

## 輸送費用と生産制約に関する費用の和を最小化する組立ライン決定問題

小谷 重徳  
トヨタ自動車(株)

大野 勝久  
愛知工業大学

伊藤 崇博  
名古屋工業大学

(受理 2003年1月8日; 再受理 2004年1月9日)

**和文概要** 複数の組立ラインで生産される車両は、販売店から注文を受けたときどの組立ラインで生産するかが決定され、組立ライン別の生産計画が作成される。このとき考慮すべきことが2つあり、1つは生産工場から全国の販売店までの車両の輸送費を最小化することである。他の1つは生産制約である。工場や仕入先は見込みで作った月度生産計画で生産準備をしており、販売店からのオーダーによって作られた生産計画と月度生産計画との差が少ないほどスムーズな生産ができる。この2つの生産計画の差を小さくするように組立ラインを決定することがもう1つの目標である。この異なる2つの目標を満足するために、2つの生産計画の差の大きさに応じた費用で置き換え、2つの費用の和を最小にすることを考える。この問題は目的関数がいくつかの変数の和の区分線形関数で、かつ解に整数条件が付いた区分線形計画問題に定式化できる。この問題から整数条件を緩和した問題(緩和問題)の最適解が、変数の和の構造がある条件を満足するときは整数解になることを示す。更に、整数解になる条件を満たさない実際の問題においても、その緩和問題の最適解が整数になる可能性が非常に高くなる性質を持っており、実際の問題が既存の手法である可分計画法で効率的に解くことができることを示す。

**キーワード:** 数理計画, ネットワークフロー, ヒッチコック型輸送問題, 生産計画

### 1. はじめに

本論文はトヨタ自動車(株)(以下、トヨタと呼ぶ)での車両の生産計画問題を取り上げる。最初に問題の説明をする。毎月向こう3ヶ月間の車両の生産計画が作成されるが、これを月度生産計画という[5]。月度生産計画は生産ラインや設備の稼働計画、要員の確保、更には材料や外注部品の手配などに利用される。すなわち、月単位の工場の生産の準備をするためであり、来月以降の車両の販売台数やどのような仕様の車が何台売れるかを予測することによって、当月の3旬に月度生産計画は立案される。一方、販売店からの車両の注文はほぼ週単位に行われる。販売店から1週間分の注文を受けると、車名単位の週間生産計画が作られる。複数の組立ラインで生産される車両は、車名単位の週間生産計画から組立ライン別の週間生産計画が作成される。その後、組立ライン別の週間生産計画から車両を生産するための日程計画が作られる。

本論文で取り上げる問題は、複数の組立ラインで生産されている車両の車名単位の週間生産計画から組立ライン別の週間生産計画を作るときの問題である。車名単位の週間生産計画から組立ライン別の週間生産計画を作るときに考慮すべきことが2つある。1つは組立ラインで生産された車両は日本の各地の販売店に輸送されるので、輸送費用が最小になるように販売店からのオーダーを組立ラインに割り当てることである。もう1つは生産制約で、組立ラインの月度生産計画と販売店のオーダーから作られる組立ラインの週間生産計画との差をできるだけ少なくすることである。これはオーダーで作られた週間生産計画の車両

を実際に生産をするとき，月度生産計画に基づいて手配したものととの差が少ないほど工場や仕入先の生産がスムーズになるからである．すなわち，生産の構えとして準備している，人，設備，運搬具，材料，部品，かんばん枚数 [4] などの変更が少なければ少ないほど望ましいということである．通常はこの2つの生産計画の日当たりの生産台数は同じにするが，車両個々の仕様やその台数において違いが生じることになる．2つの生産計画を比較するには，予め決められたボデータイプやエンジンなどの車の基本仕様の数の差で比較する．2つの生産計画の基本仕様の数の差を乖離と呼び，いくつかの基本仕様の乖離がある範囲で収まるように，車名単位の週間生産計画から組立ライン別の週間生産計画を作る必要がある．以上の2つの目標をできるだけ満足するように，組立ライン別の週間生産計画を作ることが今回の問題である．

ところで，生産制約を考慮せず，輸送費用だけを最小化する組立ライン決定問題は古典的なヒッチコック型輸送問題になり，効率的に解くことができる．したがって，今回の問題はヒッチコック型輸送問題に生産制約が付加された問題になる．基本仕様の乖離をある範囲に抑えるという生産制約の表し方にはいくつかの方法が考えられるが，ここでは基本仕様の乖離を乖離の大きさに応じた費用に置き換えて表すことにする．そのために乖離の費用を区分線形関数で表し，目的関数を輸送費用と乖離費用の合計を最小にする問題として定式化する．このように定式化した組立ライン決定問題は，解に整数条件が付いた区分線形計画問題になる．また別の見方をすると，いくつかの変数の和が区分線形関数となる目的関数を持ち，かつ解に整数条件が付いたヒッチコック型輸送問題とみることもできる．1つの変数が区分線形関数であるヒッチコック型輸送問題は，効率的な解法が知られている [3] が，今回定式化した組立ライン決定問題の効率的な解法はまだ開発されていない．

本論文では，組立ライン決定問題から整数条件を緩和した問題（緩和問題）が，ある条件を満足するときは最小費用流問題に変換でき，その最適解が整数になることを示す．また，整数解になる条件を満たさないトヨタの実際の問題において，この緩和問題の最適解が非常に整数になりやすい性質を持っていることを明らかにする．したがって，組立ライン決定問題は整数条件を緩和した区分線形計画問題を可分計画問題に変換することにより，既存の手法である可分計画法で効率的に解くことができる．

本論文の構成は以下のものである．2. 節で組立ライン決定問題の定式化をし，3. 節で組立ライン決定問題の緩和問題の最適解が整数になる条件やトヨタの実際の組立ライン決定問題が整数解になりやすい性質を持っていることを明らかにし，組立ライン決定問題が可分計画法で効率的に解くことができることを示す．4. 節ではトヨタの実際の組立ライン決定問題の例を示す．

## 2. 組立ライン決定問題の定式化

組立ライン決定問題は生産制約がなければヒッチコック型輸送問題になるので，最初にヒッチコック型輸送問題に定式化しておく．組立ラインを  $i (i = 1, 2, \dots, n_I)$  で表し，その週間の生産台数を  $N_i$  とする．販売店からは車の仕様とその台数がセットで注文される．異なる販売店からも同一の仕様の車も注文されるが，ここでは販売店が異なる場合は仕様も異なると考える．この注文された車の仕様をオーダー仕様と呼び， $j (j = 1, 2, \dots, n_J)$  で表し，その注文数を  $K_j$  とする．組立ライン  $i$  からオーダー仕様  $j$  を注文した販売店までの台当たりの輸送費を  $T_{ij}$ ，組立ライン  $i$  でのオーダー仕様  $j$  の生産台数（整数）を  $x_{ij}$  とすると，生産制約がない場合の組立ライン決定問題は次のようなヒッチコック型輸送問題になる．

$$\begin{aligned}
 \text{問題： 最小化} \quad & \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} \\
 \text{制約条件} \quad & \sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \\
 & \sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\
 & x_{ij}: 0 \text{ 以上の整数}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I, j = 1, 2, \dots, n_J
 \end{aligned}$$

ただし,  $\sum_{i=1}^{n_I} N_i = \sum_{j=1}^{n_J} K_j$  とする. この問題の解法は良く知られている [3].

次に, 生産制約をどのように表すかを考える. 月度生産計画と週間生産計画の乖離をある範囲に抑えたい, ボデータイプやエンジンなどの車両の基本仕様を制約項目と呼ぶ. また, 制約項目の個々の種類を制約仕様と呼び,  $r (r = 1, 2, \dots, n_R)$  で表す. 制約仕様  $r$  を仕様として持つオーダー仕様  $j$  の集合を  $C_r$  と表し, 制約オーダーと呼ぶ. 例えば, 制約仕様  $r$  をセダンとすると,  $C_r$  はセダンという仕様をもつオーダー仕様  $j$  の集合であり,  $\sum_{j \in C_r} K_j$  はセダンの注文数の合計である. 制約仕様  $r$  の乖離はある上下限の範囲に抑えておきたいが, 制約仕様  $r$  の上下限の生産台数を少し緩めると輸送費用が大きく下がる場合があり, このような場合は乖離の制限を少し緩め, 車両の輸送費を削減することを考えた方が得策である. 生産制約の上限や下限の制約は絶対的なものでなく, 例えば人や残業を増やすと生産の上限がアップする. したがって, 生産制約の上限や下限は輸送費用が下がるという効果との兼ね合いで決めた方が望ましい. そこで, 制約仕様  $r$  の乖離を乖離の大きさに応じた費用に置き換え, 輸送費用と乖離の費用の和を最小にする問題として定式化する.

輸送費用を考えない場合における組立ライン  $i$  への制約仕様  $r$  の望ましい割り当て台数を基準台数と呼び,  $M_{ir}$  で表す. 基準台数に対して, 割り当て台数を変化させたときにある台当たりの費用がかかるとして, 生産制約費用を定義する. 基準台数の決定方法の1つとして,

$$M_{ir} = \sum_{j \in C_r} K_j \frac{N_{ir}}{\sum_{i=1}^{n_I} N_{ir}}$$

が考えられる. ここで,  $N_{ir}$  は月度生産計画における組立ライン  $i$  の制約仕様  $r$  の該当週の台数である. この方法は, 各工場の割り当て台数が月度生産計画の台数からの変化の比率がすべての工場と同じであるため, 工場からは受け入れやすい. 台当たり費用とその区分の設定は, 次のようにする. 基準台数  $M_{ir}$  の  $\alpha_1$  % までは生産台数の保証として必ず割り当てをする. また, 基準台数  $M_{ir}$  の  $\alpha_1$  % から  $\alpha_2$  % までは輸送費用の少ない組立ラインに割り付ける. それ以降はある範囲ごとにより高い乖離費用がかかるように設定し, 輸送費用との兼ね合いで割り付けができるようにする. すなわち, ある制約仕様  $r$  の基準台数  $M_{ir}$  の  $\alpha_1$  % までの台当たりの費用を  $c(1)$ ,  $\alpha_1$  % を超えて  $\alpha_2$  % までを  $c(2)$ , 同様に  $c(3), c(4), \dots, c(\mu), \dots, c(n_\mu)$  と定義する. このとき,

$$c(1) < c(2) < c(3) < c(4) < \dots < c(\mu) < \dots < c(n_\mu)$$

とし, 基準台数  $M_{ir}$  との乖離が大きくなればなるほど大きな費用がかかるようにする.

$$y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}$$

とおき,  $y_{ir}$  が生産制約の台当たり費用として,  $c(\mu)$  を取る場合の範囲を次のように定義する.

$$c(1) \text{ のとき, } \quad M_{ir}(0) \leq y_{ir} \leq M_{ir}(1) \quad (1)$$

$$c(\mu) (\mu = 2, 3, \dots, n_\mu) \text{ のとき, } \quad M_{ir}(\mu - 1) < y_{ir} \leq M_{ir}(\mu)$$

