

故障を伴うマシンと有限容量の中間バッファを有する生産ラインの解析法

仇 莉 鈴木 誠道
千葉工業大学

(受理 2002年5月29日; 再受理 2003年5月19日)

和文概要 本論文では故障を伴うマシンと有限容量の中間バッファを有する直列生産ラインを待ち行列理論を用いてモデル化し、状態確率やラインの生産率を求める厳密解法とその厳密解法をベースにした近似解法を提案する。過去にこのような問題に対し、多くの研究が行われてきた。しかし、マシンのステージ数やバッファの容量が増えると、解くべきシステムが巨大になり、それを解くことが事実上不可能である。われわれは平衡状態方程式の特殊構造を明らかにし、この特殊構造を利用して平衡状態方程式を実質的に圧縮して解く厳密解法を提案する。この方法により従来の方法に比べ、計算時間がかなり短縮される。マシンのステージ数が多い場合にこの厳密解法を用いて生産ラインを順次3マシン・2バッファに分解する近似解法を提案する。数値実験により提案した近似解法は有効であることが確認された。

キーワード: マルコフ過程, 生産システム, 特殊構造, アルゴリズム, 精度, 生産率

1. 緒言

本論文の目的は図1に示すように故障を伴う複数個のマシンと有限容量の中間バッファを有する直列生産ラインを待ち行列システムとしてモデル化して、新しい解析法を提案することである。生産システムを待ち行列システムとしてモデル化・解析するアプローチは一般的であるが、その共通の悩みは機械の個数やバッファ容量の増加に伴う解くべき方程式の巨大化である。特に構成機械に故障を取り入れたモデル化では平衡状態方程式の次数の増大はさらに顕著となり、この悩みは深刻である。これに対応する近似解法が考案されている[3][1][17]。しかしその精度がときとして十分でなくシステムの設計、たとえばライン生産率や工程間バッファの適正容量といった生産システムのキーとなる値の推定・設定に十分な情報を提供できない場合がある[2][17]。そこでシステムの巨大化への対応と解析の精度の向上を同時に実現する解析法が求められている。これがこの研究の動機である。

このような生産ラインに対してこれまでもシミュレーション或いは理論的な研究が多く

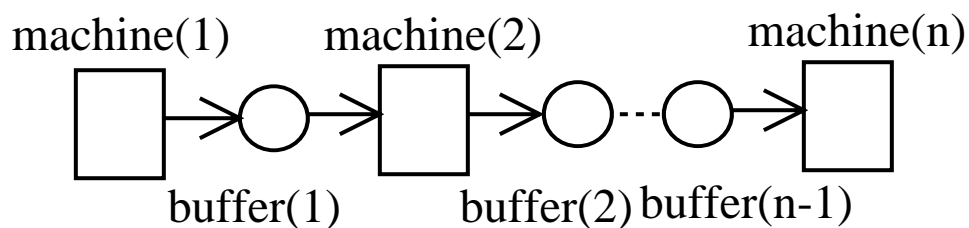


図 1: 直列生産ライン

行われている．特にマシンの数が少ないシステムに対しては2ステージ(2マシン・1中間バッファ)生産ラインの待ち行列モデルの厳密解法 [4][7] や3ステージ・モデルに対する厳密解法 [5][9] が提案されている．この種のシステムではマシンの個数やバッファの容量の増加によって状態数が急激に増加する．その場合に厳密解法は実質的に適用不可能で近似解法が広く用いられている．それら多くの近似解法 [3][2][12][18] は生産ラインを順次2マシン・1中間バッファに分解する．[2] は分解によって取り出された2ステージ生産ラインの前後のシステムの故障発生率と修理率に関する式を立て，求めた故障発生率と修理率を用いて上流および下流マシン群の生産率などを繰り返し法で計算し，得られた生産率を近似解とする方法である．このとき分解された2マシンシステムの解は簡単に解析的に得られる場合が多いので計算は非常に効率的になる．しかし，このような近似分解法は故障発生モデルによっては各マシンの平均故障発生間隔と平均修理時間が大きな差異をもつ場合などに誤差が大になる．この欠点の改善 [1] や生産ラインを1バッファ・1マシンの単位に分解する別法などが研究されている [20][17]．[12] は遷移確率行列を用いる平衡状態方程式を圧縮してガウス・ザイデル法で解き，平衡状態確率を求める厳密解法を提案している．この圧縮方法は圧縮された平衡状態方程式の次元数が各バッファの(容量+1)の積である．バッファの容量が大きい場合に圧縮された方程式の解を求めるのに長時間を要する．そして，[12] はまた生産ラインを2ステージに分解する近似解法を提案している．分解した2ステージサブシステムの上流のマシンの稼働確率とスタービング確率，下流のすべてのマシンの故障確率とブロッキング確率を用いてサブシステムの平衡状態方程式を解き，全ラインにこれを反復適用して全システムの平衡状態確率と生産率の近似値を求める．

これらの研究にもかかわらず2ステージ分解法を中心とする従来の近似解法の精度は十分ではない．とはいえ実用規模のシステムを対象にした厳密解法は事実上不可能である．これに対し，[16][13][19] はいずれもサーバの故障や修理の状態を考慮していないが，システムを順次3ステージに分解する近似解法を提案している．[19] は上流バッファの顧客数が発生する近似条件付確率を用いて分解した3ステージサブシステムの到着率を修正し，下流バッファの顧客数が発生する近似条件付確率を用いて分解した3ステージサブシステムの最後のサーバのサービス率を修正し，これを基に3ステージサブシステムの平衡状態確率を求める．この計算を繰り返し適用し，システムの平衡状態確率の近似値を求める．[16] [13] は分解した3ステージサブシステムに対し，Cross Aggregation Methodで遷移速度行列を獲得し，反復法で平衡状態確率を求めて近似解を求めようという方法である．これらの3ステージ法の導入は近似精度の改善をもたらすが，バッファ容量が増えたり，マシンの故障発生を考慮する場合には基本となる3ステージ・システムの平衡状態方程式も巨大になる．そこで本論文では，巨大な3ステージ以上のシステムも想定して計算時間の短縮と精度の向上という二つの困難を克服することを目的として効率的な3ステージモデルの厳密解法とそれを利用した近似解法を提案する．

この目的を達するには単に分解ステージ数を増やすだけでなく，平衡状態方程式の特殊構造を用いて遷移速度行列を直接変形し，大次元の平衡状態方程式を複数個の小次元の方程式に還元することが肝要である．大規模な連立一次方程式をその行列の特殊構造を利用して効率的に解こうという試みは少なくない．スパースな行列，三重対角行列，偏微分方程式の離散化から生ずる行列を係数行列として有する連立方程式がその例である．大規模方程式は特殊構造を有することが多く，マルコフ過程の平衡状態方程式もその一つである．この分野の例としては Neuts[8] の試みがある．本論文の対象とする待ち行列システムは既約マルコ

