

施設滞在時間を考慮した安定的な施設圏域モデルの解析

中出 康一
名古屋工業大学

杉原 宏明
大阪大学

(受理 2006年3月31日; 再受理 2006年11月7日)

和文概要 本論文では, 利用者が期待所要時間の短い施設を利用する2施設配置モデルの解析をおこなう. 施設所要時間は, L_1 ノルム距離で定まる往復の移動時間と施設の到着率に依存した滞在時間からなる. 施設への到着はその施設を利用する客数に比例した到着率をもつポアソン過程にしたがい, 施設のサービスは単一指数サーバーであるとする. 利用者が期待所要時間の短い施設を利用するように施設圏域が定まったとき, その施設圏域は安定であるという. 本論文ではこの安定的な施設圏域を求める方法を示すとともに, 安定的な施設圏域下における利用者全体の期待所要時間や所要時間分布を求める. 数値例を用いて, この安定的な施設圏域の性質を考察する.

キーワード: 施設計画, 待ち行列, 最適配置

1. 序論

図書館や役場などの公共施設は, 地域住民から広く利用されている. 公共施設を設置する際, 住民が利用しやすいように, 地域内で施設を適切に配置する必要がある. 例えば, 住民の施設までの移動距離が短くなるような配置方法が考えられる.

定められた評価基準のもとで施設をどのように配置すればよいかを求める問題を施設配置問題と呼ぶ. 施設配置問題に関する研究として, 平面グラフ上の各節点に利用者が存在し, 利用者の総移動費用が最小になるように施設を配置するメディアン問題が古くから知られている (Hakimi[4][5]). また, 地域をボロノイ図によって複数の施設圏域に分け, 利用者との施設までの移動距離をユークリッド距離で表し, その利用者の平均距離が最小となる施設の配置場所を考える最適配置問題がなされている (岡部, 鈴木 [9]). しかし, これらの研究のほとんどは施設の利用率に応じた利用待ち時間は考慮されていない. Berman and Larson [2] はネットワークグラフ上に利用者と施設が配置され, 各施設は $M/G/1$ システムとして利用者にサービスをするとき, 利用者の平均所要時間を最小にするために各ノードの客をどの施設に行くようにすべきかを求めている. 大澤 [8] は, 各地域に施設を配置した上で, 利用者の施設滞在時間を考慮し, 利用者をどの施設に割り当てるかを求める最適配置問題を数理計画問題として定式化し, 解析している. これらの論文では, 施設を配置した上で各利用者にどの施設を利用させるかということを目的にしている. しかし, 実際には利用者自らが望む施設, 例えば所要時間 (往復移動時間と施設利用時間の和) の短い施設を利用することが多いと考えられる.

利用者側の利益を考慮したモデルとして, 救急施設のようにサービス側が顧客に向かいサービスをする窓口移動型のモデルにおいて, サービス側の混み具合を考慮して動的に割り当てる環境下で期待応答時間などを最適に施設を配置する問題の解析がなされている.

Berman, Larson and Parkan[3] は、サーバが複数あり、サービスの発生により一つのサーバが顧客までサービスに行く移動型窓口の期待応答時間を最小にする施設配置を発見的に求める手法を示している。稲川, 鈴木 [6] は連続時間マルコフ連鎖を適用して緊急車両間の相互協力のもとで車両が顧客に向かうとときの最適な車両配置問題を解析している。Berman and Krass[1] は待ち時間を考慮した施設配置モデルに関するこれまでの成果を一般的な形として定式化し、まとめている。しかし、利用者側が図書館などのサービス施設を自己にとって最良になるように選択し、施設まで移動してサービスを受けるような問題にはこれらのモデルは適していない。

本論文では、2つの施設が固定して配置されており、利用者側が期待所要時間が短い施設に向かい施設を利用するとき、各地点の利用者は最終的にどの施設を利用するかを解析する。利用率が高くなると施設利用のための待ち時間が長くなるため、単に移動距離だけでなく、施設の滞在時間を考慮して利用する施設を選ぶ。この結果、各利用者が期待所要時間の短い施設を利用するようになり施設圏域が安定する。本論文では、待ち行列理論を用いてこの安定的な施設圏域を求める方法を示すとともに、利用者全体の所要時間分布や期待所要時間を求める計算法を示す。さらに、総所要時間最小化をもとに定まる圏域と本論文の考え方で定まる安定的な施設圏域との違いを数値例で示すとともに、本論文の手法を最適配置問題に適用した例を示す。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、本論文で扱うモデルを定式化する。3節では、安定した施設圏域を求める方法を提案する。4節では、安定的な施設圏域のもつ性質について数値例を用いて論じる。最後に、5節で本論文の結論を述べる。