$y_{ir}$  が式 (1) のように区分されたときの生産制約の費用関数を  $f_{ir}(y_{ir})$  とおくと,

$$f_{ir}(y_{ir}) = \sum_{k=0}^{\mu-1} c(k) \{M_{ir}(k) - M_{ir}(k-1)\} + c(\mu) \{y_{ir} - M_{ir}(\mu-1)\}$$

と表現でき, 区分線形関数になる. ここで,

$$c(0) = 0 \quad ; \quad M_{ir}(-1) = M_{ir}(0) = 0$$

とする. 以上の議論より, 制約項目の月度生産計画と週間生産計画の乖離の費用の合計は,  $\sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} f_{ir}(y_{ir})$  と表現できる. したがって, 組立ライン決定問題は次のようになる.

$$\text{問題 P : 最小化} \quad \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} f_{ir}(y_{ir}) \quad (2)$$

$$\text{制約条件} \quad y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad r = 1, 2, \dots, n_R \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \quad (6)$$

$$x_{ij}: \text{整数}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \quad (7)$$

次に, トヨタの実際の組立ライン決定問題を解くときの費用関数についてもう少し具体的に検討する. 例えば, 基準台数  $M_{ir}$  の 70% まではその制約仕様の生産台数の保証として, 無条件に割り当てるとすると,  $M_{ir}(0) \leq y_{ir} \leq M_{ir}(1)$  に対し,

$$M_{ir}(0) = 0; \quad M_{ir}(1) = \lceil 0.7M_{ir} \rceil; \quad c(1) = b_1 < 0$$

とする. ここで, 記号  $\lceil \beta \rceil$  は  $\beta$  以上の最小の整数を表す. このようにすると乖離の費用が負になるので, 基準台数  $M_{ir}$  の 70% までは無条件に割り当てられる. 基準台数  $M_{ir}$  の 110% までには輸送費用の大きさに割り当てが決まるようにしたいとすると,  $M_{ir}(1) < y_{ir} \leq M_{ir}(2)$  に対して,

$$M_{ir}(2) = \lceil 1.1M_{ir} \rceil; \quad c(2) = \text{輸送費用と比較して十分小さな正の値}$$

とする. 基準台数  $M_{ir}$  の 120% までには, 例えば輸送費の平均  $E(T_{ij})$  の  $a_1$ % 以上の輸送費の削減効果があるなら割り当てても良いとすると,  $M_{ir}(2) < y_{ir} \leq M_{ir}(3)$  に対して,

$$M_{ir}(3) = \lceil 1.2M_{ir} \rceil; \quad c(3) = a_1 E(T_{ij}) / 100$$

とする．基準台数  $M_{ir}$  の 130 % までは，例えば輸送費の平均  $E(T_{ij})$  の  $a_2$  % 以上の削減効果があるなら割り当てても良いとすると， $M_{ir}(3) < y_{ir} \leq M_{ir}(4)$  に対して，

$$M_{ir}(4) = \lceil 1.3M_{ir} \rceil ; \quad c(4) = a_2 E(T_{ij})/100$$

とする．基準台数  $M_{ir}$  の 130 % を超えては割り当てないとすると， $M_{ir}(4) < y_{ir} \leq M_{ir}(5)$  に対して，

$$M_{ir}(5) = \sum_{j \in C_r} K_j ; \quad c(5) = \text{輸送費用と比較して十分大きな値}$$

とする．以上のような区分費用が考えられるが， $\sum_{j \in C_r} K_j$  の値が小さいときは，基準台数  $M_{ir}$  の 2 倍までの割り付けが可能な場合もあり，制約仕様  $r$  や  $\sum_{j \in C_r} K_j$  の値の大きさに応じて決定する必要がある．

### 3. 組立ライン決定問題の解法

問題 P において，式 (3) を目的関数 (2) に代入して変数  $y_{ir}$  を消去すると，問題 P は

$$\begin{aligned} \text{問題 P}^*: \quad & \text{最小化} && \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} f_{ir} \left( \sum_{j \in C_r} x_{ij} \right) \\ & \text{制約条件} && \sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \\ & && \sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\ & && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\ & && x_{ij}: \text{整数}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \end{aligned}$$

と表現することもできる．したがって，組立ライン決定問題 P は，目的関数がいくつかの変数の和の区分線形関数をもち，かつ解に整数条件が付いたヒッチコック型輸送問題とみなすことができる．1 つの変数が区分線形関数であるヒッチコック型輸送問題は最適解が整数になり，効率的な解法がよく知られているが，いくつかの変数の和の区分線形関数をもつ組立ライン決定問題 P に対する効率的な解法はまだ開発されていない．問題 P の整数条件 (7) を緩和した問題を緩和問題 P とする．

$$\begin{aligned} \text{緩和問題 P} : \quad & \text{最小化} && \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} f_{ir}(y_{ir}) \\ & \text{制約条件} && y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad r = 1, 2, \dots, n_R \\ & && \sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \\ & && \sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\ & && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \end{aligned}$$

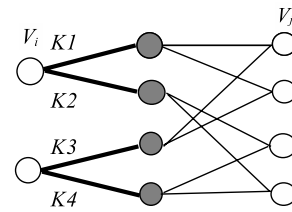
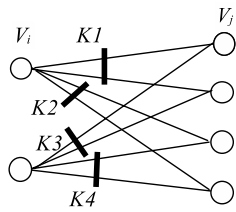


図 1: 型式の制約をもつネットワーク

図 2: 1つの枝の制約に変換されたネットワーク

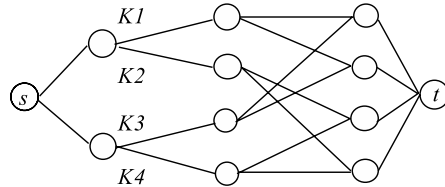


図 3: 最少費用流問題に変換されたネットワーク

### 3.1. 制約項目が型式の場合

一般に、車の仕様は型式とオプションで表す。型式とは車の車名、年式、ボデータイプの種類（セダン、ハードトップ、ワゴンなど）、エンジンの種類、ミッションの種類などの車の基本仕様を表す。また、オプションは車名ごとに予め決められており、例えばボデーカラー、カーナビ、カーステレオ、アルミホイールなどがあり、注文時に指定する。最近は需要の変化に追随することを旨としているため、現在トヨタで使用している近似解法では、月度生産計画と週間生産計画の仕様の乖離を車両の代表的な仕様である型式だけで処理をしている。そこで、まず初めに制約項目が型式の場合について考える。どのオーダー仕様  $j$  も何か 1 つの型式  $r$  に含まれるので、任意の 2 つの型式  $r_1, r_2$  に対して、

$$C_{r_1} \cap C_{r_2} = \phi$$

となる。ここで、 $\phi$  は空集合を表す。この特徴を生かしたネットワークを構成し、いくつかの変数の和の区分線形関数を、1 つの変数の区分線形関数に置き換えた最小費用流問題に変換して解くことを考える。いくつかの変数の和の区分線形関数を、どのようにしてある 1 つの変数の区分線形関数に変換するかを図で説明する。組立ライン  $i$  を点  $V_i$ 、オーダー仕様  $j$  を点  $V_j$  で表す。枝  $(V_i, V_j)$  に対して変数  $x_{ij}$  を対応させると、変数の和は枝の集合で表すことができる。そこで、型式の制約である変数の和が図 1 のように  $K1, K2, K3, K4$  であったとする。これを図 2 のように、図 1 のネットワークに太い実線の枝と黒い点を追加して変形すると、4 つの型式の制約  $K1, K2, K3, K4$  の区分線形関数は太い線で示された枝の区分線形関数に置き換えることができる。この変換ができるのは型式の制約間で共通の枝を持っていないからである。図 2 のネットワークに対して、ソース  $V_s$  とシンク  $V_t$  を追加し、更にソース  $V_s$  と点  $V_i$  を結ぶ枝  $(V_s, V_i)$  と、点  $V_j$  とシンク  $V_t$  を結ぶ枝  $(V_j, V_t)$  を追加して図 3 のようなネットワークを構成すれば、1 変数が区分線形関数の最小費用流問題（各枝の費用関数や容量制約を定義しなければならないが、明らかなので省略する）になり、制約項目が型式の場合の組立ライン決定問題  $P$  を効率的に解くことができる [3]。この最小費用流問題の最適解は整数になるので、制約項目が型式の緩和問題  $P$  の最適解は整数になる。以上の結果をまとめると次の定理が得られる。

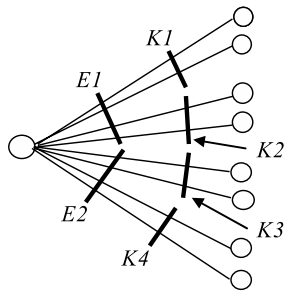


図 4: 型式とエンジンの制約をもつネットワーク

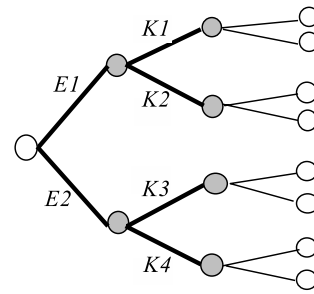


図 5: 1つの枝の制約に変換されたネットワーク

定理 1. 緩和問題 P の任意の 2 つの制約仕様  $r_1, r_2$  に関する制約オーダー  $C_{r_1}, C_{r_2}$  において,

$$C_{r_1} \cap C_{r_2} = \phi$$

を満足するときは, 緩和問題 P の最適解は整数である.

### 3.2. 制約項目が型式とエンジンの場合

今までの議論は, 車の仕様の乖離を抑える制約項目として型式で代表させることにしたが, どの仕様の車にも必要で重要な部品であるエンジンについて考えてみる. エンジンの生産ラインが 2 本以上あり, しかもその生産ラインが遠く離れ, エンジンの種類によって組立ラインへの供給が異なる場合は, エンジンの種類ごとの乖離を抑えないと, エンジンの生産ラインから組立ラインへのエンジンの運搬量が変動する. エンジンのような大きな機能部品の運搬量が変動することは問題である. このようにエンジンの生産条件によっては, 組立ラインごとにエンジンの月度生産計画台数と週間生産計画台数との乖離を抑えなければならない場合がある. エンジンは型式でその仕様が決まるが, 同一仕様のエンジンが複数の型式で使用されているので, 型式単独で乖離を抑えてもエンジンの仕様(種類)ごとの乖離は型式と同じような範囲にあるという保証はない. したがって, エンジンなどの機能部品についても乖離の制約項目にする必要が生じる場合がある.