フ過程であるので、グラフ理論を用いた行列のブロック三角化 [6] は不可能であり、次善の案は遷移速度行列の小次元の正則行列を対角ブロックの下にもつブロック上ヘッセンベルグ行列（本文図 3 の形）への変形である。この形に変形できると効率的な解法が期待される。本論文では基本となる 3 ステージ・システムに対して行列の細部構造を用いてこの変形を利用した解法を提案する。本論文の構成は以下の通りである。

まず待ち行列理論を用いて対象システムをモデル化し（2 節）、そのモデルの遷移速度行列のブロック三重対角構造と各ブロック内の部分行列の特殊構造を明らかにする（3 節）。次にこれらの特殊構造を利用して平衡状態方程式を解く際に、元の方程式をいくつかの小規模の方程式に還元して解く厳密解法を提案する（4 節）。この方法により平衡状態確率を得る時間は大幅に短縮される（6 節）。これを基にステージ数やバッファの容量が大きい場合でも十分な精度でシステム特性を計算できる近似解法を提案する（5 節）。この近似法の考え方は [12]、[18] の近似法と類似のものである。この方法では生産ラインを順次 3 マシン・2 中間バッファに分解する。分解された 3 ステージ生産ラインは前後のシステムのスタービング（供給する部品がない状態）とブロッキング（下流バッファに空きがない時はマシンに加工品が存在してもマシンは加工を開始しない状態）の影響を受ける。分解された 3 マシン・2 バッファ部分の状態確率から下流に対するスタービング状態と上流に対するブロッキング状態の確率を求め、これを用いて前後のマシンの加工率と故障発生率を次々に更新する。何回かの繰り返しの後、平衡状態確率が収束したとき、それを平衡状態確率の近似解とする。本解法は厳密解と近似解の比較数値実験により有効であることを確認することができた（6 節）。

2. 生産ラインモデル

本研究では、われわれは n 個のマシンと $(n-1)$ 個の有限容量の中間バッファからなる生産ラインを対象とする。ライン中の各マシンの加工時間、故障発生間隔はシステムの状態に依存する分布を有するものとし、具体的に以下のように仮定する。

(1) バッファ i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) の容量はそれぞれ $M_i < +\infty$ とする。

(2) バッファ i の空き数がマシン $i+1$ 中の容量 1 を含んで m_i ($0 \leq m_i \leq M_i+1$) である。マシン i ($i = 1, 2, \dots, n$) の加工時間 X_i はそれぞれパラメータ $f_1(m_1)\mu_1, g_j(m_{j-1}, m_j)\mu_j$ ($j = 2, \dots, n-1$), $f_n(m_{n-1})\mu_n$ の指数分布とする。ただし、 $f_1(m_1)$ を m_1 の単調増加関数、 $g_j(m_{j-1}, m_j)$ をそれぞれ m_{j-1} について単調減少関数、 m_j について単調増加関数、 $f_n(m_{n-1})$ を m_{n-1} の単調減少関数とする。関数 f, g によって、各マシンの生産能力を調整することができる。

(3) マシン i の故障発生間隔 Y_i の分布をパラメータ α_i の指数分布とし、修理時間 Z_i の分布をパラメータ β_i の指数分布とする。各マシンは加工しないときは故障しないものとする。

(4) 以上の加工時間、加工中での故障発生間隔、修理時間は互いに独立とする。

(5) 下流バッファに空きがない時はマシンに加工品が存在してもマシンは加工を開始しない。この時、マシンはブロッキング状態にあるという。これはトヨタ生産方式に類似し、一種の生産ブロッキングと考えられる。

(6) マシン 1 へは倉庫入力（材料が常時供給可能）、マシン n からは製品庫出力（製品は常時排出可能）を仮定する。

(7) 各マシンで加工完了した加工品は直ちに下流のマシンに送られ、加工が開始される。仮定 (5) よりこれは常に可能である。

(8) 加工中のマシンは故障すると直ちに修理が開始される．マシン i の状態 s_i は稼動可能状態 (0 とする) か修理中 (1 とする) のいずれかである．

(3) (5) (7) の仮定より，あるマシンがスタービングまたはブロッキング状態にあるときそのマシンは稼動可能状態にあることを示すことができる．

3. モデルの分析

任意の時刻 t での $(n-1)$ 個のバッファの空き数 $(m_1(t), m_2(t), \dots, m_{n-1}(t))$ と n 個のマシンの状態 $(s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))$ を用いると，2 節に定義した生産ラインの全システムの状態は $S(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots, m_{n-1}(t); s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))$ で表される． $S(t)$ は連続時間離散状態の既約マルコフ過程となる． k マシンシステムの全状態数 $N_k(M_1, M_2, \dots, M_{k-1})$ はつぎの漸化式を満足する，

$$N_k(M_1, M_2, \dots, M_{k-1}) = 2(M_1 + 1)N_{k-1}(M_2, M_3, \dots, M_{k-1}) + N_{k-2}(M_3, M_4, \dots, M_{k-1}), \\ N_1(\cdot) = 2, N_0(\cdot) = 0.$$

これらの状態相互間の遷移速度行列 Q は状態 $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1}; s_1, s_2, \dots, s_n)$ を辞書式に並べて行列表現すると例えば $M_1 = 4$ のときは m_1 に関して並べて以下ようになる．

$$Q = \begin{bmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,4} & A_{5,5} \end{bmatrix}$$

ここで， $A_{i,j}$ は $m_1 = i$ から j への状態の遷移に関するブロックであり，このブロックの要素ブロックを状態 $(m_2, \dots, m_{n-1}; s_1, \dots, s_n)$ について辞書式に並べて表現する．以下に具体例を示す．

3.1. 2 ステージ生産ラインの特殊構造

2 ステージ生産ラインに対し，システムの状態は $S = (m_1; s_1, s_2)$ で表される．上述の Q 中のブロック $A_{i,j} (i, j = 0, 1, \dots, 5)$ の表現を以下に示す．

まず， Q の対角ブロック $A_{i,i} (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ の表現は以下ようになる．

$$A_{0,0} = \begin{bmatrix} -(\alpha_2 + f_2(0)\mu_2) & \alpha_2 \\ \beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}, A_{5,5} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + f_1(5)\mu_1) & \alpha_1 \\ \beta_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}, \\ A_{i,i} = \begin{bmatrix} * & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \beta_2 & * & 0 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 0 & * & \alpha_2 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & * \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq 4).$$

ここで，* で示した対角要素は $-\sum_{j \neq i} q_{i,j}$ により求められる． $q_{i,j}$ は Q の要素である．

つぎに， Q の対角ブロック $A_{i,i}$ の上のブロックの表現は以下ようになる．

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} f_2(0)\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{4,5} = \begin{bmatrix} f_2(4)\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f_2(4)\mu_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{i,i+1} = \begin{bmatrix} f_2(i)\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(i)\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq 3).$$

また, Q の対角ブロック $A_{i,i}$ の下のブロックの表現は以下ようになる.

$$A_{1,0} = \begin{bmatrix} f_1(1)\mu_1 & 0 \\ 0 & f_1(1)\mu_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{5,4} = \begin{bmatrix} f_1(5)\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{i,i-1} = \begin{bmatrix} f_1(i)\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(i)\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2 \leq i \leq 4).$$

これらの表現は行列 Q を自動生成するとき利用される. 2ステージ生産ラインの平衡状態確率 π は平衡状態方程式 $\pi Q = 0$, $\pi e = 1$ (正規条件) を解くことより求めることができる. e はすべての要素を 1 とする列ベクトルである.

