

$$E_3(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left\{ -4 - \sqrt{2} + 4\sqrt{5} - (1 + 2\sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) \right. \\ \left. + \log(2 + \sqrt{5}) + 8 \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$E_3(R^2) = \frac{5}{6\rho} \quad (\text{A.13})$$

$$E_4(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left\{ -4 + 11\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \log(3\sqrt{2} - 3) \right. \\ \left. + 10\sqrt{5} \log \frac{1 + \sqrt{10}}{3} - 8 \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} \right\} \quad (\text{A.14})$$

$$E_4(R^2) = \frac{19}{18\rho} \quad (\text{A.15})$$

$$E_5(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left\{ 24 - 20\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 7\sqrt{10} + 10\sqrt{5} \log \frac{9(5 + \sqrt{5})}{20\sqrt{2} + 22\sqrt{5}} \right. \\ \left. + 8 \log \frac{4}{1 + \sqrt{5}} + \log \frac{3 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}} + 2\sqrt{2} \log \frac{2 + \sqrt{5}}{9(\sqrt{2} - 1)} \right\} \quad (\text{A.16})$$

$$E_5(R^2) = \frac{14}{9\rho} \quad (\text{A.17})$$

$$E_6(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left\{ -40 + 18\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 3\sqrt{10} + 8 \log \frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{5})}{8} \right. \\ \left. - \log \frac{3 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}} - 2\sqrt{2} \log \frac{2 + \sqrt{5}}{3} + 10\sqrt{5} \log \frac{4\sqrt{5}(1 + \sqrt{2})(5\sqrt{2} + \sqrt{5})}{30(3 + \sqrt{5})} \right\} \quad (\text{A.18})$$

$$E_6(R^2) = \frac{31}{18\rho} \quad (\text{A.19})$$

$$E_7(R) = \frac{1}{6\sqrt{\rho}} \left\{ 20 - 8\sqrt{2} - 3\sqrt{10} + 16\sqrt{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 27 \log \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right. \\ \left. - 8 \log \frac{1+\sqrt{2}}{2} - 10\sqrt{5} \log \frac{2\sqrt{5}(1+\sqrt{2})}{5+\sqrt{5}} \right\} \quad (\text{A.20})$$

$$E_7(R^2) = \frac{2}{\rho} \quad (\text{A.21})$$

## 三角格子

$$f_1(r) = \begin{cases} 2\rho\pi r & \left( 0 < r \leq \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 2\rho\pi r - 12\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} & \left( \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} < r < \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$f_2(r) = \begin{cases} 12\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} & \left( \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 4\rho\pi r - 12\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} & \left( \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} < r < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$f_3(r) = \begin{cases} 12\rho r \left( -\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( -\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\rho}} < r < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

$$f_4(r) = \begin{cases} 12\rho r \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} & \left( \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( \frac{\pi}{6} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} < r < \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$f_5(r) = \begin{cases} 12\rho r \left( \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}\rho}} < r < \sqrt{\frac{7}{2\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

$$f_6(r) = \begin{cases} 12\rho r \left( \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right. \\ \quad \left. - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{7}{2\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{3\sqrt{21}}{14} + \arccos \sqrt{\frac{3}{7}} \right. \\ \quad \left. - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} - 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{7}{2\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{7}{3} \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

$$f_7(r) = \begin{cases} 12\rho r \left( -\frac{\pi}{3} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{7}{2\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \right) & \left( \sqrt{\frac{7}{2\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{7}{3} \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( \frac{7}{6}\pi - 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{7}{3} \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{7}{5} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 12\rho r \left( \frac{2}{3}\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{7}{5} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

$$E_1(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log \sqrt{3} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$E_1(R^2) = \frac{5}{18\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.30})$$

$$E_2(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \sqrt{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{3}) - \log \sqrt{3} \right\} \quad (\text{A.31})$$

$$E_2(R^2) = \frac{17}{18\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.32})$$

$$E_3(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} \quad (\text{A.33})$$

$$E_3(R^2) = \frac{23}{18\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.34})$$

$$E_4(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{8}{3} - \sqrt{3} + \left( 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \log \sqrt{3} \right\} \quad (\text{A.35})$$

$$E_4(R^2) = \frac{35}{18\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.36})$$

$$E_5(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left( -\frac{16}{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{21} + 4 \log \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right) \quad (\text{A.37})$$

$$E_5(R^2) = \frac{47}{18\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.38})$$

$$E_6(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left( \frac{87}{9} - 2\sqrt{21} + 7\sqrt{7} \log \frac{1 + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 4 \log \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log \frac{9}{3 + 2\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$E_6(R^2) = \frac{55}{18\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.40})$$

$$E_7(R) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ -14 + 8\sqrt{3} + \frac{13\sqrt{7}}{3} - 2\sqrt{21} + 7\sqrt{7} \log \frac{27(14 + \sqrt{21})}{5(28 + 29\sqrt{7})} \right. \\ \left. + \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \frac{5}{2 + \sqrt{7}} + 4 \log \frac{4 + 2\sqrt{7}}{3 + \sqrt{21}} + \frac{1}{2} \log \frac{(3 + 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{7})}{81} \right\} \quad (\text{A.41})$$

$$E_7(R^2) = \frac{311}{90\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.42})$$