制約項目として型式の上にエンジンを追加した問題 P を考える. 型式の制約仕様を  $r_K$ , エンジンの制約仕様を  $r_E$  とすると, エンジンの制約オーダー  $C_{r_E}$  はいくつかの型式の制約オーダー  $C_{r_K}$  の集合となる. また, 型式とエンジンそれぞれを含む任意の 2 つの制約仕様  $r_K, r_E$  に関する制約オーダー  $C_{r_K}, C_{r_E}$  に対し,

$$C_{r_K} \subseteq C_{r_E} \quad \text{または} \quad C_{r_K} \cap C_{r_E} = \phi$$

となる. エンジンの任意の 2 つの制約仕様  $r_{E_1}, r_{E_2}$  に関して,

$$C_{r_{E_1}} \cap C_{r_{E_2}} = \phi$$

である. この問題も 1 変数が区分線形関数である最小費用流問題に変換でき, 制約項目が型式とエンジンの場合の組立ライン決定問題 P を効率的に解くことができる. これを図解で示す. 図 4 のようにある組立ラインに対して, エンジンの制約が  $E_1, E_2$  で, 型式の制約が  $K_1, K_2, K_3, K_4$  とする. これを図 5 のように変更すると, 変数の和の区分線形関数が太い実線で示した枝の区分線形関数に変更できたことになる. 以上のような変換をすべての制約項目に対して行うことによって, 緩和問題 P は 1 変数の区分線形関数の最小費用流問題に変

更できる．以上の結果を型式とエンジンの制約仕様を区別することなく表現すると，定理 1 を包含した定理 2 が得られる．

定理 2. 緩和問題 P の任意の 2 つの制約仕様  $r_1, r_2$  に関する制約オーダー  $C_{r_1}, C_{r_2}$  において，次の 2 つのどちらかである場合は，緩和問題 P の最適解は整数である．

- (1)  $C_{r_1} \cap C_{r_2} = \phi$  である．
- (2)  $C_{r_1} \cap C_{r_2} \neq \phi$  のときは  $C_{r_1} \supseteq C_{r_2}$  か，または  $C_{r_1} \subseteq C_{r_2}$  のどちらかである．

### 3.3. 制約項目が一般の場合

トヨタで現在使用している近似解法の制約項目は型式のみであるが，今後はエンジン以外にもボデータイプ，ミッション，駆動方式などの主要な機能部品を追加しなければならない場合が考えられる．そこでこの制約項目を含め，本論文で扱うトヨタの組立ライン決定問題の規模を明確にして，今後の議論をする．以下のような規模を持つ問題をトヨタの実際規模の問題と呼ぶことにする．

「トヨタの組立ライン決定問題の規模」

- (1) 組立ラインの数  $n_I$  : 2 ~ 3
- (2) 組立ラインの生産台数の合計  $\sum_i N_i$  : 500 ~ 2,500
- (3) オーダー仕様の種類数  $n_J$  : 350 ~ 1,500
- (4) オーダー仕様の数  $K_j$  : 1 ~ 10 のものがほとんど
- (5) 制約項目の数 : 型式，ボデータイプ，エンジンなど最大 5 種類
- (6) 型式の種類数 : 10 ~ 20
- (7) ボデータイプ，エンジンなどの制約項目の個々の種類数 : 2 ~ 5
- (8) 輸送費  $T_{ij}$  : 基準輸送費との差額で表現し，台当たり約 3 万円まで
- (9) 費用関数の区分数 : 5 ~ 7
- (10) 生産制約の台当たりの費用  $c(\mu)$  : 生産変更の費用と輸送費の大きさから決定

ミッションなどの機能部品の制約仕様  $r$  のオーダー制約  $C_r$  はエンジンと同じように，いくつかの型式  $r_K$  の制約オーダー  $C_{r_K}$  の集合になる．また，型式  $r_K$  のオーダー制約  $C_{r_K}$  の要素数は 2 桁以上なので，トヨタの組立ライン決定問題について次のような性質がある．

性質 1. トヨタの組立ライン決定問題の任意の 2 つの制約仕様  $r_1, r_2$  に関する制約オーダー  $C_{r_1}, C_{r_2}$  において，次の 2 つのどちらかである．

- (1)  $C_{r_1} \cap C_{r_2} = \phi$  である．
- (2)  $C_{r_1} \cap C_{r_2} \neq \phi$  のときは， $C_{r_1} \cap C_{r_2}$  はいくつかの型式  $r_K$  の制約オーダー  $C_{r_K}$  の集合であり， $|C_{r_1} \cap C_{r_2}|$  は 2 桁以上の比較的大きな数字となる．ここで， $|C_{r_1}|$  は集合  $C_{r_1}$  の要素の数である．

次に，制約項目が型式，エンジン，ミッションなど 3 つ以上ある緩和問題 P を考えてみる．この場合，型式とエンジン，型式とミッションの 2 つの制約仕様の組合せは定理 2 を満たすが，エンジンとミッションの制約仕様の組合せでは定理 2 を満足しなくなる．また，緩和問題 P の制約式の係数行列は，totally unimodular [6] であるとはいえず，常に整数解をもつとは限らない（後の例 1 参照）．緩和問題 P の実数解（本論文での実数解は整数解を含まないとする）に対して，定理 2 より次のように特徴付けることができる．

定理 3. 緩和問題 P の最適な実数解を  $x_{ij}^R$  とすると，

$$y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}^R = M_{ir}(\mu)$$



となる制約仕様が2つ以上存在する．これらの任意の2つの制約仕様  $r_{k_1}, r_{k_2}$  に関する制約オーダー  $C_{r_{k_1}}, C_{r_{k_2}}$  において,  $C_{r_{k_1}} \cap C_{r_{k_2}} \neq \phi$  で, かつ  $C_{r_{k_1}} \supseteq C_{r_{k_2}}$  や  $C_{r_{k_1}} \subseteq C_{r_{k_2}}$  でない制約オーダー  $C_{r_{k_1}}, C_{r_{k_2}}$  が必ず存在する．

制約式の上下限になっていない束制約式は緩和問題Pから除外することができる．もし定理3で示したような制約オーダー  $C_{r_{k_1}}, C_{r_{k_2}}$  が存在しなければ, 定理2が成立するので整数解となり, 実数解という仮定に反する．したがって, 定理3が成立する．定理3の前半を用いることによって, 定理2の別証明ができるので, これを付録(1)で示す．

緩和問題Pの最適解  $x_{ij}^*$  が

$$M_{ir}(\mu_{ir} - 1) \leq \sum_{j \in C_r} x_{ij}^* \leq M_{ir}(\mu_{ir})$$

を満足するとする．このとき,

$$\begin{aligned} f_{ir}(\sum_{j \in C_r} x_{ij}^*) &= \sum_{k=0}^{\mu_{ir}-1} c(k) \{M_{ir}(k) - M_{ir}(k-1)\} + c(\mu_{ir}) \{ \sum_{j \in C_r} x_{ij}^* - M_{ir}(\mu_{ir} - 1) \} \\ &= c(\mu_{ir}) \sum_{j \in C_r} x_{ij}^* + \text{定数} \end{aligned}$$

となる．そこで,

$$\sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} c(\mu_{ir}) \sum_{j \in C_r} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ij} x_{ij}$$

とおき, 問題Rを次のように定義すると, 問題Rの最適解も  $x_{ij}^*$  となる．

$$\text{問題R : 最小化} \quad \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ij} x_{ij} \quad (8)$$

$$\text{制約条件} \quad M_{ir}(\mu_{ir} - 1) \leq \sum_{j \in C_r} x_{ij} \leq M_{ir}(\mu_{ir}), \quad i = 1, 2, \dots, n_I, \quad r = 1, 2, \dots, n_R \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \quad (11)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \quad (12)$$

式(9)の  $\sum_{j \in C_r} x_{ij}$  に含まれる変数  $x_{ij}$  に対応する枝  $(V_i, V_j)$  の集合を  $E_{ir}$  で表すと, 式(9)は

$$M_{ir}(\mu_{ir} - 1) \leq \sum_{(i,j) \in E_{ir}} x_{ij} \leq M_{ir}(\mu_{ir}), \quad i = 1, 2, \dots, n_I, \quad r = 1, 2, \dots, n_R \quad (13)$$

と表現できる．この  $E_{ir}$  は束と呼ばれる [3] ので, 式(13)を束制約式と呼ぶ．また, 式(9)を式(13)で置換した問題も問題Rと呼ぶ．なお, 束  $E_{ir}$  は枝  $(V_i, V_j)$  の集合であるが, 本論文では表現を簡単にするために, 枝  $(V_i, V_j)$  が束  $E_{ir}$  に含まれる場合は変数  $x_{ij}$  も束  $E_{ir}$  に含ま

れると表現する．問題 R は束制約付きのヒッチコック型輸送問題といえるので，緩和問題 P と最適解が同値な束制約付きのヒッチコック型輸送問題が存在することになる．逆に，任意の束制約付きのヒッチコック型輸送問題から最適解が同値な区分線形計画問題を作成することができる（付録 (2) 参照）．そこで，緩和問題 P の最適解の整数性の検討の代わりに，整数性の検討がしやすい問題 R の解の整数性について検討する．明らかなように問題 R に関しても定理 1, 2, 3 が成立する．定理 1 と 2 が成立することは，付録 (1) と同じような方法で証明することもできる．また，閉路を用いた別の方法でも証明できる．後の議論で必要のために問題 R に関する定理 1 と 2 について，閉路を用いた証明を付録 (3) と (4) で示す．定理 1 や 2 を満たさない問題 R の制約式の係数行列式も totally unimodular であるとはいえず，実際次の例では最適解は実数となる．

例 1. 問題：最小化  $x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$   
 制約条件  $1 \leq x_{11} + x_{14}$  ;  $1 \leq x_{12} + x_{13}$  ;  $1 \leq x_{12} + x_{14}$   
 $x_{11} + x_{12} \leq 1$  ;  $x_{13} + x_{14} \leq 1$   
 $\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 2, i = 1, 2$  ;  $\sum_{i=1}^2 x_{ij} = 1, j = 1, 2, 3, 4$   
 $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2 ; j = 1, 2, 3, 4$

この問題の最適解は  $x_{ij}^* = 0.5 (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$  となる．また，

$$x_{11} = x_{13} = x_{22} = x_{24} = 0 ; x_{12} = x_{14} = x_{21} = x_{23} = 1$$

となる整数解も存在する．この例では変数  $x_{12}, x_{13}, x_{14}$  の制約式の係数行列式をとると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

となるために，例 1 の制約式の係数行列式は totally unimodular ではない．

問題 R から束制約式 (13) を外したヒッチコック型輸送問題の実行可能領域は多面体  $D_H$  になり，そのすべての端点は整数になる [6]．このことからヒッチコック型輸送問題の最適解は常に整数解になる．問題 R の実行可能領域は，多面体  $D_H$  に対して束制約式 (13) である超平面で制約を受けた多面体  $D_K$  になる．したがって，問題 R が実数解を持つ可能性があるのは，束制約式 (13) によって新たにできた端点で最適解になる場合であり，束制約式の数が多ければ多いほど問題 R が実数解を持つ可能性が高いことになる．今， $E(D_H)$  を多面体  $D_H$  の端点の集合を表すとすると，多面体  $D_K$  のどの端点も最適解になる確率が同じとすると， $E(D_K) - E(D_H)$  の端点も整数の場合もあるので，

$$IS = \frac{|E(D_K) \cap E(D_H)|}{|E(D_K)|}$$

は問題 R が整数解になる確率の下限を表している．しかし，端点の集合やその数は容易に求められない．そこで，問題 R の最適解がどの程度整数解になるかをシミュレーションで確かめることにする．

表 1: 各実験の条件

項 目	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4
組立ラインの数 $n_I$	3	3	3	3
総生産台数 $\sum_{i=1}^{n_I} N_i$	120	120	2,500	120
オーダー仕様の種類数 $n_J$	60	60	1,500	60
オーダー仕様の数 $K_j$	1~5	1~5	1~5	1~5
輸送費 $T_{ij}$	1~10	1~10	1~80	1~10
制約項目の数 (含型式)	3~10	0	10	3~10
型式の種類数	15	0	20	6
型式以外の各制約項目の種類数	5	0	5	3
制約項目のオプションの数	0	2~9	0	0
制約仕様の種類数 $n_R$	25~60	2~9	65	15~33

表 2: 実験 1 の問題の整数解の比率

問 題 No.	1	2	3	4	5	6	7	8
制約項目の数	3	4	5	6	7	8	9	10
束制約式の数 (注 1)	150	180	210	240	270	300	330	360
整数解の比率 (%)	100	94	88	80	74	66	63	54
整数変数の比率 (注 2)	100	93	92	92	91	91	90	88

(注 1) 式 (9) は上下限の制約式なので, 2 つとする.