3.2. 3ステージ生産ラインの特殊構造

3つのマシンと2つの中間バッファを有する3ステージ生産ラインの場合に, システムの状態は $S = (m_1, m_2; s_1, s_2, s_3)$ で表される. モデルの仮定より, マシンがブロッキング状態またはスタービング状態にあるとき, マシンは稼働可能状態にあるので, システムの総状態数は全状態数の漸化式より $8(M_1 + 1)(M_2 + 1) + 2$ となる. 各マシンの加工中と修理中の間の状態遷移速度行列は以下の通りである.

$$R_{m_1} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + f_1(m_1)\mu_1) & \alpha_1 \\ \beta_1 & -\beta_1 \end{bmatrix},$$

$$T_{m_1, m_2} = \begin{bmatrix} -(\alpha_2 + g_2(m_1, m_2)\mu_2) & \alpha_2 \\ \beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix},$$

$$H_{m_2} = \begin{bmatrix} -(\alpha_3 + f_3(m_2)\mu_3) & \alpha_3 \\ \beta_3 & -\beta_3 \end{bmatrix}.$$

Q の成分を表現するために, 次の諸定義を用いる.

$$A \otimes B \triangleq (a_{i,j} B), A = (a_{i,j}), A \oplus B \triangleq I_A \otimes B + A \otimes I_B. \text{ (Kronecker 積と和)}$$

$$R_{m_1}^0 \triangleq -R_{m_1} e, T_{m_1, m_2}^0 \triangleq -T_{m_1, m_2} e, H_{m_2}^0 \triangleq -H_{m_2} e, r \triangleq (1, 0).$$

(ここで, I_A, I_B はそれぞれ A, B に対応する単位行列, I は 2 次の単位行列)

このとき, Q の中のブロック $A_{i,j} (i, j = 0, 1, \dots, 5)$ の表現を例えば $M_2 = 3$ の場合以下に示す. $B_{k,l}^{(i,j)}$ は $m_1 = i$ から $m_1 = j$ へかつ $m_2 = k$ から $m_2 = l$ への遷移に関するブロックである.

まず, 対角ブロック $A_{i,i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) の表現は以下ようになる.

$$A_{i,i} = \begin{bmatrix} B_{0,0}^{(i,i)} & B_{0,1}^{(i,i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,1}^{(i,i)} & B_{1,2}^{(i,i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{2,2}^{(i,i)} & B_{2,3}^{(i,i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,3}^{(i,i)} & B_{3,4}^{(i,i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4,4}^{(i,i)} \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

そして $A_{i,i}$ を構成する各ブロックは以下ようになる.

$i=0$ のとき

$$B_{0,0}^{(0,0)} = H_0, B_{j,j}^{(0,0)} = T_{0,j} \oplus H_j, (j = 1, 2, 3), B_{4,4}^{(0,0)} = T_{0,4}, \\ B_{0,1}^{(0,0)} = r \otimes H_0^0 r, B_{j,j+1}^{(0,0)} = I \otimes H_j^0 r \quad (j = 1, 2), B_{3,4}^{(0,0)} = I \otimes H_N^0.$$

$i=1, 2, 3, 4$ のとき

$$B_{0,0}^{(i,i)} = R_i \oplus H_0, B_{j,j}^{(i,i)} = R_i \oplus T_{i,j} \oplus H_j \quad (j = 1, 2, 3), B_{4,4}^{(i,i)} = R_i \oplus T_{i,4}, \\ B_{0,1}^{(i,i)} = I \otimes r \otimes H_0^0 r, B_{j,j+1}^{(i,i)} = I \otimes I \otimes H_j^0 r \quad (j = 1, 2), B_{3,4}^{(i,i)} = I \otimes I \otimes H_3^0.$$

$i=5$ のとき

$$B_{j,j}^{(5,5)} = R_5 \oplus H_j, (j = 0, 1, 2, 3), B_{4,4}^{(5,5)} = R_5. \\ B_{j,j+1}^{(5,5)} = I \otimes H_j^0 r \quad (j = 0, 1, 2), B_{3,4}^{(5,5)} = I \otimes H_3^0.$$

Q の対角ブロック $A_{i,i}$ の上のブロックの表現は以下ようになる.

$$A_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1,0}^{(i,i+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,1}^{(i,i+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{3,2}^{(i,i+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,3}^{(i,i+1)} & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

そして $A_{i,i+1}$ を構成する各ブロックは以下ようになる.

$i=0$ のとき

$$B_{1,0}^{(0,1)} = r \otimes T_{0,1}^0 \otimes I, B_{j,j-1}^{(0,1)} = r \otimes T_{0,j}^0 \otimes I \quad (j = 2, 3), B_{4,3}^{(0,1)} = r \otimes T_{0,4}^0 \otimes r.$$

$i=1, 2, 3$ のとき

$$B_{1,0}^{(i,i+1)} = I \otimes T_{i,1}^0 \otimes I, B_{j,j-1}^{(i,i+1)} = I \otimes T_{i,j}^0 \otimes I \quad (j = 2, 3), B_{4,3}^{(i,i+1)} = I \otimes T_{i,4}^0 \otimes r.$$

$i=4$ のとき

$$B_{j,j-1}^{(4,5)} = I \otimes T_{4,j}^0 \otimes I \quad (j = 1, 2, 3), B_{4,3}^{(4,5)} = I \otimes T_{4,4}^0 \otimes r.$$

Q の対角ブロック $A_{i,i}$ の下のブロックの表現は以下ようになる.

$$A_{i,i-1} = \begin{bmatrix} B_{0,0}^{(i,i-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,1}^{(i,i-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{2,2}^{(i,i-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,3}^{(i,i-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4,4}^{(i,i-1)} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

そして $A_{i,i-1}$ を構成する各ブロックは以下ようになる.