2. モデルの定式化

2.1. メッシュモデル

緯度・経度に基づき地域をすき間なく網の目 (Mesh) の区域に分けて、それぞれの区域に関するデータを離散的に編成したものを地域メッシュと呼ぶ (総務庁統計局 [10])。この地域メッシュにより、地域の実態をより詳細に、かつ同一の基準で把握することができるので、国・地方公共団体における都市計画や地域開発など広範な分野で利用されている。数値情報とデータを重ね合わせて地域メッシュ別に表示あるいは分析することにより、地域メッシュをさらに多角的に利用することができる。

本論文では以下のメッシュモデルを扱う。施設の利用者が居住する地域を含む長方形を作り、南北に I 個、東西に J 個に正方形になるように区分する。最左端上段のセルを $(1,1)$ とし、上から i 段目、左から j 段目のセルを (i, j) と表す ($i \in \{1, 2, \dots, I\}$, $j \in \{1, 2, \dots, J\}$)。以下では2つの施設 A, B の位置を (i_A, j_A) , (i_B, j_B) とする (図1)。

セル全体の集合を $V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J\}$ とする。各セル (i, j) の居住者数を $N(i, j)$ とし、この地域全体の居住者数を $N = \sum_{(i, j) \in V} N(i, j)$ とする。

セル (i, j) における施設利用者は率 $\lambda \times \frac{N(i, j)}{N}$ のポアソン過程に従って発生すると仮定する。したがって、施設利用者は地域全体で単位時間当たり λ のポアソン過程に従って発生する。

近代都市においては道路が格子状に敷かれている場合が多く、このときの2地点間の移動距離は L_1 ノルムに近いものとなる。そこで利用者から施設 A, B までの距離 $L_A(i, j)$, $L_B(i, j)$

	→ j							
↓ i	(1, 1)	(1, 2)	$B(i_B, j_B)$...	(1, J)
	(2, 1)	(2, 2)	
	⋮	⋮	⋮	(i, j)	
			$A(i_A, j_A)$		
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
	(I , 1)							(I , J)

図 1: メッシュモデル

を以下のノルムで定義する .

$$\begin{cases} L_A(i, j) = |i - i_A| + |j - j_A|, \\ L_B(i, j) = |i - i_B| + |j - j_B|. \end{cases}$$

セル (i, j) の居住者の施設 A までの往復移動時間を $M_A(i, j)$ とし, 距離 $L_A(i, j)$ に比例すると仮定する . すなわち, 比例定数 c を用いて, $M_A(i, j)$ は次式で表される . B までの往復移動時間 $M_B(i, j)$ も同様である .

$$\begin{cases} M_A(i, j) = cL_A(i, j) = c(|i - i_A| + |j - j_A|), \\ M_B(i, j) = cL_B(i, j) = c(|i - i_B| + |j - j_B|). \end{cases}$$

施設 A, B の窓口は 1 つで, サービス時間はそれぞれ平均 $\frac{1}{\mu_A}, \frac{1}{\mu_B}$ の指数分布に従うものとする . 以下では, 説明の簡単化のため, $\lambda < \min(\mu_A, \mu_B)$ とする (3.4 節において, $\min(\mu_A, \mu_B) \leq \lambda < \mu_A + \mu_B$ の場合に拡張する .)