(注 2) 最適解で整数となった変数の比率の平均を表す.

実験 1. 組立ラインの数  $n_I = 3$ , オーダー仕様の種類数  $n_J = 60$  とし, オーダー仕様の種類数はトヨタの組立ライン決定問題の規模より小さい問題を考える. 3 つの組立ラインの生産台数  $N_i (i = 1, 2, 3)$  は, それぞれ 30, 40, 50 の合計 120 台とする. オーダー仕様の数  $K_j (j = 1, 2, \dots, 60)$  は 1 から 5 までの整数を等確率で取るとし, 乱数で決定する. ただし,  $\sum_{j=1}^{60} K_j = 120$  となるようにする. また, 60 個のオーダー仕様は異なる販売店から注文され, 組立ラインから販売店までの輸送費  $T_{ij}$  は 1 から 10 までの整数を取るとし, 乱数で決定する. 制約項目は型式と機能部品とし, 実験 1 では制約項目の数を 3 から 10 まで変化させる. 型式の数は 15 で, 型式  $r$  の制約オーダー  $C_r$  の要素数  $|C_r|$  は, すべて 4 ( $60/15 = 4$ ) とする. 型式  $r$  の制約オーダー  $C_r$  に含まれるオーダー仕様  $j$  は 60 種類の内 4 つであるが, これらも乱数で決定する. また, 型式以外の制約項目である機能部品の種類はすべて 5 とし, 機能部品の各制約仕様  $r$  の制約オーダー  $C_r$  は, すべて 3 ( $15/5 = 3$ ) 種類の型式の制約オーダーを含むものとし, これも乱数で決定する. 束制約式の上限と下限の計算は

$$M_{ir}(\mu_{ir}) = \left[ \sum_{j \in C_r} K_j \times 1.1 \times N_i / 120 \right]$$

$$M_{ir}(\mu_{ir} - 1) = \left[ \sum_{j \in C_r} K_j \times 0.9 \times N_i / 120 \right]$$

とする. ここで,  $[\beta]$  は  $\beta$  以下の最大の整数である. 以上の問題の条件をまとめると, 表 1 の実験 1 の列のようになる. このような問題に対して, 制約項目の数の大きさに応じて問題 R の最適解がどの程度整数解になるかを実験で確かめる. 各問題とも 100 個の計算をすると, 表 2 のようになる. 表 2 から分かるように, 制約項目の数が少ない場合は整数解になる確率が非常に高い. トヨタの実際問題では, 制約項目に入れたい機能部品の数は高々 5 であり, 実験からは 88 % の整数解の比率になる. 例え実数解になったとしても, 実数となる変

表 3: 制約式の上下限である束の数と問題数

束制約の数	問題の数
31 ~ 35	1
36 ~ 40	12
41 ~ 45	46
41 ~ 50	37
51 ~ 55	4
合 計	100

表 4: 共通の変数がある束の組合せの数と問題数 (束は制約式の上下限である)

束制約の数	問題の数
10 ~ 25	10
26 ~ 30	17
31 ~ 35	17
36 ~ 40	18
41 ~ 45	22
46 ~ 50	10
51 ~ 65	6
合 計	100

表 5: 実験 2 の問題の整数解の比率

問 題 No.	1	2	3	4	5	6	7	8
オプションの数	2	3	4	5	6	7	8	9
束制約式の数	12	18	24	30	36	42	48	54
整数解の比率 (%)	100	95	80	78	62	61	48	33
整数変数の比率 (%)	100	94	94	94	93	91	91	89

数は 1 割にも満たないことが分かる。また、制約項目の数が 3 である No. 1 の問題において束制約式の上限や下限になっている束に関して、それらの数と、共通の変数を含む束の組合せの数を表にすると、表 3 と表 4 のようになる。表 3 と表 4 から分かるように、整数解になっているが束制約式の上限や下限になっている束の数や共通の変数を含む束の組合せの数は非常に多いことが分かる。問題 R の多面体  $D_K$  の端点の中で、少なくとも 1 つは束制約式が上下限になっているものの集合を  $E(D_B)$  とすると、問題 R の最適解が束制約式の上下限になっている変数を含む場合は  $E(D_B)$  の端点である。したがって、表 3 は  $E(D_B)$  の端点も整数解が多いことを示している。また、表 4 は定理 3 の逆が必ずしも成立しないことを示している。

実験 2. 実験 1 の問題は性質 1 に示したような特徴がある。性質 1 の特徴を明らかにするために、性質 1 を必ずしも満足しない、すなわち任意の 2 つの制約仕様の束が共通変数を必ずしも多く含まない問題を考える。そのためにトヨタの組立ライン決定問題では存在しないが、車両のオプションのみの制約項目があるとし、オプションの数を 2 から 9 まで変化させる。各オプションの種類数は 1 とし、すべてのオプション  $r$  の制約オーダー  $C_r$  はオーダー仕様  $j$  を 15 個含むとする。オプション間で共通のオーダー仕様を含まないと、定理 1 より整数解になるので、オプションに含まれるオーダー仕様の数を大きくし、これらの 15 のオーダー仕様  $j$  は乱数で決定する。その他は実験 1 と同じある (表 1 参照)。制約項目であるオプションの数と整数解の比率を実験で求めると、表 5 のようになる。表 2 と表 5 から分かるように、オプションが制約項目の場合は、束制約式の数が多い割に整数解の比率はかなり小さくなっている。

実験 3. 次に、トヨタの実際規模の問題を解いてみる。ある車両の問題の規模は表 6 のようである。表 6 では組立ラインは 2 つであるが、実験 1 や 2 と合わせるために、組立ラインは 3 つとする。3 つの組立ラインの生産台数  $N_i$  は、600, 900, 1,000 の台数とする。制約項目として現状では型式だけであるが、型式以外に 9 種類の機能部品が制約項目としてあり、

表 6: 実際問題の規模

項 目	数
組立ラインの数	2
総生産台数	2,500
型式の種類数	20
オーダー仕様の種類数	1,500
販売店数	80

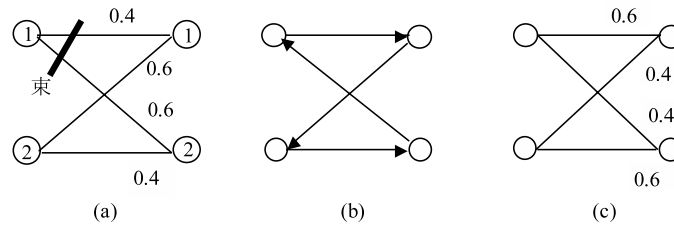


図 6: 係数が 1 でない束制約式の場合

合計 10 の制約項目があるとし、実際より複雑な問題にする。9 種類の機能部品はすべて 5 種類とする。表 6 から分かるように、1,500 のオーダー仕様は 80 の販売店数から注文されている。簡単にするため、販売店の注文におけるオーダー仕様の種類数は同数とする。また、輸送費は仮の値として 1 から 80 の整数とし、乱数で設定する。その他は実験 1 と同じように設定し（表 1 参照）、100 ケース解くとすべて整数解になった。表 2 における制約項目の数が 10 の場合は整数解の比率は 54 % なので、トヨタの実際規模の問題 R では非常に整数解になりやすいといえる。

以上の実験結果に対し、トヨタの実際規模の問題 R がなぜ整数解になりやすいかを考える。表 3 が示しているように、制約式の上限や下限になっている束制約式が多いが、整数解になっている。これは束制約式 (13) が整数解になりやすい構造を持っているからである。付録 (3), (4) で示したように、束がある条件を満足するときは実数解から作成したネットワークにおいて、長さが 0 以下の閉路が存在し整数解に変更できる。しかし、束がある条件を満足しなくても付録 (3), (4) で示したような閉路が存在し、整数解に変更できれば整数解を持つことになる。問題 R において、フローが流せる長さが 0 以下の閉路が存在すれば整数解になりやすいのは、問題 R の束制約式の構造に 2 つの特徴があるからである。

その 1 つは、束制約式 (13) における変数の係数が 1 であることである。変数の係数が 1 でない場合を考えてみる。付録 (3) で示したように実数解から作成したネットワークが図 6 の (a) のようであったとする。図 6 の (a) の数字は式 (14) の  $z_{ij}$  である。束制約式が

$$6x_{11} + x_{12} \leq 4$$

とする。また、

$$x_{11} = z_{11} = 0.4; x_{12} = z_{12} = 0.6$$

とし、図 6 の (b) の方向の閉路の長さが 0 以下とする。このとき流すことができるフローを  $x$  とすると、束の枝  $(V_1, V_1), (V_1, V_2)$  に関して、

$$6(0.4 + x) + 0.6 - x = 4$$

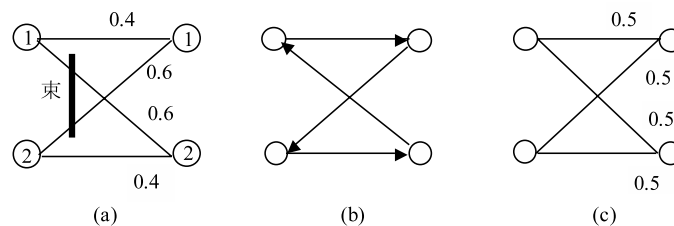


図 7: 束に含まれる変数の組立ラインに対応する点が 1 点でない場合

となり,  $x = 0.2$  となる. 閉路のその他の枝は束制約式がないので, 閉路にしたがってフローを 0.2 流すと, 図 6 の (c) のようになり, 整数解に変更できない. 次に, このような束制約式を持ち, 実数解になる簡単な例を示しておく.