$i=1$ のとき

$$B_{j,j}^{(1,0)} = R_1^0 \otimes I \quad (j = 0, 4), B_{j,j}^{(1,0)} = R_1^0 \otimes I \otimes I \quad (j = 1, 2, 3).$$

$i=2, 3, 4$ のとき

$$B_{j,j}^{(i,i-1)} = R_i^0 \otimes I \quad (j = 0, 4), B_{j,j}^{(i,i-1)} = R_i^0 \otimes I \otimes I \quad (j = 1, 2, 3).$$

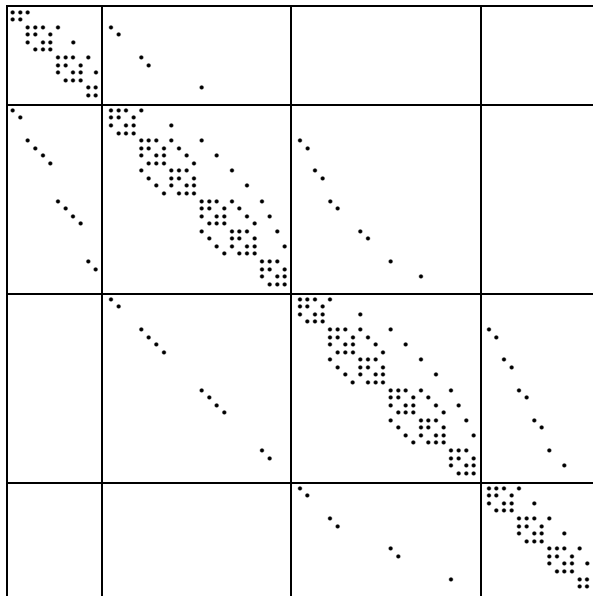
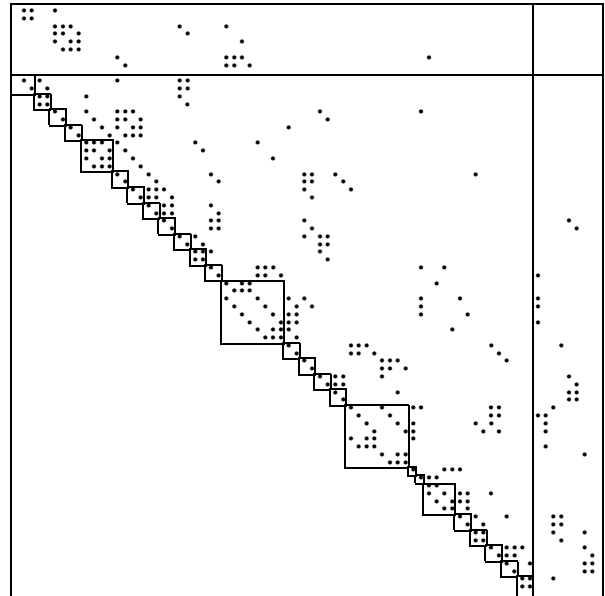


図 2: 3 ステージ生産ラインの特殊構造

図 4: $M_1=M_2=2$ の場合の $Q^{(1)}$ の形

$i=5$ のとき

$$B_{0,0}^{(5,4)} = R_5^0 r \otimes I, B_{j,j}^{(5,4)} = R_5^0 r \otimes r \otimes I \quad (j = 1, 2, 3), B_{4,4}^{(5,4)} = R_5^0 r \otimes r.$$

上に述べた Q の特殊構造の表現は Q の自動生成に利用される．例えば 2 つのバッファの容量をともに 2 とすると， Q (74 次) の要素の 0-1 パターンは図 2 のようになる．ここでは非零要素を表わす．

4. Q 行列の細部構造まで利用する解法

π を求めるには厳密解法と近似解法が考えられる．ここでは，従来の方法 (1), (2) を含む 3 つの厳密解法を比較する．

(1) 特殊構造を利用しない方法

ここでは，LU 分解法を用いる．0 要素との乗算によって結果が 0 となる演算は行わないことによって Q が疎な行列であることは考慮する．

(2) ブロック三重対角構造を利用する方法^[12]

Q の中での $A_{i,i} (i = 0, 1, \dots, M_1+1)$ に対応する π の部分を $\pi^{(i)} (i = 0, 1, \dots, M_1+1)$ とする．

$$\theta_{M_1+1} = -A_{M_1, M_1+1} A_{M_1+1, M_1+1}^{-1}$$

からスタートして， θ_i を

$$\theta_i = -A_{i-1, i} (A_{i, i} + \theta_{i+1} A_{i+1, i})^{-1} \quad (i = M_1, M_1 - 1, \dots, 1)$$

で定義すると， $\pi^{(0)}$ が既知であれば，

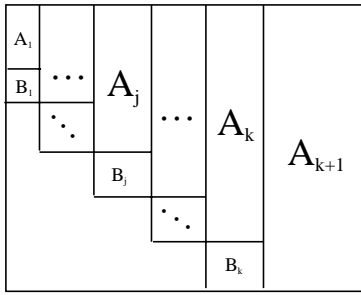
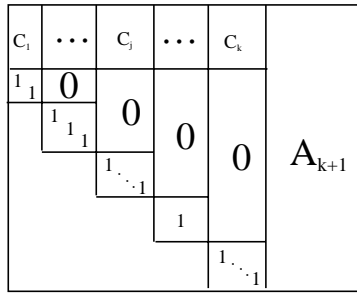
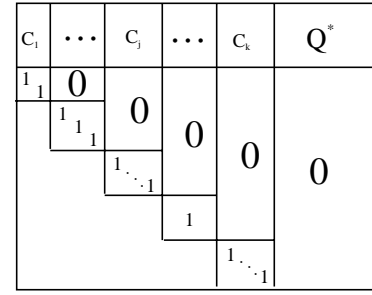
$$\pi^{(i)} = \pi^{(i-1)} \theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, M_1+1)$$

で π が求まる． $\pi^{(0)}$ は $\pi Q = 0$ の第一ブロックの式と正規条件からなる以下の式で得られる．

$$\begin{cases} \pi^{(0)} (A_{0,0} + \theta_1 A_{1,0}) = 0 \\ \pi^{(0)} (\sum_{i=0}^{M_1+1} \prod_{j=0}^i \theta_j e_i) = 1 \quad (\text{正規条件}) \end{cases}$$

e_i はすべての要素を 1 とする列ベクトルであり， θ_0 は $\pi^{(0)}$ と同次元の単位行列である．

(3) Q 行列の細部構造まで利用する解法

図 3: Q の $Q^{(1)}$ への変形図 5: $Q^{(1)}$ の $Q^{(2)}$ への変形図 6: $Q^{(2)}$ の $Q^{(3)}$ への変形

この方法では遷移速度行列の特殊構造を用いて遷移速度行列を直接変形し，大次元の平衡状態方程式を複数個の小次元の方程式に還元する．これにより平衡状態確率を得る時間が短縮される． $S(t)$ は既約マルコフ過程なので行と行，列と列の交換によって遷移速度行列 Q をブロック三角行列にすることは不可能である．そこで， Q の行と行，列と列の交換によって， Q を $B_j (j = 1, 2, \dots, k)$ が正則になるようにして， $Q^{(1)}$ への変形する次善の策をとる (図 3)．このような変形を行う一般的な方法はない．また本来の目的が連立一次方程式を解くことなので，この変形に長時間を要したのでは当面の目的に合わない．そこで簡単にできる変形を採用する． A_j は Q を $Q^{(1)}$ に変形した場合 B_j に対応するブロック列の B_j より上の部分行列である．例えば，3つのマシンと2つの中間バッファを有する生産ラインの $M_1 = M_2 = 2$ の場合に， $Q^{(1)}$ を図 4 のよう変形することができる (付録 A に変形法説明)．図 3 の A_1, B_j に対応する π の部分をそれぞれ $\pi_0, \pi_j (j = 1, 2, \dots, k)$ とすると，平衡状態方程式 $\pi Q^{(1)} = 0$ から以下ようになる．

$$\pi_j B_j + (\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{j-1}) A_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