## 六角格子

$$f_1(r) = \begin{cases} 2\rho\pi r & \left( 0 < r \leq \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 2\rho\pi r - 6\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} & \left( \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

$$f_2(r) = \begin{cases} 6\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} & \left( \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

$$f_3(r) = \begin{cases} 12\rho r \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} & \left( \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r < \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

$$f_4(r) = \begin{cases} 6\rho r \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} & \left( \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{\pi}{2} - 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{14}{5\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

$$f_5(r) = \begin{cases} 6\rho r \left( \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{2}{3}\pi + 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right. \\ \quad \left. - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{14}{5\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{5}{3}\pi - 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right. \\ \quad \left. - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \frac{14}{5\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{2}{3}\pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) & \left( \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

$$f_6(r) = \begin{cases} 6\rho r \left( -\frac{\pi}{3} + \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( -\frac{\pi}{3} + \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \sqrt{\frac{7}{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{14}{5\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( -\frac{4}{3}\pi + \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. + 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} + 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{14}{5\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( -\frac{4}{3}\pi + \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} + 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. + 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} - 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( -\frac{\pi}{3} + 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} - 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

$$f_7(r) = \begin{cases} 12\rho r \arccos \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} & \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} + 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. - 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{4}{3}\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} - 2 \arccos \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. - 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{7}{2\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}\rho r}} \right. \\ \quad \left. - \arccos \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{7}{2\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r \leq \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \\ 6\rho r \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho r}} \right) & \left( \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} < r < \frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

$$E_1(R) = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} \quad (\text{A.50})$$

$$E_1(R^2) = \frac{1}{3\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.51})$$

$$E_2(R) = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}\rho}} \left\{ \frac{1}{3} + \log \sqrt{3} - \frac{1}{6\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} \quad (\text{A.52})$$

$$E_2(R^2) = \frac{7}{9\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.53})$$

$$E_3(R) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}\rho} \left( -1 + \frac{2\sqrt{7}}{3} - \log \sqrt{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$E_3(R^2) = \frac{13}{9\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.55})$$

$$E_4(R) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}\rho} \left( \frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3} + \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{7}}{5} - \frac{1}{2} \log \frac{5}{2 + \sqrt{7}} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \right) \quad (\text{A.56})$$

$$E_4(R^2) = \frac{89}{45\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.57})$$

$$E_5(R) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}\rho} \left( -\frac{14}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3} + \sqrt{21} + \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \log \frac{25\sqrt{21}}{28\sqrt{3} + 31\sqrt{7}} \right. \\ \left. + \frac{4}{3\sqrt{3}} \log \frac{4 + 2\sqrt{7}}{3 + \sqrt{21}} + \frac{1}{2} \log \frac{9(7 + 4\sqrt{3})}{25(2 + \sqrt{7})} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \log \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3 + 2\sqrt{3}} \right) \quad (\text{A.58})$$

$$E_5(R^2) = \frac{13}{5\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.59})$$

$$E_6(R) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}\rho} \left( \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} - \sqrt{21} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \log 3 - \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \log \frac{5\sqrt{21}}{14 + \sqrt{21}} \right. \\ \left. - \frac{4}{3\sqrt{3}} \log \frac{4 + 2\sqrt{7}}{3 + \sqrt{21}} - \frac{1}{2} \log \frac{21 + 12\sqrt{3}}{5(2 + \sqrt{7})} - \frac{1}{6\sqrt{3}} \log \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3 + 2\sqrt{3}} \right) \quad (\text{A.60})$$

$$E_6(R^2) = \frac{43}{15\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.61})$$

$$E_7(R) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}\rho} \left( \frac{22}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{13} - \sqrt{21} - 3\sqrt{3} \log \sqrt{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \log \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{7}} \right. \\ \left. + \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \log \frac{3 + \sqrt{21}}{6} + 4 \log \frac{1 + \sqrt{13}}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \log \frac{6 + \sqrt{39}}{5 + 2\sqrt{7}} \right) \quad (\text{A.62})$$

$$E_7(R^2) = \frac{11}{3\sqrt{3}\rho} \quad (\text{A.63})$$

宮川雅至

筑波大学システム情報工学研究科

〒305-8573 茨城県つくば市

天王台 1-1-1

E-mail: mmiyagaw@sk.tsukuba.ac.jp

## ABSTRACT

CHANGES OF TRAVEL DISTANCES BY FACILITY OPENING/CLOSING  
AND THE ROBUST REGULAR LOCATION

Masashi Miyagawa Yoshiaki Ohsawa Takeshi Koshizuka  
*University of Tsukuba*

The purpose of this paper is to find the robust facility location in consideration of facility opening and closing. For evaluating the robustness, we formulate a simple model of the regular facility locations (square lattice, triangular lattice, hexagonal lattice) and analyze the changes of travel distances to the nearest facility. We also question the accepted theory in the Central Place Theory that the triangular lattice is the optimal.

First, we consider the case where some existing facilities are closed at random. This assumes the situation that some facilities suffer damage from disasters, or that the planner closes facilities without considering the spatial relationship. We theoretically derive the probability density function of  $k$ th-nearest-neighbor distance of the three regular locations and show that the triangular lattice is the optimal when 69% or more of facilities are survived. Then we apply the model to school locations in northern Tsukuba and confirm that the model is applicable to real problems.

Second, we consider the case where some existing facilities are closed according to a plan. This assumes the situation that the planner controls facility closing in order not to decrease the efficiency of movement. In addition, the case where some new facilities are opened is considered. We derive the average travel distance and the standard deviation of travel distances as a function of the rate of closing (opening) and demonstrate that the hexagonal lattice is the optimal when the rate of closing (opening) is not less than 38% (27%).

Comparing the above two cases, we show the effectiveness of planned closing. When closing 50% of facilities, the planner can reduce the average travel distance by 13% in the square lattice, 8% in the triangular lattice, and 15% in the hexagonal lattice.