例 2. 問題: 最小化  $x_{11} + 2x_{12} + 2x_{21} + x_{22}$   
 制約式  $4x_{11} + x_{12} \leq 2$   
 $x_{11} + x_{12} = 1$ ;  $x_{21} + x_{22} = 1$   
 $x_{11} + x_{21} = 1$ ;  $x_{12} + x_{22} = 1$   
 $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2$

この問題の最適解は  $x_{11}^* = 1/3, x_{12}^* = 2/3, x_{21}^* = 2/3, x_{22}^* = 1/3$  となる. なお, 例 2 のような組立ラインとオーダー仕様の両方の数が 2 の問題 R では, どのような束の場合でも定理 2 を満足するので, 最適解は整数となる.

もう 1 つの特徴は束に含まれる変数  $x_{ij}$  の組立ライン  $i$  が 1 つであることである. もし, これが 2 つ以上あるとする. 図 7 の (a) のネットワークにおいて, 束制約式が,

$$1 \leq x_{12} + x_{21}$$

であるとする. また,

$$x_{12} = z_{12} = 0.6; x_{21} = z_{21} = 0.6$$

とし, 図 7 の (b) のような方向の閉路の長さが 0 以下だとする. このとき流すことができるフローは, 前述と同様に求めると, 0.1 になる. 0.1 のフローを流すと, 図 7 の (c) のようになる. この場合も整数解に変更できない. このような束制約式を持ち, 実数解になる簡単な例を示しておく.

例 3. 問題: 最小化  $x_{11} + 2x_{12} + 2x_{21} + x_{22}$   
 制約式  $x_{11} + x_{22} \leq 1$   
 $x_{11} + x_{12} = 1$ ;  $x_{21} + x_{22} = 1$   
 $x_{11} + x_{21} = 1$ ;  $x_{12} + x_{22} = 1$   
 $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2$

この問題の最適解は  $x_{ij}^* = 0.5 (i = 1, 2; j = 1, 2)$  となる.

束が定理 2 で示した条件を満たさない場合を考えてみる. 実験 1 の問題では性質 1 より任意の 2 つの束は共通の変数がある場合は, 多くの共通変数を持つことになる. 共通の変数を多く持つ場合は, 付録 (3), (4) で示したような長さが 0 以下の閉路が存在しやすい. このこ

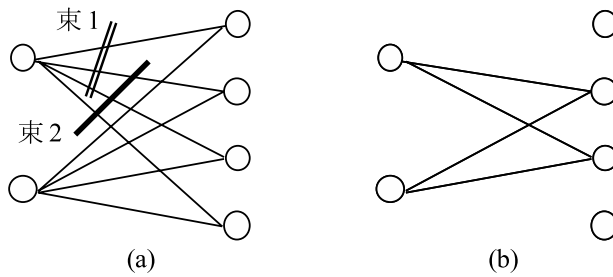


図 8: 2つの束の共通の枝が2つの場合

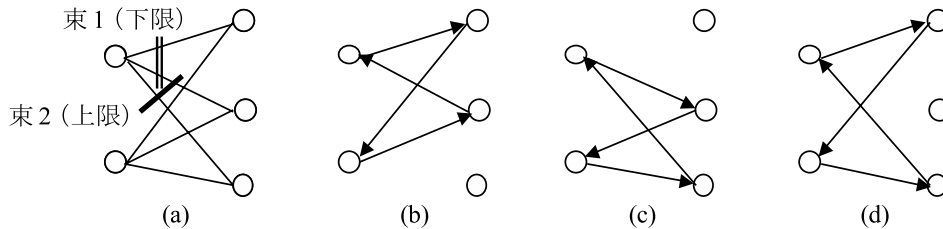


図 9: 閉路と可能な流れの方向

とを図で説明する．共通変数が多い場合の簡単な例として，共通変数が2つの場合を考える．図8の(a)のように束1と束2が2つの共通の変数(枝)を含むとすると，図8の(b)のようにどちらの方向にでも流せる閉路が存在する．次に，共通変数が少ない場合の例として図9の(a)のように，束1と束2が共通変数を1つしか含まない場合を考える．束1は下限，束2は上限になっているとすると，図9の(b)~(d)のような3つの閉路が存在するが，矢印の方向にしかフローは流すことはできない．したがって，この場合は束が共通の変数を多く含むケースより，閉路の条件は厳しくなる．しかし，3つの閉路で長さが0以下の閉路が存在すれば，フローを流すことによって一部の 변수は整数になり，整数解に一步近づくことになる．

実験1の問題はもう一つ，大きな特徴がある．機能部品のある2つの束が共通変数を持つ場合は，それらの変数はある型式の束の変数でもある．図10の(a)の束1と束2が制約式の上下限になっているとする．束制約式の上下限は同じような方法で計算するため，型式の束3も制約式の上下限になる場合も多いと考えられる．実際に，実験1の問題No. 1で調べてみる．実験1の問題No. 1において，制約式の上下限になっている機能部品の束で，同じ型式の束を含む2つの束の組合せの数は100ケースの平均は6.5である．このような2つの

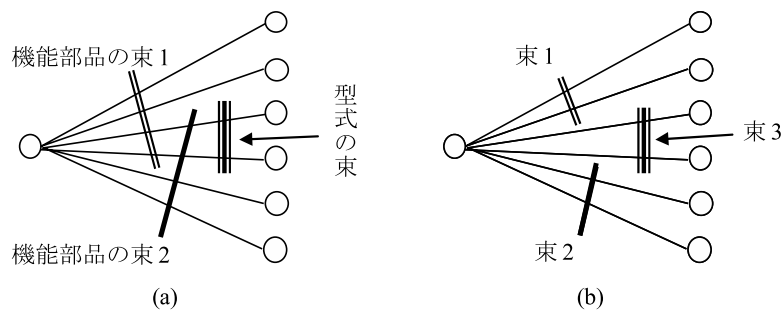


図 10: 機能部品の束と型式の束の関係

表 7: 実験 4 の問題の整数解の比率

問題 No.	1	2	3	4	5	6	7	8
制約項目の数	4	6	8	10	12	14	16	18
束制約式の数	90	126	162	198	234	270	306	342
整数解の比率 (%)	100	98	97	96	93	94	92	96
整数変数の比率 (%)	100	94	94	94	93	94	93	94

機能部品の束の組合せで、これに含まれる型式の束が制約式の上下限になっている場合の比率は 79.4% である。したがって、図 10 の (a) の束 1 と束 2 が制約式の上下限になっている場合は、3 つの束が制約式の上下限になっているケースが非常に多いことが分かる。図 10 の (a) の 3 つの束が制約式の上下限になっているとすると、図 10 の (b) のような共通変数を含まない 3 つの束が存在するのと同じになる。したがって、定理 1 が成立し、付録 (3) で示したように整数解に変換できることになる。以上の 2 つのことから、実験 1 の問題は実験 2 の問題より整数解になりやすいと思われる。

そこで、束に含まれる変数の数が多い場合や、2 つ以上の束に含まれる束の変数が多いと整数解になりやすいことを実験で確かめることにする。

実験 4. 実験 1 の問題において、型式の種類数を 6、その他の機能部品の種類数を 3 とし、それぞれ実験 1 より減少させる。よって、型式  $r$  の制約オーダー  $C_r$  は、 $|C_r| = 60/6 = 10$  となり、型式  $r$  の束に含まれる変数の数は 10 となる。また、型式以外の制約項目である機能部品の制約仕様  $r$  の制約オーダー  $C_r$  は、すべて 2 ( $6/3 = 2$ ) 種類の型式の制約オーダーを含むことになるので、機能部品の束に含まれる変数の数は、 $20 (2 \times 10 = 20)$  となる。実験 1 においては、型式や機能部品の束に含まれる変数の数は、それぞれ 4 と 12 である。また、機能部品の 2 つの束に含まれる束の変数の数は、実験 1 では 4 ~ 12、実験 4 では 10 ~ 20 となる。以上のように実験 4 の問題は、束に含まれる変数や 2 つ以上の束に含まれる束の変数が実験 1 の問題より多くなる。その他については、実験 1 と同じとする (表 1 参照)。実験 4 の結果は表 7 のようになり、制約項目の数を増加しても、問題 R が整数解になる可能性はあまり変化がなく、整数解になる可能性は非常に高い。実験 3 のトヨタの実際規模の問題では、実験 4 の問題より束に含まれる変数や 2 つ以上の束に含まれる束の変数が遙かに多いので、次の性質が成り立つ。

性質 2. トヨタの実際規模の問題 R において、束の特徴や束制約式の構造から  $E(D_B)$  の端点は整数解になりやすい。

実験 1 の No.3 の問題における多面体  $D_H$  を構成する制約式の数と制約項目が 5 のときの束制約式の数との比は 63:210 で、このときの整数解の比率は 88 % である。一方、実験 3 の問題におけるその比は、1,502 : 390 である。したがって、トヨタの実際規模の問題 R においては整数解になる確率  $IS$  は、整数解の比率が 88 % である実験 1 の No.3 の問題より遙かに大きいと考えられるので、次の性質が成り立つ。

性質 3. トヨタの実際規模の問題 R の  $IS$  は大きく、確率的にも整数解になりやすい。

以上の議論と実験 3 が示しているように、トヨタの実際規模の問題より遙かに制約項目が多い問題の最適解もすべて整数解になっていることを踏まえると、次の性質が成り立つ。

性質 4. トヨタの実際規模の問題 R は、性質 2 と性質 3 の両面から整数解になるといえる。

したがって、次の結論が得られる。



性質 5. 性質 1 を持つトヨタの組立ライン決定問題 P の緩和問題の最適解は、定義で示した範囲においては整数解になる。

性質 5 よりトヨタの組立ライン決定問題 P は、緩和問題 P を可分計画問題に変換することによって、可分計画法で最適解が得られることになる。次に、緩和問題 P を可分計画問題 PK に定式化する。まず初めに、変数  $y_{ir}$  を次のように表す。

$$y_{ir} = \sum_{\mu=0}^{n_{\mu}} M_{ir}(\mu) \lambda_{\mu ir}$$

ここで、 $\sum_{\mu=0}^{n_{\mu}} \lambda_{\mu ir} = 1, \lambda_{\mu ir} \geq 0, \mu = 0, 1, \dots, n_{\mu}; i = 1, 2, \dots, n_I; r = 1, 2, \dots, n_R$

である。また、関数  $f_{ir}(y_{ir})$  は次のように表す。

$$f_{ir}(y_{ir}) = \sum_{\mu=0}^{n_{\mu}} f_{\mu ir} \lambda_{\mu ir}$$

ここで、 $f_{\mu ir} = \sum_{k=0}^{\mu} c(k) \{M_{ir}(k) - M_{ir}(k-1)\}, \mu = 0, 1, \dots, n_{\mu}$