これより，

$$\pi_j = -(\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{j-1}) A_j B_j^{-1} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

π_1, \dots, π_{j-1} を π_0 の関数として上式に代入してその係数行列を $-C_j$ とすると，

$$\pi_0 C_j + \pi_j = 0$$

となる．これにより $Q^{(1)}$ は $Q^{(2)}$ の形に変換される (図 5)．ここで， $\pi A_{k+1} = 0$ の π_1, \dots, π_k を $\pi_0 C_j + \pi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$ を用いて消去して π_0 の係数行列を Q^* とすると， $Q^{(2)}$ はさらに $Q^{(3)}$ のよう変換される (図 6)．

$\pi Q^{(3)} = 0$ によって，以下のような圧縮された平衡状態方程式が得られる．

$$\begin{cases} \pi_0 Q^* = 0 \\ \pi_0 (e_0 - \sum_{j=1}^k C_j e_j) = 1 \quad (\text{正規条件}) \end{cases}$$

一度 π_0 が求めれば， $\pi_j = -\pi_0 C_j (j = 1, 2, \dots, k)$ により，平衡状態確率 $\pi = (\pi_0 \pi_1 \dots \pi_k)$ が求まる．

$Q^{(1)}$ のような変形は一意ではない． $Q^{(1)}$ への変形を行うより簡単な一つの方法は $A_1 = A_{00}$ とし，順次定まる B_1, B_2, \dots, B_k を用いる方法である (付録 B に変形法説明)．しかし，こ

表 1: 変形による方程式の次元の変化

π_0 の次元数	74	15	12	8	0
π_j の次元最大数	0	1	4	8	74

のような方法によると変形は自明であるが，最適な結果が得られる保証はない．事実，図2の Q の場合 A_1 に対応する変数の集合と A_{k+1} に対応する式の集合をさまざまに選ぶことができる．表1に図2の Q に対するさまざまな変形法の結果を示す．図4は $|\pi_0| = 8$ のケースである．この場合に圧縮された方程式の次元数は8であり，圧縮された前の次元数は74である．圧縮されたにより方程式の次元数がかなり小さくなる．このような変形を行う一般的な方法の発見は今後の課題である．

以上の厳密解法をもとにして以下の近似解法を提案する．

5. 近似解法^{[7],[8]}

マシンの個数やバッファの容量の増大に伴って，解くべきシステムは巨大となる．それに対応するために生産ラインを図7のように3マシンと2バッファを単位として順次分解する．分解された3ステージ生産ラインは前後のシステムのスターピングとブロッキングの影響を受ける．そこで，4節で提案した厳密解法を用い，分解された3マシン・2バッファ部分の状態確率を求める．これらの確率から下流に対するスターピング状態と上流に対するブロッキング状態の確率を求め，これを用いて前後のマシンの加工率と故障発生率を次々に更新する．何回かの繰返しの後，平衡状態確率が収束したとき，それを平衡状態確率の近似解とする．この近似法は[12]，[18]と類似のものである．以下は近似解法の手順である．

分解した i 番目の3ステージサブシステムはマシン i ，バッファ i ，マシン $i+1$ ，バッファ $i+1$ ，マシン $i+2$ からなる($i = 1, \dots, n-2$)．つぎのように記号を定義する．

$Q_{i,k}$: k 回目の繰返しの i 番目の分解の遷移速度行列 ($i = 1, \dots, n-2$) ．

$\pi(i, k)$: k 回目の繰返しの i 番目の分解の平衡状態確率 ($i = 1, \dots, n-2$) ．

$stv(i)$: マシン i のスターピング確率 ($i = 2, \dots, n-2$) ．

$blo(i)$: マシン i のブロッキング確率 ($i = 3, \dots, n-1$) ．

$\alpha_i^{(k)}$ $\mu_i^{(k)}$: k 回目の繰返しのマシン i の故障発生率と加工率 ．

手順1 : 初期化

a . $i = 1, \dots, n$ に対し， $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i$ ， $\mu_i^{(0)} = \mu_i$ ．

b . $k = 1$ とする ．

手順2 : スターピングとブロッキング確率を用いる修正計算

a . $\alpha_1^{(k)} = \alpha_1^{(k-1)}$ ， $\mu_1^{(k)} = \mu_1^{(k-1)}$ ， $\alpha_2^{(k)} = \alpha_2$ ， $\mu_2^{(k)} = \mu_2$ ， $\alpha_3^{(k)} = \alpha_3^{(k-1)}$ ， $\mu_3^{(k)} = \mu_3^{(k-1)}$ ．

b . 分解した3ステージサブシステムの前マシンのスターピング確率を用いて平衡状態確率を修正する ．

$i = 1, \dots, n-3$ に対し， $\begin{cases} \pi(i, k)Q_{i,k} = 0 \\ \pi(i, k)e = 1 \end{cases}$ から $\pi(i, k)$ を求める ．

$stv(i+1) = \{ \pi(i, k) \text{ の } m_i = M_i + 1 \text{ を満足する要素の和} \}$ ．

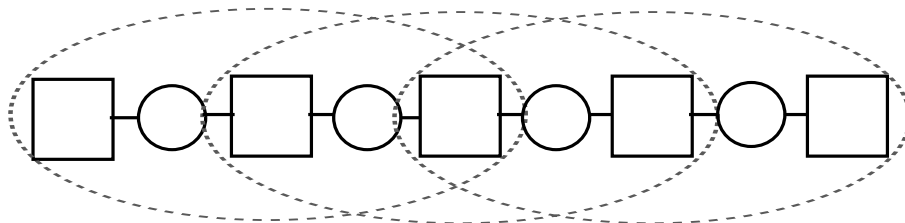


図7: 生産ラインの3ステージ分解

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1}^{(k)} &= (1 - stv(i+1))\alpha_{i+1}, \mu_{i+1}^{(k)} = (1 - stv(i+1))\mu_{i+1}, \\ \alpha_{i+2}^{(k)} &= \alpha_{i+2}, \mu_{i+2}^{(k)} = \mu_{i+2}, \\ \alpha_{i+3}^{(k)} &= \alpha_{i+3}^{(k-1)}, \mu_{i+3}^{(k)} = \mu_{i+3}^{(k-1)}.\end{aligned}$$

c. 分解した3ステージサブシステムの下流マシンのブロッキング確率を用いて平衡状態確率を修正する.

$$i = n-2, \dots, 2 \text{ に対し, } \begin{cases} \pi(i, k)Q_{i, k} = 0 \\ \pi(i, k)e = 1 \end{cases} \text{ から } \pi(i, k) \text{ を求める.}$$

$blo(i+1) = \{ \pi(i, k) \text{ の } m_{i+1} = 0 \text{ を満足する要素の和} \}.$

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1}^{(k)} &= (1 - blo(i+1))\alpha_{i+1}, \mu_{i+1}^{(k)} = (1 - blo(i+1))\mu_{i+1}, \\ \alpha_i^{(k)} &= \alpha_i, \mu_i^{(k)} = \mu_i, \alpha_{i-1}^{(k)} = \alpha_{i-1}^{(k-1)}, \mu_{i-1}^{(k)} = \mu_{i-1}^{(k-1)}.\end{aligned}$$

手順3: 収束条件の判定

もし収束条件(ある分解に対し, k と $k-1$ 回の平衡状態確率の差が所定値以下になること)を満足しなければ, $k = k + 1$ として手順2に行く. そうなければ, 手順4に行く.