施設 A, B を利用する地域の居住者数を表す変数を $N_A, N_B (= N - N_A)$ とする (N_A, N_B がどのように定まるかについては 2.2 節で述べる) . N_A, N_B が与えられたとき, 各施設の到着率を λ_A, λ_B とするとき

$$\lambda_A = \frac{N_A}{N} \lambda, \quad \lambda_B = \frac{N_B}{N} \lambda$$

となり, 各施設の到着過程はこれらの到着率をもつポアソン過程に従う . したがって, A, B を訪れる利用者の施設における滞在時間をそれぞれ T_A, T_B とすると, T_A, T_B は M/M/1 システム (窓口の数が 1 つ) の滞在時間となり, 期待値は以下の式となる .

$$E[T_A] = \frac{1}{\mu_A - \lambda_A}, \quad E[T_B] = \frac{1}{\mu_B - \lambda_B}.$$

施設を利用するために利用者が居住地を出て施設に向かってから帰ってくるまでの時間, すなわち往復移動時間と滞在時間の和を所要時間と呼ぶ . セル (i, j) の利用者が施設 A, B を利用するときの所要時間をそれぞれ $H_A(i, j), H_B(i, j)$ とすると,

$$E[H_A(i, j)] = M_A(i, j) + E[T_A], \quad E[H_B(i, j)] = M_B(i, j) + E[T_B]$$

となり, $H_A(i, j)$ の分布関数は以下の式で与えられる .

$$P(H_A(i, j) \leq t) = \begin{cases} 0 & (t < M_A(i, j)), \\ 1 - e^{-(\mu_A - \lambda_A)(t - M_A(i, j))} & (t \geq M_A(i, j)). \end{cases}$$

$H_B(i, j)$ の分布関数も同様である .

2.2. 施設圏域

2.1 節で定義した居住者数 N_A, N_B は具体的に定められていない．本論文では，各セルに居住する利用者は期待所要時間の短い施設を利用するものと仮定する．2つの施設が配置されたとき，各セルの利用者はどの施設を利用するか，またその利用者全体としての所要時間分布がどのようなになるかを求めたい．

施設が設置された当初は利用者は施設までの距離を訪れる．しかし，もう一方の施設よりも施設内が混み合うことで滞在時間が長くなり，距離の遠いほうの施設よりも所要時間が長くなってしまふことがある．その時は，距離は遠くても所要時間の短いほうの施設を利用する．すなわち，施設 A のほうが遠いが，滞在時間は A のほうが短く，結果として A の所要時間が短くなるならば，B を利用するのをやめて A を利用する．施設 A, B の期待所要時間が

$$M_A(i, j) + E[T_A] = M_B(i, j) + E[T_B]$$

と一致する点があるとするとき，この地点で地域全体 V が施設 A, B の施設圏域に分かれる．これらの地点を結んだ線を境界線と呼ぶ．この境界線が定められたとき，施設 A, B の利用者数 N_A, N_B を求めることができる．

A, B の施設圏域をそれぞれ V_A, V_B とするとき，すべてのセルについて

$$M_A(i, j) + E[T_A] \leq M_B(i, j) + E[T_B], \quad (i, j) \in V_A$$

$$M_A(i, j) + E[T_A] \geq M_B(i, j) + E[T_B], \quad (i, j) \in V_B$$

が成り立つならば，全ての利用者について利用する施設のほうが期待所要時間が短くなり，利用施設の変更がされなくなる．以下では，この条件を満たしているとき施設圏域が安定していると呼ぶことにする．言い換えると，施設圏域が安定しているとき，

$$M_A(i, j) - M_B(i, j) < E[T_B] - E[T_A] \quad (2.1)$$

となるセル (i, j) に居住する利用者は A，不等号が逆向きのとき B を利用することになる．左辺はセル (i, j) により定まる定数であり，右辺は全ての居住者の利用施設が定まったとき求められる値である．したがって，利用者から A までの距離と B までの距離の差 ℓ を用いて

$$V(\ell) = \{(i, j) | L_A(i, j) - L_B(i, j) = \ell\}$$

とすると， $V(\ell)$ に属する全てのセル (i, j) について，式 (2.1) の不等号の向きは同じになる．そこで，この $V(\ell)$ をもとに施設圏域を考えることにする．

本論文では，安定する施設圏域として，これまで述べてきた (i) セルの境界上で施設圏域が分割される場合以外に (ii) セルの内部で分割する場合を考える．これまで，各セルの利用者は全て同じ施設を利用するとした．この様なセルの分割のみ考えるときには，安定した施設圏域が得られないことがある．具体的には，セル集合 $V(\ell)$ が A の施設圏域に属すると，B の期待所要時間のほうが短くなる一方， $V(\ell)$ が B の施設圏域に属するときには，A の期待所要時間のほうが短くなるという場合である． $V(\ell)$ の客が B に流れたとき，A の期待滞在時間が小さくなり，B の期待滞在時間が大きくなるためこの様なことが起こり得る．