である。以上の準備から緩和問題 P は次のような可分計画問題 PK に定式化できる。

$$\begin{aligned} \text{問題 PK: 最小化} \quad & \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} \sum_{\mu=0}^{n_{\mu}} f_{\mu ir} \lambda_{\mu ir} \\ \text{制約条件} \quad & \sum_{\mu=0}^{n_{\mu}} M_{ir}(\mu) \lambda_{\mu ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; r = 1, 2, \dots, n_R \\ & \sum_{\mu=0}^{n_{\mu}} \lambda_{\mu ir} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; r = 1, 2, \dots, n_R \\ & \sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \\ & \sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; j = 1, 2, \dots, n_J \\ & \lambda_{\mu ir} \geq 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n_{\mu}; i = 1, 2, \dots, n_I; r = 1, 2, \dots, n_R \end{aligned}$$

緩和問題 P の局所的最小値は全域的な最小値になるので、可分計画問題 PK は  $x_{ij}, \lambda_{\mu ir}$  を変数として通常の線形計画法のアルゴリズムを適用することによって、最適解  $(x_{ij}^*, \lambda_{\mu ir}^*)$  が効率的に求められる [2]。この最適解  $(x_{ij}^*, \lambda_{\mu ir}^*)$  のうち  $x_{ij}^*$  が緩和問題 P の最適解となる。そしてこの最適解  $(x_{ij}^*)$  は整数なので、組立ライン決定問題 P の最適解  $(x_{ij}^*)$  となる。

#### 4. 実際の組立ライン決定問題の例

現在 2 本の組立ラインで生産している車両が数車名あるが、豊田地区と関東地区の 2 本の組立ラインで生産しているある車両の組立ライン決定問題の規模は表 6 のようになる。制約項目としては現状では型式だけであるが、エンジンと駆動方式を追加する。エンジンと駆動

方式の種類は、それぞれ5と2であるので、制約仕様の数  $n_R$  は27となる。区分線形関数を既に述べたような5つの区分とし、台当たりの費用  $c(\mu)$  は生産変更の費用と輸送費の大きさから決定する。組立ライン決定問題から変換した可分計画問題PKの制約式の数は上から順番に、

$$2 \times 27 + 2 \times 27 + 2 + 1,500 = 1,610$$

で、変数  $x_{ij}, \lambda_{kir}$  の数は、

$$2 \times 1,500 + 6 \times 2 \times 27 = 3,324$$

となり、線形計画問題の規模としては中規模程度である。この問題を解くと、現状の近似解法と比較して輸送費用が約2.5%の削減ができ、大きな効果が期待できる。

現在トヨタにおいては、制約項目として型式のみを使用した近似解法で組立ラインを決定し、コンピュータの処理結果に対し問題があれば人手で修正している。可分計画法を利用すると、月度生産計画と週間生産計画との乖離を輸送費用との兼ね合いできめ細かく設定することができるので、輸送費用の削減だけでなく、より望ましい組立ラインの生産計画ができる。また、常に実行可能可能解が求まり、手作業による修正をなくすることができる。手作業による修正を無くすことは、一連の厳しいコンピュータ・スケジュールの処理が連続的に進めるようになり、実際の工数削減以上に大きな効果となる。

## 5. おわりに

輸送費用の最小化と生産制約の満足という2つの目標を持ち、かつ解が整数であるという条件付きの生産計画問題を取り上げた。異なる2つの目標を満足させるために生産制約を費用に置き換え、生産制約の費用と輸送費用の和を最小にする問題として定式化した。定式化した問題は、解に整数条件が付いた区分線形計画問題になる。別の見方をすると、いくつかの変数の和が区分線形関数であり、かつ解に整数条件が付いたヒッチコック型輸送問題とみなすこともできる。しかし、この問題を効率的に解く方法はまだ開発されていない。しかし、この定式化した問題は制約式に特徴があり、整数条件を緩和した問題の最適解が整数になりやすい性質を持っていることを明らかにした。その結果、緩和問題を可分計画問題に変換し、通常線形計画法で効率的に解くことができることを示した。

新しい仕組みの運用はこれからであるが、現在は利用しているシステムの運用上の理由から機能部品に関する制約を絞っている面がある。しかし、今後は運用上の理由から制約項目を絞る必要はなく、制約項目を何にすべきかについては詳細な検討が必要である。新しい方法は、乖離を抑える制約項目の数が多くなったり、生産する組立ラインが増加したりすることにより、組立ライン決定問題が複雑になればなるほど最適解を求める手法としてその効果を発揮することができ、輸送費用の削減効果も更に大きくなることが期待できる。また、月度生産計画と週間生産計画との乖離の費用の設定も重要であり、今回の定式化では区分線形関数の傾きを制約項目に関係なく一定にしたが、制約項目に応じて傾きを変えることも考えられる。

車両の輸送費用や車両の基本仕様の乖離を抑えるためには、組立ライン決定問題の最適解を求めることも大切であるが、月度生産計画や車名単位の週間生産計画を作成する方法に関しても取り組むべき課題が多々あると思われる。本論文ではこれらの2つの生産計画を所与の条件として取り扱ったが、今後の課題として取り組みたい。

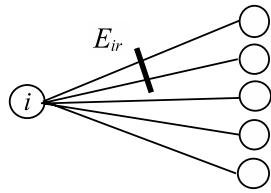


図 11: 束制約が 1 つの場合

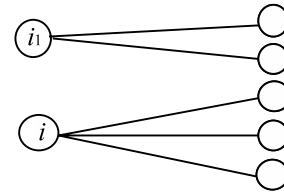


図 12: 変更したネットワーク

## 付録

## (1) 定理 2 の証明

緩和問題 P の最適解  $x_{ij}^R$  が実数解であると仮定する．定理 3 より，

$$y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}^R = M_{ir}(\mu_{ir})$$

となる  $y_{ir}$  が 2 つ以上存在する．このような  $y_{ir}$  の集合を  $F$  とする．また，集合  $F$  に含まれない  $y_{ir}$  に対して，

$$M_{ir}(\mu_{ir} - 1) < y_{ir} < M_{ir}(\mu_{ir})$$

とする．そこで，緩和問題 P を次のように変更した問題を問題 PH とする．

$$\begin{aligned} \text{問題 PH:} \quad & \text{最小化} && \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} c(\mu_{ir}) \left( \sum_{j \in C_r} x_{ij} \right) \\ & \text{制約条件} && \sum_{j \in C_r} x_{ij} = M_{ir}(\mu_{ir}), \quad y_{ir} \in F \\ & && \sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \\ & && \sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\ & && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \end{aligned}$$

明らかのように問題 PH の最適解も  $x_{ij}^R$  となる．

次に，束制約付きのヒッチコック型輸送問題である問題 PH を，束制約のない通常のヒッチコック型輸送問題に変換することを考える．図で示すために，集合  $F$  の  $y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}^R$  に対して，束  $E_{ir}$  を使用して，

$$\sum_{j \in C_r} x_{ij}^R = \sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} x_{ij}^R$$

と表して議論する．束制約で上限や下限になっている束に対して，次のような変更処理をする．

ケース (1) 点  $V_i$  において，1 つの束  $E_{ir}$  だけが上限や下限になっているとする（図 11）．このときは次のような処理をする（図 12 参照）．

「上下限になっている束の処理」

- (1) 新しい点  $V_{i1}$  を追加する．
- (2) 束  $E_{ir}$  の枝  $(V_i, V_j)$  に対して，その枝の始点  $V_i$  を点  $V_{i1}$  に置き換え，点  $V_i$  から分離する．

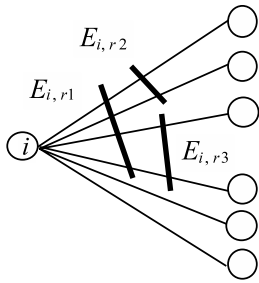


図 13: 束制約が3つの場合

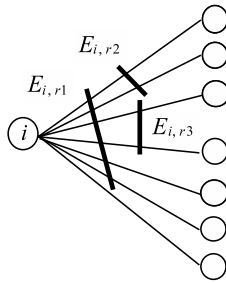


図 14: 束制約が3つの場合

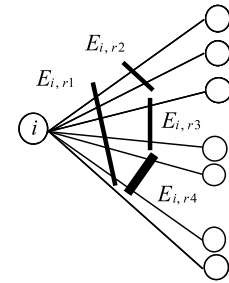


図 15: 仮の束制約の追加

(3) 点  $V_{i1}$ ,  $V_i$  の生産台数は, それぞれ  $\sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} x_{ij}^R$ ,  $N_i - \sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} x_{ij}^R$  とする. これらの値は整数である.

(4) 枝  $(V_{i1}, V_j)$  の輸送費用  $T_{i1,j}$  は  $T_{i1,j} = T_{ij}$  とする.

このように変更すると, 問題 PH の束  $E_{ir}$  に関する制約式

$$\sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} x_{ij}^R = \sum_{j \in C_r} x_{ij} = M_{ir}(\mu_{ir})$$

は点  $V_{i1}$  の生産台数の制約に置き換えることができるので, 問題 PH から束  $E_{ir}$  の制約式を削除することができる.

ケース (2) 図 13 のように3つの束  $E_{i,r1}$ ,  $E_{i,r2}$ ,  $E_{i,r3}$  において,

$$E_{i,r1} = E_{i,r2} \cup E_{i,r3}$$

の場合は,

$$\sum_{(V_i, V_j) \in E_{i,r1}} x_{ij}^R = \sum_{(V_i, V_j) \in E_{i,r2}} x_{ij}^R + \sum_{(V_i, V_j) \in E_{i,r3}} x_{ij}^R$$

となるので, 束  $E_{i,r1}$  を除いて束  $E_{i,r2}$ ,  $E_{i,r3}$  だけを考えれば良く, ケース (1) の応用となる.

ケース (3) 図 14 のように3つの束  $E_{i,r1}$ ,  $E_{i,r2}$ ,  $E_{i,r3}$  において,

$$E_{i,r1} \supset (E_{i,r2} \cup E_{i,r3})$$

の場合は

$$E_{i,r4} = E_{i,r1} - (E_{i,r2} \cup E_{i,r3})$$

となる仮の束  $E_{i,r4}$  があると考えればよい. これは図 15 のように4つの束がある場合として考えることと同じであり, ケース (2) に該当する. なお, 点  $V_{i4}$  の生産台数は

$$\sum_{(V_i, V_j) \in E_{i,r1}} x_{ij}^R - \sum_{k=2}^3 \sum_{(V_i, V_j) \in E_{i,rk}} x_{ij}^R$$

とする. もちろん, この値も整数である.