手順4: システム特性値の計算

得られた平衡状態確率の近似値を用いてシステム特性値を計算する.

6. 数値実験の結果

ガウス消去法で厳密解がぎりぎり求められるシステムとして4つのマシンと3つの有限容量の中間バッファを有する生産ラインを例にとる. それでも Q は大規模になるので, 行列 Q を自動生成させている. またマシン1のブロッキング確率が幅広い値になるようなテスト問題を生成するため $\alpha_2 = 0.4, \alpha_3 = 0.2, \alpha_4 = 0.1, \beta_i = \mu_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$ とし, α_1 を 0.4 から 0.4 刻みで 4.0 までと変化させる. 前回と今回の状態確率の差が 0.0001 以下になったら繰返しを停止させる.

この時, 厳密解法を用いてマシン1のブロッキング確率は図8のようになる. 支配的な平衡状態確率として値最大のものをとり, 図9と図10にバッファの容量を2, 4とした場合の相対誤差を示す. 図11にバッファの容量を1, 2とした場合の2ステージ分解法と3ステージ分解法の実産率(マシンの生産率はこのマシンの加工している状態確率と加工率の積であり, システムの実産率は最後のマシンの生産率である.)の相対誤差を示す. これらの相対誤差は近似解法の誤差を代表すると見ることができる. 図12にバッファの容量を1とした場合のマシン1のブロッキング確率と最大確率の相対誤差の関係を表す. これはブロッキング確率が近似精度の一つの参考となることを示している. 表2に近似解法の性能を要約する. なお, 表2のIterationsの欄には各近似解法と故障発生率の組み合わせのケースについて上述の停止基準に基づく反復回数を示し, Computation Timesの欄には上述の10ケースの中の最大な計算時間(秒)を示してある.

ガウス消去法で厳密解が求められない8マシンシステムに対して2ステージ分解法, 3ステージ分解法, シミュレーション(シミュレーション言語FOCTOR/AIMを用いた)を適用して生産ラインの実産率を計算した. この場合にブロッキング状態が発生しやすいようなテスト問題を生成するためパラメーターを以下の4つのケースのように設定した. 4つのケースではケース $i (i=1 \sim 4)$ のマシン $j (j=5 \sim 8)$ の故障発生率を $\alpha_j^i = 0.4(i+j-5)$, 他のマシン ($j=1 \sim 4$) の故障発生率を $\alpha_j^i = 0.1$ とし, すべてのマシンの修理率を $\beta_j^i = 4.9$, 加工率を $\mu_j^i = 1$ とし, 上流4つのバッファの容量を9, 下流3つのバッファの容量を1とした. シミュレーションは4つのケースのそれぞれに対して3000単位時間のシミュレーションを10