このため本論文では，次のような施設圏域を認める．上記のようなことが発生するセル集合 $V(\ell)$ について， $V(\ell)$ 上の居住者の一部が A を，残りが B を利用するとする．A を利用す

る割合を $a(0 < a < 1)$ とし、この割合は $V(\ell)$ 上のすべてのセルについて同じ値であるとする。A,B の期待所要時間が等しくなるようにこの割合 a を設定することにより、このセル上の客は他の施設の利用に移ることがなく、安定した施設圏域となる。

(i),(ii) どちらの場合でも、セル $V(\ell-2)$ に居住する利用者は施設 A の施設圏域ならば、セル $V(\ell')$ ($\ell' < \ell$) に居住する利用者はセル $V(\ell-2)$ よりも A までの距離が近く移動時間が短いので、それらの利用者は必ず A を利用する。セル $V(\ell'')$ ($\ell'' > \ell$) に居住する利用者も同様に全て B を利用することになる。このことからセル $V(\ell-2)$ が A の施設圏域で $V(\ell), V(\ell-4)$ が B の施設圏域になるといった飛び地は存在しない。

3. モデルの解法

3.1. セル集合の性質

施設 AB 間の距離を L とする。すなわち、

$$L = |i_A - i_B| + |j_A - j_B|.$$

このとき、 L はセルから施設 A,B への距離の差の最大値となり、 $-L$ はその最小値となる。例えば、図 2 の配置を考えたとき、A と B_1 の距離は 8、A と B_2 の距離は 7 となる。このとき、各セルにおける施設 A,B までの距離の差を計算して図に表したのが図 2,3 である。これらの図からわかるように、 L が偶数であるとき、施設 A,B までの距離の差としてとりうる値は $\ell = -L, -L+2, \dots, -2, 0, 2, \dots, L-2, L$ であり、 L が奇数のときは $\ell = -L, -L+2, \dots, -1, 1, \dots, L-2, L$ となる。

	(1,1)	(1,2)	(1,J)
	(2,1)	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
	⋮	...	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	$B_1(5,9)$...	⋮
	⋮	...	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	$B_2(6,9)$...	⋮
	⋮	...	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)	...	⋮
	⋮	...	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)	...	⋮
	⋮	...	A(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)	...	⋮
	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
	(I,1)	(I,J)

図 2: 施設 A,B の配置例

3.2. 期待所要時間の比較

2.2 節の (i) のようにセル集合の境界上で施設圏域 V_A, V_B に分割されており、 $V(\ell) \in V_B, V(\ell-2) \in V_A$ であるとする。施設圏域が安定しているならば次の不等式が成り立つ。

$$\begin{cases} cL_A(i, j) + \frac{1}{\mu_A - \lambda_A(\ell)} \geq cL_B(i, j) + \frac{1}{\mu_B - \lambda_B(\ell)}, & (i, j) \in V(\ell), \\ cL_A(i, j) + \frac{1}{\mu_A - \lambda_A(\ell)} \leq cL_B(i, j) + \frac{1}{\mu_B - \lambda_B(\ell)}, & (i, j) \in V(\ell-2). \end{cases} \quad (3.1)$$

0	2	4	6	8	-1	1	3	5	7
				B_1					B_2
-2	0	2	4	6	-3	-1	1	3	5
-4	-2	0	2	4	-5	-3	-1	1	3
-6	-4	-2	0	2	A				
-8	-6	-4	-2	0	-7	-5	-3	-1	1

図 3: 各セルの A, B₁, B₂ までの距離の差

ここで

$$\begin{cases} \lambda_A(\ell) = \frac{N_A(\ell)}{N} \lambda, & N_A(\ell) = \sum_{(i,j) \in V(k), k < \ell} N(i,j), \\ \lambda_B(\ell) = \frac{N_B(\ell)}{N} \lambda, & N_B(\ell) = N - N_A(\ell) \end{cases}$$

である。f(ℓ) を

$$f(\ell) = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu_B - \lambda_B(\ell)} - \frac{1}{\mu_A - \lambda_A(\ell)} \right)$$