2つ以上の束の関係は以上の3つのケース以外にもいろいろあるが, 上記の3つのケースの応用として考えることができる. そこで, 問題 PH に対して以上のような変更を行うと, 問題 PH の束制約式は新しく設定された点の生産台数 (整数) に置換されるので, 変更された問題は通常のヒッチコック型輸送問題になり, 変更された問題の最適解  $(x_{ij}^I, x_{ik,j}^I)$  は

整数になる．変更された問題の最適解には問題 PH にはない変数  $x_{ik,j}^I$  を含むが，これらの変数  $x_{ik,j}^I$  を  $x_{ij}^I$  に置換すれば問題 PH の最適解になる．したがって，問題 PH と同値な問題である緩和問題 P の最適解は整数になり，定理 2 が証明された．

(2) 束制約付きのヒッチコック型輸送問題から同値な区分線形計画問題の作成

問題 R と最適解が同値で傾きが 1 つの区分線形計画問題を考える．

$M_{ir}(\mu_{ir} - 1) \leq y_{ir} \leq M_{ir}(\mu_{ir})$  のとき，区分線形計関数を

$$f_{ir}(y_{ir}) = \sum_{j \in C_r} x_{ij}$$

とする．そこで，

$$\sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} f_{ir}(y_{ir}) = \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} \alpha_{ij} x_{ij}$$

とおくと，問題 R と同値な区分線形計画問題が以下のように作成できる．

$$\begin{aligned} \text{問題：} \quad & \text{最小化} \quad \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} (T'_{ij} - \alpha_{ij}) x_{ij} + \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{r=1}^{n_R} f_{ir}(y_{ir}) \\ & \text{制約条件} \quad y_{ir} = \sum_{j \in C_r} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad r = 1, 2, \dots, n_R \\ & \quad \sum_{j=1}^{n_J} x_{ij} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \\ & \quad \sum_{i=1}^{n_I} x_{ij} = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_J \\ & \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \end{aligned}$$

(3) 問題 R の定理 1 の別証明

付録 (1) と同じように束を使用して証明する．問題 R の最適解が実数解  $x_{ij}^R$  とし，

$$\begin{aligned} x_{ij}^R &= [x_{ij}^R] + z_{ij} \\ 0 \leq z_{ij} &< 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_I; \quad j = 1, 2, \dots, n_J \end{aligned} \quad (14)$$

とおく．ここでの証明方法は，実数である  $z_{ij}$  を各束  $E_{ir}$  の制約式，

$$M_{ir}(\mu_{ir} - 1) - \sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} [x_{ij}^R] \leq \sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} z_{ij} \leq M_{ir}(\mu_{ir}) - \sum_{(V_i, V_j) \in E_{ir}} [x_{ij}^R] \quad (15)$$

を満足しながら，0 以上の整数  $z_{ij}^{(\alpha)}$  に変更し，

$$x_{ij}^I = [x_{ij}^R] + z_{ij}^{(\alpha)}$$

が問題 R の最適な整数解になることを示す．このとき，変数  $x_{ij}$  が 1 つの束  $E_{ir}$  にしか含まれないことを前提にして議論を進める．

値が正であるすべての  $z_{ij}$  に対応する枝  $(V_i, V_j)$  とその両端の点  $V_i, V_j$  からなるネットワーク  $NZ$  を作る．ネットワーク  $NZ$  の枝  $(V_i, V_j)$  に対して， $z_{ij}$  が正なので次のような 2 つの距離を定義する．

$$d_{ij} = T'_{ij} \quad ; \quad d_{ji} = -T'_{ij}$$

実数解  $x_{ij}^R$  において、束  $E_{ir}$  の制約式で上限、または下限になっているとする。このとき、付録 (2) の「上下限になっている束の処理」でネットワーク  $NZ$  を変更する (図 11, 図 12 参照)。ただし、枝  $(V_{i1}, V_j)$  についての輸送費は  $d_{i1,j} = d_{ij}$ ,  $d_{j,i1} = d_{ji}$  とする。このような変更を制約式の上下限になっているすべての束  $E_{ir}$  について行う。変更されたネットワークを  $NZN$  とする。点  $V_i$  で点を新しく 2 つ以上追加する場合は、点  $V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{ik}, \dots$  と名付ける。そこで、元の点  $V_i$  に対しても、 $V_i = V_{i0}$  と表現すると、ネットワーク  $NZN$  の組立ラインに対応する点は、 $V_{ik}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) と統一的に表現できる。また、 $z_{ik,j} = z_{ij}$  とおく。ただし、束の名称は表現を簡単にするために変更しない。

ネットワーク  $NZN$  において、同一の点は 1 回しか含まず、かつ枝の数が任意の閉路  $Q$  を考える。ネットワーク  $NZN$  の点  $V_{ik}$  や  $V_j$  は必ず 2 本以上の枝と接している (これは  $z_{ik,j}$  が整数でなく、 $\sum_{j=1}^{n_j} z_{ik,j}$  や  $\sum_{i=1}^{n_i} \sum_k z_{ik,j}$  が整数であることからいえる) ので、閉路  $Q$  を考えることができる。この閉路  $Q$  に沿ってフローを流すことによって、実数である  $z_{ik,j}$  の値を徐々に 0 以上の整数に変更していく。閉路  $Q$  のある方向の距離  $L(Q)$  が 0 以上だとする。この方向の閉路を  $Q^+$ 、反対方向の閉路を  $Q^-$  と表す。 $L(Q^+) \geq 0$  であるので、 $L(Q^-) \leq 0$  となる。そこで、閉路  $Q^-$  において、束制約式 (15) を満足するフローを求める。そのために、閉路  $Q^-$  の各枝  $(V_{ik}, V_j)$  に対して、流すことができるフロー  $q_{ik,j}$  を求める。閉路  $Q^-$  の枝  $(V_{ik}, V_j)$  は次の場合のどれかである。

(1) 点  $V_{ik}$  ( $k \neq 0$ ) に接する枝  $(V_{ik}, V_j)$  の場合

この場合は、枝  $(V_{ik}, V_j)$  は必ずある束に含まれる。今、束  $E_{ik,r}$  に含まれているとすると、ネットワーク  $NZN$  の構成から閉路  $Q^-$  はもう 1 つ、同じ束に含まれ、かつ枝  $(V_{ik}, V_j)$  と逆の向きの枝を含む。したがって、枝  $(V_{ik}, V_j)$  に流すことができるフロー  $q_{ik,j}$  は、

$$(V_{ik}, V_j) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j} = \infty$$

$$(V_j, V_{ik}) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j} = z_{ik,j} \quad (16)$$

となる。

(2) 点  $V_{i0}(= V_i)$  に接する枝  $(V_{i0}, V_j)$  の場合

枝  $(V_{i0}, V_j)$  が束  $E_{ir}$  に含まれるとする。ネットワーク  $NZN$  において、束  $E_{ir}$  に含まれる枝が枝  $(V_{i0}, V_j)$  しかない場合と 2 つ以上ある場合がある。

(i) 束  $E_{ir}$  に含まれる枝が 1 つの場合

束  $E_{ir}$  に含まれる枝のうち、枝  $(V_{i0}, V_j)$  に対応する  $z_{i0,j}$  のみの実数なので、

$$(V_{i0}, V_j) \in Q^- \text{ のとき, } q_{i0,j} = \lceil z_{i0,j} \rceil - z_{i0,j} \quad (17)$$

$$(V_j, V_{i0}) \in Q^- \text{ のとき, } q_{i0,j} = z_{i0,j} \quad (18)$$

となる。なお、 $(V_{i0}, V_j) \in Q^-$  のときは

$$q_{i0,j} = M_{ir}(\mu_{ir}) - \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}} x_{i0,j}^R$$

までフローを流すことができるが、簡単のために式 (17) とする。

(ii) 束  $E_{ir}$  に含まれる枝が 2 つ以上の場合

a) 点  $V_{i0}$  に接するもう 1 つの閉路  $Q^-$  上の枝が束  $E_{ir}$  に含まれる場合は、(1) の場合と同様に、

$(V_{i0}, V_j) \in Q^-$  のとき ,  $q_{i0,j} = \infty$

$(V_j, V_{i0}) \in Q^-$  のとき ,  $q_{i0,j} = z_{i0,j}$  (19)

となる .

b) 点  $V_{i0}$  に接するもう 1 つの閉路  $Q^-$  上の枝が束  $E_{ir}$  に含まれない場合は ,

$(V_{i0}, V_j) \in Q^-$  のとき ,  $q_{i0,j} = \left[ \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} \right] - \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j}$  (20)

$(V_j, V_{i0}) \in Q^-$  のとき ,  $q_{i0,j} = \min\{z_A, z_{i0,j}\}$  (21)

である . ここで ,

$E_{ir}(NZN)$  : ネットワーク  $NZN$  の枝で , 束  $E_{ir}$  に含まれる枝の集合

$$z_A = \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} - \left[ \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} \right]$$

である .

枝  $(V_{i0}, V_j)$  が束に含まれないときは , 上の (1) や (2) の (ii) の a) と同じになる . 閉路  $Q^-$  上の枝のフローは以上のようにして求められる . したがって , 閉路  $Q^-$  で流すことができるフロー  $\Delta q$  は閉路  $Q^-$  上の枝の中の最も小さいフローとなる . すなわち ,

$$\Delta q = \min_{(V_{ik}, V_j) \in Q^- \cup (V_j, V_{ik}) \in Q^-} q_{ik,j}$$

である . そこで ,

$$\begin{aligned} z_{ik,j}^{(1)} &= z_{ik,j} + \Delta q , & (V_{ik}, V_j) \in Q^- \\ z_{ik,j}^{(1)} &= z_{ik,j} - \Delta q , & (V_j, V_{ik}) \in Q^- \\ z_{ik,j}^{(1)} &= z_{ik,j} , & (V_{ik}, V_j) \notin Q^- \end{aligned}$$

とおくと ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_I} \sum_k \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ik,j} z_{ik,j}^{(1)} - \sum_{i=1}^{n_I} \sum_k \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ik,j} z_{ik,j} &= \sum_{(V_{ik}, V_j) \in Q^-} T'_{ik,j} \Delta q + \sum_{(V_j, V_{ik}) \in Q^-} T'_{ik,j} (-\Delta q) \\ &= \Delta q \left( \sum_{(V_{ik}, V_j) \in Q^-} d_{ik,j} + \sum_{(V_j, V_{ik}) \in Q^-} d_{j,ik} \right) = \Delta q L(Q^-) \end{aligned}$$

となる . ここで ,  $T'_{ik,j} = T'_{ij}$  である . したがって ,

$$\sum_{i=1}^{n_I} \sum_k \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ik,j} z_{ik,j} \geq \sum_{i=1}^{n_I} \sum_k \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ik,j} z_{ik,j}^{(1)}$$

となる .

ところで , フローが  $\Delta q$  となった閉路  $Q^-$  上の枝  $(V_{ik}, V_j)$  に対応する  $z_{ik,j}^{(1)}$  の値が , どのようになったかを調べてみる .

(1) フロー  $\Delta q$  が式 (16), (18), (19) と, さらに式 (21) で  $q_{i0,j} = z_{i0,j}$  の場合で決まったときは,

$$z_{ik,j}^{(1)} = 0 \quad \text{または} \quad z_{i0,j}^{(1)} = 0$$

となる.

(2) 式 (17) で決まった場合は,  $z_{i0,j}^{(1)} = \lceil z_{i0,j} \rceil$  となり, 整数になる.