the blocking probability

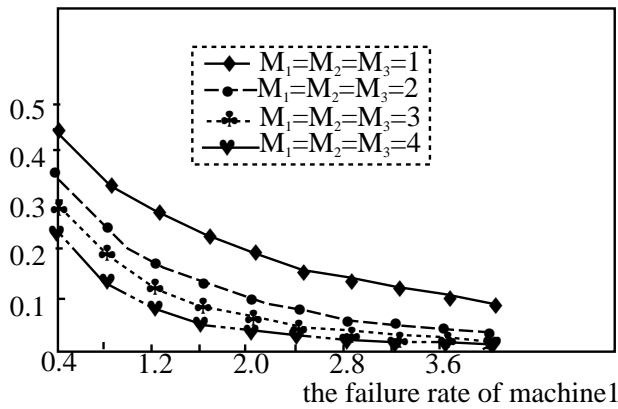


図 8: マシン 1 のブロッキング確率

the relative error

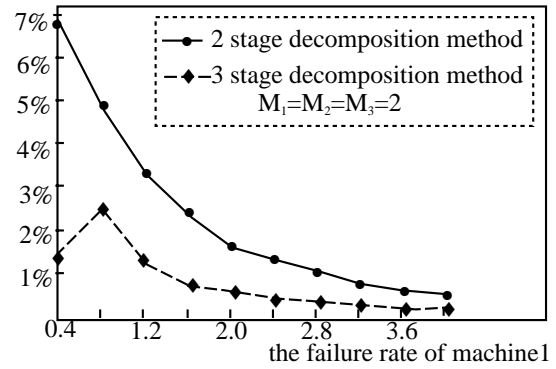


図 9: 最大確率の相対誤差

the relative error

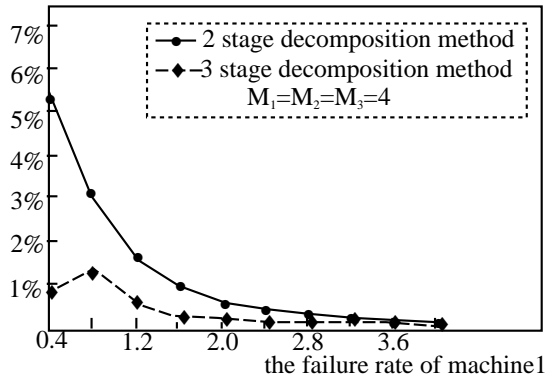


図 10: 最大確率の相対誤差

the relative error of production rate

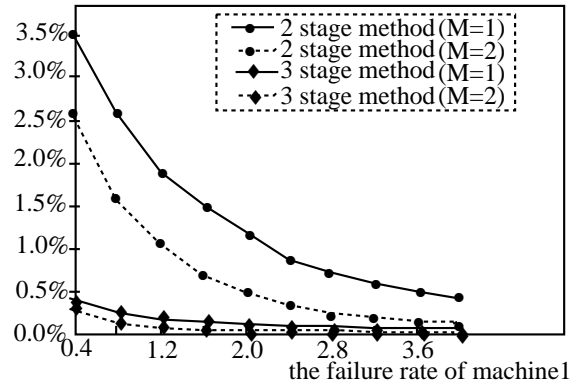


図 11: 生産率の相対誤差

the relative error

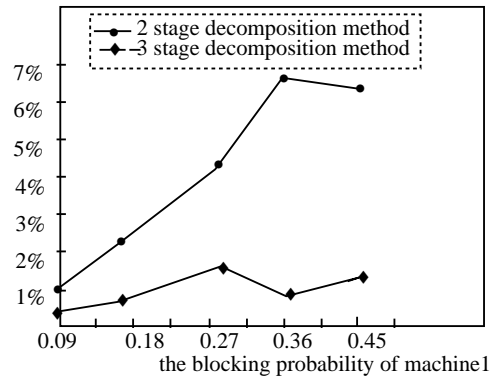


図 12: ブロッキング状態と相対誤差の関係

the production rate

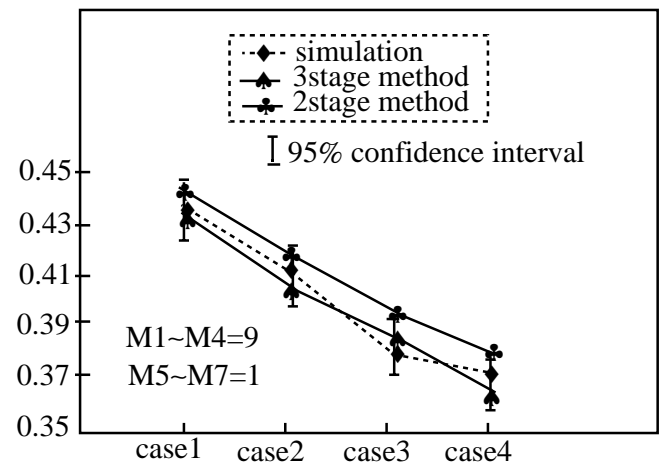


図 13: 8 マシンシステムの生産率

表 2: 近似解法のサマリー

M	Size of Q	Size of Q*		Iterations				Computation Times(seconds)				
		2-stage	3-stage	2-stage		3-stage		Exact Method		Approximate Method		
				value of α_1				G		2-stage		3-stage
				0.4	4	0.4	4	G		G	B	T
1	144	8	34	6	4	4	3	0.332	0.000	0.001	0.002	0.001
2	456	12	74	6	4	4	3	3.044	0.000	0.412	0.355	0.093
3	1056	16	130	5	3	3	3	33.66	0.000	0.966	0.481	0.141
4	2040	20	202	5	3	3	3	238.8	0.000	1.572	0.794	0.310

G : 厳密解法にガウスの消去法を使用

B : 厳密解法にブロック三重対角構造を利用する方法を使用

T : 厳密解法に遷移速度行列の細部構造まで利用する方法を使用

M : $M = M_1 = M_2 = M_3$

回行った．図 13 に 2 つの近似方法とシミュレーションの生産率を示す．4 つのケースの場合に生産率のシミュレーション値の 95% の信頼区間はそれぞれ 0.425 ~ 0.447, 0.402 ~ 0.422, 0.372 ~ 0.392, 0.358 ~ 0.378 であった．3 ステージ分解法の結果はすべての信頼区間の中央付近に位置するが，2 ステージ分解法の結果は過大で信頼区間の端か，それより上になっている．

以上より 2 ステージ分解法，3 ステージ分解法とも収束は速く最大 6 回以後は平衡状態確率に実質的な変化はない．この時点での収束値と厳密値の差が各近似法の誤差を定める．図 9 と図 10 から 2 ステージ分解法の相対誤差は常に 3 ステージ分解法より大であり，前者では 7% に達することもあるが，このときも後者では 2% 程度にとどまる．また遷移速度行列 Q の細部構造を利用した 3 ステージ分解法は特殊構造を利用しない方法に比して高速であり，近似精度の点で格段に 2 ステージ分解法に優る．

7. 結論

本稿では，故障を伴う複数個のマシンと有限容量の中間バッファを有する直列生産ラインを待ち行列理論でモデル化したうえ，平衡状態確率などシステム特性を求める方法を研究した．小規模システムに対しては，遷移速度行列の特殊構造を利用した厳密解法，大規模システムに対しては，生産ラインを 3 ステージに分解し，分解した 3 ステージサブシステムの前後マシンのスターピング確率とブロッキング確率を用いる近似解法を提案した．提案した厳密解法と生産ラインを 3 ステージに分解する近似解法の結合によって，計算時間が短く，精度の高い近似解が得られた．2 ステージ分解法と 3 ステージ分解法は大型システムに対しても実用的である．直感的には 3 ステージ分解法は 2 ステージ分解法より近似精度が高いと考えられる．6 節の実験の結果はこれを裏付けている．このことから 3 ステージ分解法が十分実用価値を有するものと考えられる．また 6 節の結果はブロッキング確率が小さい場合に精度が高く，ブロッキング確率が大きい場合に精度が低くなる傾向があることを示している．本稿ではブロッキング確率が近似精度の目安となることを指摘し，近似解法の精度に関する共通の欠点を緩和することを試みた．ブロッキングの原因となるライン上の位置と近似精度の関係に対してはまだ決定的な結論が得られていない．これは今後の研究課題としたい．

謝辞 論文を精読され適切な助言を賜った査読者に感謝いたします．

付 録

A 図2の図4への変形過程の説明

図2は3マシンシステムの $M_1=M_2=2$ のときの遷移速度行列である．図2の1から8までの行に対応する π の部分を π_0 とする．このとき π の他の部分を π_0 だけで表わすことができる．平衡状態方程式 $\pi Q = 0$ の第1, 2の式を用い, 図2の(13,1), (14,2)に対応する π_{13}, π_{14} を π_0 の関数として表わす． $\pi Q = 0$ の第15, 16の式を用い, 図2の(15,15), (16,16)に対応する π_{15}, π_{16} を π_0 の関数として表わす．さらに図2の(17,3), (18,4), (19,5), (20,6)に対応する $\pi_{17}, \pi_{18}, \pi_{19}, \pi_{20}$ を π_0 の関数として表わす．このようにして, π_0 以外の π の部分を π_0 の関数として表すことが決まる順番によって, $Q^{(1)}$ の行は図2の行1, \dots , 8, 13, \dots , 24, 41, 42, 43, 44, 47, 48, 45, 46, 37, 38, 39, 40, 29, 30, 9, 10, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 51, 52, 65, 66, 61, 62, 63, 64, 49, 50, 53, 54, 55, 56, 67, 68, 35, 11, 12, 33, 34, 36, 57, 58, 59, 60, 69, 70, 71, 72, 73, 74の順番で構成される． $Q^{(1)}$ の列は図2の列1, 2, 15, 16, 3, 4, 5, 6, 21, 22, 23, 24, 17, 18, 19, 20, 43, 44, 47, 48, 13, 14, 39, 40, 45, 46, 7, 8, 9, 10, 29, 30, 31, 32, 27, 28, 41, 42, 37, 38, 61, 62, 51, 52, 55, 56, 65, 66, 67, 68, 53, 25, 11, 12, 35, 36, 33, 34, 59, 60, 49, 50, 69, 70, 73, 74, 26, 54, 57, 58, 63, 64, 71, 72から順番に構成される．この変形の結果は図4のようになる． \cdot は非ゼロ要素を表示する． B_j を図4の枠で表す．以上で用いられていない26, 54, 57, 58, 63, 64, 71, 72列から A_{k+1} が構成される．