と置くと (3.1) は次の式に書き直せる。

$$\ell \geq f(\ell), \quad \ell - 2 \leq f(\ell).$$

$\lambda_A(\ell)$ は ℓ について増加関数, $\lambda_B(\ell)$ は ℓ について減少関数であるので, $\lambda_A(\ell) < \mu_A, \lambda_B(\ell) < \mu_B$ を満たす範囲で $f(\ell)$ は ℓ について減少関数である。この $f(\ell)$ を用いて, 境界線を求める。

3.3. 境界線の導出

これまでの議論から, セル全体の集合 V における利用者は, 全て施設 A を利用するか, セルの境界線上で A, B に分かれて利用するか, あるセル集合の内部で分割されるか, 全て B を利用するか, の 4 パターンある。各パターンとなる条件を以下に示す。

(a) $f(L+2) \geq L$ のとき

この場合, $\frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu_B} - \frac{1}{\mu_A - \lambda} \right) \geq L$ となり, 全ての $\ell \in \{-L, \dots, L\}$ に対し,

$$cL_A(i,j) + \frac{1}{\mu_A - \lambda} < cL_B(i,j) + \frac{1}{\mu_B}, \quad (i,j) \in V(\ell)$$

となる。したがって利用者すべてが施設 A を利用する。このとき, 所要時間が t 以内になる割合は

$$P(H \leq t) = \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V} N(i,j) (1 - e^{-(\mu_A - \lambda) \times \max(t - M_A(i,j), 0)})$$

となり, 期待所要時間は

$$E[H] = \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_A - \lambda} + M_A(i,j) \right\}.$$

となる。

(b) $\ell - 2 \leq f(\ell) \leq \ell$ ($\ell \in \{-L+2, \dots, L\}$) のとき

$$V_A(\ell) = \bigcup_{k < \ell} V(k), \quad V_B(\ell) = \bigcup_{k \geq \ell} V(k)$$

とする．前節の議論より，この場合 $V(\ell - 2)$ と $V(\ell)$ の境界線により区分された施設圏域は安定している．所要時間が t 以内になる割合は

$$P(H \leq t) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{(i,j) \in V_A(\ell)} N(i,j) (1 - e^{-(\mu_A - \lambda_A(\ell)) \times \max(t - M_A(i,j), 0)}) \right. \\ \left. + \sum_{(i,j) \in V_B(\ell)} N(i,j) (1 - e^{-(\mu_B - \lambda_B(\ell)) \times \max(t - M_B(i,j), 0)}) \right\}.$$

となる．また，期待値は以下の通りである．

$$E[H] = \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V_A(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} + M_A(i,j) \right\} \\ + \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V_B(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} + M_B(i,j) \right\}.$$

(c) $f(\ell + 2) < \ell < f(\ell)$ ($\ell \in \{-L, -L + 2, \dots, L\}$) のとき

$V(\ell - 2) \in V_A, V(\ell) \in V_B$ とすると， $V(\ell)$ は B の施設圏域に属するが， $\ell < f(\ell)$ により，セル $V(\ell)$ に居住する利用者は A を利用するようになる．しかし， $V(\ell) \in V_A, V(\ell + 2) \in V_B$ とし， $V(\ell)$ が A の施設圏域であるとする， $\ell > f(\ell + 2)$ により，セル $V(\ell)$ に居住する利用者は再び B に利用するようになる．

このことから，2.2 節の (ii) の場合に該当し，セル $V(\ell)$ 内で利用者が分割されることがわかる．セル集合 $V(\ell)$ に居住する利用者に関して A を利用する割合 a ($0 < a < 1$) を用いて，

$$\begin{cases} N_A(\ell, a) = \sum_{(i,j) \in V_A(\ell)} N(i,j) + a \times \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j) \\ N_B(\ell, a) = \sum_{(i,j) \in V_B(\ell)/V(\ell)} N(i,j) + (1 - a) \times \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j) \end{cases}$$

とおき， $V(\ell)$ 上で，A, B の期待所要時間 H_A, H_B が等しくなるように a を求める．

$$cl = \frac{1}{\mu_B - \frac{N_B(\ell, a)}{N} \lambda} - \frac{1}{\mu_A - \frac{N_A(\ell, a)}{N} \lambda} = \frac{1}{\alpha_B - (1 - a)\beta} - \frac{1}{\alpha_A - a\beta}. \quad (3.2)$$