(3) 式 (20) で決まった場合は,

$$z_{i0,j}^{(1)} = z_{i0,j} + \left[ \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} \right] - \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j}$$

で, ネットワーク  $NZN$  の枝で, 束  $E_{ir}$  に含まれる枝  $(V_{i0}, V_j)$  に対応する  $z_{i0,j}^{(1)}$  の和は

$$\sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j}^{(1)} = \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} + z_{i0,j}^{(1)} - z_{i0,j} = \left[ \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} \right]$$

となり, 整数となる.

(4) 式 (21) の  $q_{i0,j} = z_A$  で決まった場合,

$$z_{i0,j}^{(1)} = z_{i0,j} - \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} + \left[ \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} \right]$$

で, ネットワーク  $NZN$  の枝で, 束  $E_{ir}$  に含まれる枝  $(V_{i0}, V_j)$  に対応する  $z_{i0,j}^{(1)}$  の和は

$$\sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{ik,j}^{(1)} = \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{i0,j} + z_{i0,j}^{(1)} - z_{i0,j} = \left[ \sum_{(V_{i0}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{ik,j} \right]$$

となり, 整数となる.

そこで,  $z_{ik,j}^{(1)}$  の値が 0 以上の整数になる場合は, 枝  $(V_{ik}, V_j)$  をネットワーク  $NZN$  から削除する. また, 前述の (3) や (4) の場合のように, ネットワーク  $NZN$  の枝で, 束  $E_{ir}$  に含まれる枝  $(V_{ik}, V_j)$  に対応する  $z_{ik,j}^{(1)}$  の和が整数になった場合は, 上下限になった束の枝と同様に, 前述の [上下限になっている束の処理] を行う. 以上の変更を行ったネットワークを  $NZN^{(1)}$  とする. ネットワーク  $NZN^{(1)}$  において連結した部分ネットワークが存在すれば, 前述と同じ理由により閉路が考えられるので, 同様の処理を繰り返して,  $z_{ik,j}^{(2)}, z_{ik,j}^{(3)}, \dots, z_{ik,j}^{(\gamma)}$  と更新していく.

1 回の処理で複数の枝がネットワークから削除される場合があるが,  $\sum_{(V_{ik}, V_j) \in E_{ir}(NZN^{(\gamma)})} z_{ik,j}^{(\gamma)}$  が整数になる場合は枝が削除されないときもある. しかし, 束の数は有限なので, ある束に関して,  $z_{ik,j}^{(\gamma)}$  の和が整数となる束がなくなれば, 1 回の処理で少なくとも 1 つの枝がネットワークから削除される. したがって, この処理を繰り返すことによって, ネットワーク  $NZN$  は最後には点だけのネットワークになるので処理を終了する. 以上の処理で  $z_{ik,j}^{(\alpha)}$  が求まったとすると,  $z_{ik,j}^{(\alpha)}$  は 0 以上の整数である. そこで,

$$z_{ij}^{(\alpha)} = z_{ik,j}^{(\alpha)}$$

とおき,

$$x_{ij}^I = \lfloor x_{ij}^R \rfloor + z_{ij}^{(\alpha)}$$



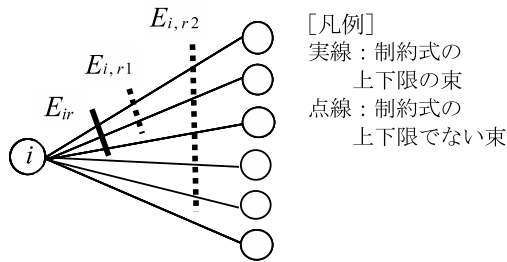


図 16: 制約式の上下限の束と  
 そうでない束を含む場合

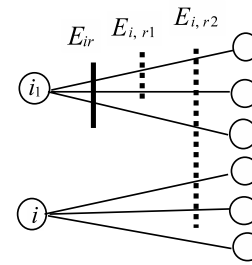


図 17: 束制約が 3 つの場合

とすれば,  $x_{ij}^I$  は整数であり, また,

$$\sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ij} x_{ij}^R \geq \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} T'_{ij} x_{ij}^I$$

となる. したがって,  $x_{ij}^I$  は問題 R の最適な整数解となり, 定理 1 が証明された.

#### (4) 問題 R の定理 2 の別証明

付録 (3) の定理 1 の証明と同じ考え方で証明するが, 付録 (3) と異なるところだけ記述する. 最初に異なるのは, ネットワーク  $NZ$  からネットワーク  $NZN$  を作成するところである. ネットワーク  $NZ$  から以下の処理でネットワーク  $NZN$  を作成する.

##### (1) ケース 1

ネットワーク  $NZ$  の点  $V_i$  に接する枝を含む束において, 制約式の上限か下限になっている束が  $E_{ir}$  のみとする. この場合, 図 16 のように束  $E_{ir}$  の枝を含み, かつ制約式の上限や下限になっていない束が存在する可能性があるが, 定理 1 のところで説明した「上下限になっている束の処理」の方法で変更する. 新設した点  $V_{i1}$  に接する枝を含む束は複数存在する可能性があるが, 表現を簡単にするために束の名称は変更しない.

##### (2) ケース 2

その他のケースも付録 (1) のケース (2) と (3) と同じである. ケース 1 と同じように制約式の上限や下限になっていない束が複数存在する可能性があるが, 表現を簡単にするために束の名称は変更しない.

次に, 異なるのは閉路  $Q^-$  に流すことができるフロー  $\Delta q$  を求めるところである. 閉路  $Q^-$  上の枝  $(V_{ik}, V_j)$  は複数の束  $E_{ir}$  に含まれる可能性があるので, 束  $E_{ir}$  ごとに枝  $(V_{ik}, V_j)$  で流すことができるフロー  $q_{ik,j}(ik, r)$  を求め, その最小値を枝  $(V_{ik}, V_j)$  のフロー  $q_{ik,j}$  とする. 枝  $(V_{ik}, V_j)$  を含む束  $E_{ir}$  は次の 3 つの場合がある (ここでは, 定理 1 の証明のように点  $V_i$  や点  $V_{ik}$  ( $k \neq 0$ ) に接する枝を含む束かどうかの区別はしない). 枝  $(V_{ik}, V_j)$  が束  $E_{ir}$  に含まれているとする.

##### (1) ネットワーク $NZN$ において, 束 $E_{ir}$ に含まれる枝が枝 $(V_{ik}, V_j)$ しかない場合

付録 (3) の (2) の (i) と同じで, 以下のようになる.

$$(V_{ik}, V_j) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j}(ik, r) = \lceil z_{ik,j} \rceil - z_{ik,j}$$

$$(V_j, V_{ik}) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j}(ik, r) = z_{ik,j}$$

##### (2) ネットワーク $NZN$ において, 束 $E_{ir}$ に含まれる枝が複数あり, 点 $V_{ik}$ に接するもう 1 つの閉路 $Q^-$ 上の枝が束 $E_{ir}$ に含まれる場合

この場合は付録 (3) の (1) の場合と同じで，以下ようになる．

$$(V_{ik}, V_j) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j}(ik, r) = \infty$$

$$(V_j, V_{ik}) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j}(ik, r) = z_{ik,j}$$

(3) ネットワーク  $NZN$  において，束  $E_{ir}$  に含まれる枝が複数あるが，点  $V_{ik}$  に接するもう 1 つの閉路  $Q^-$  上の枝が束  $E_{ir}$  に含まれない場合

この場合は付録 (3) の (2) の (ii) の b) の場合と同じで，以下ようになる．

$$(V_{ik}, V_j) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j}(ik, r) = \left[ \sum_{(V_{ik}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{ik,j} \right] - \sum_{(V_{ik}, V_j) \in E_{ir}(NZN)} z_{ik,j}$$

$$(V_j, V_{ik}) \in Q^- \text{ のとき, } q_{ik,j}(ik, r) = \min\{z_A, z_{ik,j}\}$$

以上のようにして枝  $(V_{ik}, V_j)$  を含むすべての束  $E_{ir}$  ごとにフロー  $q_{ik,j}(ik, r)$  を求め，その最小値を枝  $(V_{ik}, V_j)$  のフロー  $q_{ik,j}$  とする．ただし，枝  $(V_{ik}, V_j)$  が束に含まれないときは，上の (2) と同じである．

その他は付録 (3) の定理 1 の証明と同じであり，定理 2 が成立することが示される．

## 参考文献

- [1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti and J. B. Orlin: *Network Flows - Theory, Algorithms and Applications* (Prentice-Hall, 1993).
- [2] G. Hadley: *Nonlinear Programming and Dynamic Programming* (Addison-Wesley, 1964).
- [3] 伊理正夫, 古林隆: ネットワーク理論 (日科技連, 1976).
- [4] 小谷重徳: かんぱん方式の数理. オペレーションズ・リサーチ, 32-11 (1987), 730-738.
- [5] 小谷重徳: 生産管理システム. オペレーションズ・リサーチ, 42-2 (1997), 66-71.
- [6] A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming* (John Wiley & Sons, 1986).

小谷重徳

トヨタ自動車(株)コーポレートIT部

〒471-8571 愛知県豊田市トヨタ町1

E-mail: s.kotani@mail.toyota.co.jp

## ABSTRACT

A CAR PRODUCTION PLANNING PROBLEM OF MINIMIZING THE  
TOTAL COST CONCERNING TRANSPORTATION AND PRODUCTION  
CONSTRAINTS

Shigenori Kotani                      Katsuhisa Ohno                      Takahiro Ito  
*Toyota Motor Corporation    Aichi Institute of Technology    Nagoya Institute of Technology*

This paper deals with a production planning problem at Toyota Motor Corporation. Car dealerships order cars on the basis of weekly instructions given by Toyota Motor Corporation. A weekly production plan for each type of car is made according to the orders obtained from the car dealerships. If a certain type of car is produced on more than one assembly line, weekly production plans need to be made for those assembly lines. When making a weekly production plan for each assembly line, there are two objectives that we must achieve.

One is to minimize the total cost of shipment from the assembly lines to car dealerships. The other is related to the production constraints on the assembly lines. Factories with the assembly lines and suppliers have already finished preparing for production based on monthly production plans. If the difference between the monthly and weekly production plans for each assembly line is minimal, cars and parts can be produced without loss. If the difference is much, however, then the weekly production plan becomes impossible without changing production preparations. Hence, the second objective is to minimize the differences between monthly and weekly production plans.

To achieve two objectives, we firstly define the production constraint cost for the difference between two production plans and consider minimizing the sum of the shipment cost and the production constraint cost. As a result, this production planning problem can be formulated as a separable programming problem with integer constraints. From another point of view, this problem can be considered as a Hitchcock transportation problem with the piecewise linear objective function for the sum of some variables and integer constraints. The algorithm for this problem has not yet been developed. At first we show that we can convert the problem into the minimum cost flow problem, if the production constraints satisfy certain conditions. These conditions hold for many practical problems. And we also show that the practical problems that do not satisfy the conditions have an integer solution due to the structure of the production constraints. Moreover, a local optimal solution of the problem is a global optimal solution. Then we can apply the linear programming algorithms to the problem instead of separable programming and solve it efficiently.