このように構成された行列 $Q^{(1)}$ の B_1, B_2, \dots, B_k が正則となる．ゲルシゴリン定理を用いて B_j が正則であることを証明することができる．

B Q の $Q^{(1)}$ への簡単な一つの変形

A の変形法は複雑なので, 簡明な一つの変形法 n マシンシステムの場合に $A_1 = A_{0,0}$ とし, B_1, B_2, \dots, B_k が順次定まることが出来る．3マシンシステムの $M_1=M_2=2$ のときの遷移速度行列図2を例として説明する．

このときの $A_{0,0}$ は12次の行列である． $A_{0,0}$ に対応する π の部分を π_0 とし, 図14に示すように π_0 以外の π の部分を π_0 の関数として表すことが上の枠に対応する π の部分から順番に決まって, 枠内の行列を上から順番に B_1, \dots, B_k とする． $A_{3,2}$ 中の用いられていない43, 44, 51, 52, 58列と $A_{3,3}$ 中の用いられていない63, 64, 67, 68, 71, 72, 73列の12列から A_{k+1} が構成される．

k マシンシステムするとき $A_{0,0}$ の次元数は $N_{k-1}(M_2, \dots, M_{k-1})$ である．上述の2次の行列 B_j は 2^{k-2} になり, 4次の行列 B_j は 2^{k-1} になる．

ゲルシゴリン定理を用いて B_j が正則であることを証明することができる．

参考文献

- [1] Hervé Le Bihan and Yves Dallery: A robust decomposition method for the analysis of production lines with unreliable machines and finite buffers. *Annals of Operations Research*, **93** (2000), 265-297.
- [2] Y. Dallery and R. David and X. Xie: Approximate analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34** (1989), 943-953.

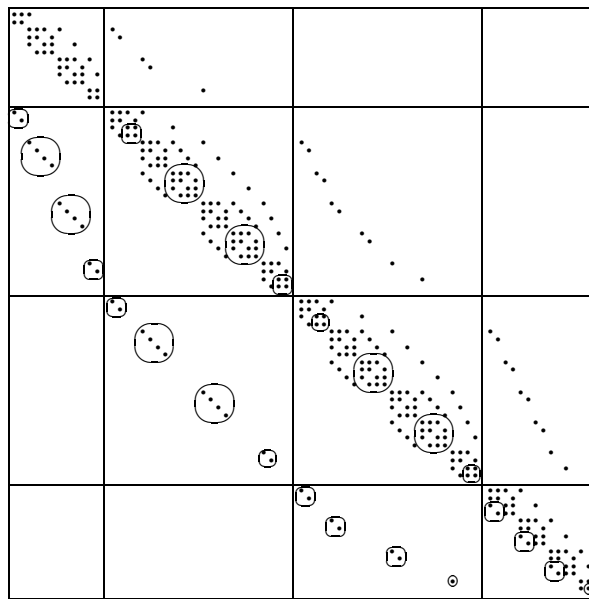


図 14: B_j を決める簡単な一つの方法

- [3] S. B. Gershwin: An efficient decomposition algorithm for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking. *Operations Research*, **35** (1987), 291-305.
- [4] S. B. Gershwin and O. Berman: Analysis of transfer lines consisting of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers. *American Institute of Industrial Engineers Transactions*, **13** (1981), 2-11.
- [5] S. B. Gershwin and I. C. Schik: Modeling and analysis of three stage transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *Operations Research*, **31** (1983), 354-380.
- [6] 伊理正夫, 恒川純吉, 室田一雄: グラフ論の手法による大規模連立方程式の構造の可解性判定とブロック三角化. *情報処理学会論文誌*, **23** (1982), 88-95.
- [7] M. A. Jafari and J. G. Shanthikumar: Exact and approximate solutions to two-stage transfer lines with general up-time and down-time distributions. *Institute of Industrial Engineers Transactions*, **19** (1987), 412-420.
- [8] Marcel F. Neuts: *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models—An Algorithmic Approach (Chapter 2)*. (The Johns Hopkins University Press, 1981).
- [9] 仇莉, 鈴木誠道: バッファの空き数によって加工時間を変化させる 3stage 生産ラインのモデル分析. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会 (1999), 92-93.
- [10] 仇莉, 鈴木誠道: 故障を伴うマシンと中間バッファを有する生産ラインの一解析法. 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会 (2000), 202-203.
- [11] 仇莉, 鈴木誠道: 故障を伴うマシンと中間バッファを有する生産ラインの近似解析法. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会 (2000), 212-213.
- [12] T. J. Sheskin: Allocation of interstage storage along an automatic production line. *American Institute of Industrial Engineers Transactions*, **8** (1976), 146-154.
- [13] Y. Song and Y. Takahashi: Aggregate approximation for tandem queueing systems with production blocking. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34**

- (1991), 329-353.
- [14] S. Suzuki and L. Qiu: A method for a serial production line with finite buffer & machine failures. *INFORMS Philadelphia* (1999).
- [15] S. Suzuki and L. Qiu: Exact and approximate solution methods for a production line with machine failures and intermediate buffers. *EURO XVII, Budapest* (2000).
- [16] Y. Takahashi: A new type aggregation method for large Markov chains and its application to queueing networks. *Proceedings of International Teletraffic Congress-11 (1985)*, 490-494.
- [17] B. Tan and S. Yeralan: Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity Part 2:the decomposition method. *Mathematical and Computer Modelling*, **25** (1997), 109-123.
- [18] 山下英明, 鈴木誠道: n ステージ直列自動生産ラインの最適バッファ配分の近似解法. *日本機械学会論文集 (C編)*, **53** (1987), 807-814.
- [19] E. Yannopoulos and A. S. Alfa: An approximation method for queues in series with blocking. *Performance Evaluation*, **20** (1994), 373-390.
- [20] S. Yeralan and B. Tan: Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity Part 1:the subsystem model. *Mathematical and Computer Modelling*, **25** (1997), 109-122.

鈴木誠道

千葉工業大学社会システム科学部経営情報科学科

〒275-0016 千葉県習志野市津田沼 2-17-1

E-mail: s-suzuki@pf.it-chiba.ac.jp

ABSTRACT

SOLUTION METHODS FOR A PRODUCTION LINE WITH MACHINE
FAILURES AND INTERMEDIATE BUFFERS

Li Qiu Shigemichi Suzuki
Chiba Institute of Technology

This paper presents exact and approximate solution methods for a production line with machine failures and finite intermediate buffers. Our ultimate objective is to develop a method which is better than 2-stage decomposition method in accuracy and is reasonably short in computation times. We first clarify the structure of the balance equations of queueing models of the system and propose an exact solution method to exploit the structure of the transition rate matrix. We then seek an efficient approximate solution method to decompose the line into a set of three-machine and two-buffer blocks for evaluating the performance of the multistage production line. This approximate solution method leads to a simple and fast algorithm. Numerical experiments show that this approximate method is very accurate and efficient.