ここで

$$\alpha_A = \mu_A - \lambda_A(\ell), \quad \alpha_B = \mu_B - \lambda_B(\ell) + \lambda(\ell), \quad \beta = \lambda(\ell), \\ \lambda_A(\ell) = \frac{\sum_{(i,j) \in V_A(\ell)} N(i,j)}{N} \lambda, \quad \lambda_B(\ell) = \frac{\sum_{(i,j) \in V_B(\ell)} N(i,j)}{N} \lambda, \quad \lambda(\ell) = \frac{\sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j)}{N} \lambda$$

である．式 (3.2) より a を求める．

(1) $\ell = 0$ のとき $a = \frac{\alpha_A - \alpha_B + \beta}{2\beta}$ となる．

(2) $\ell \neq 0$ のとき

a は以下の 2 次方程式の解のうち $0 < a < 1$ を満たす唯一の解である．

$$g(a) = cl\beta^2 a^2 + \beta[cl(-\alpha_A + \alpha_B - \beta) - 2]a + cl\alpha_A(\beta - \alpha_B) + \alpha_A - \alpha_B + \beta = 0.$$

実際, (c) の条件式 $\ell < f(\ell)$ を書き直すと

$$c\ell\alpha_A(\beta - \alpha_B) + \alpha_A - \alpha_B + \beta > 0$$

となり, 左辺は $g(0)$ であるので $g(0) > 0$ である. また, (c) の条件式 $f(\ell + 2) < \ell$ を書き直すと

$$c\ell\alpha_B(\beta - \alpha_A) + \alpha_A - \alpha_B - \beta < 0$$

となり, 左辺は $g(1)$ となるので $g(1) < 0$ である. $g(a)$ が 2 次式であることから, $g(0)g(1) < 0$ より $g(a)$ の解のうち 1 つのみ $0 < a < 1$ を満たす.

このとき, 施設 A, B の到着率 λ_A, λ_B は

$$\lambda_A = \lambda_A(\ell) + a\lambda(\ell), \lambda_B = \lambda_B(\ell) - a\lambda(\ell)$$

となり, 所要時間が t 以内になる割合, 期待所要時間は以下の式となる.

$$\begin{aligned} P(H \leq t) = & \frac{1}{N} \left\{ \sum_{(i,j) \in V_A(\ell)} N(i,j)(1 - e^{-(\mu_A - \lambda_A) \times \max(t - M_A(i,j), 0)}) \right. \\ & + \sum_{(i,j) \in V_B(\ell)/V(\ell)} N(i,j)(1 - e^{-(\mu_B - \lambda_B) \times \max(t - M_B(i,j), 0)}) \\ & + a \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j)(1 - e^{-(\mu_A - \lambda_A) \times \max(t - M_A(i,j), 0)}) \\ & \left. + (1 - a) \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j)(1 - e^{-(\mu_B - \lambda_B) \times \max(t - M_B(i,j), 0)}) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[H] = & \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V_A(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} + M_A(i,j) \right\} \\ & + \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V_B(\ell)/V(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} + M_B(i,j) \right\} \\ & + a \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} + M_A(i,j) \right\} \\ & + (1 - a) \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} + M_B(i,j) \right\}. \end{aligned}$$

(d) $f(-L) \leq -L$ のとき

$\frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu_B - \lambda} - \frac{1}{\mu_A} \right) \leq -L$ となり, 全ての $\ell \in \{-L, \dots, L\}$ に対し,

$$cL_A(i,j) + \frac{1}{\mu_A} > cL_B(i,j) + \frac{1}{\mu_B - \lambda}, (i,j) \in V(\ell)$$

となる. したがって, 利用者全て施設 B を利用する. このとき, 所要時間が t 以内になる割合, 期待所要時間は以下の通りである.

$$\begin{aligned} P(H \leq t) = & \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j)(1 - e^{-(\mu_B - \lambda) \times \max(t - M_B(i,j), 0)}), \\ E[H] = & \frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in V(\ell)} N(i,j) \left\{ \frac{1}{\mu_B - \lambda} + M_B(i,j) \right\}. \end{aligned}$$

3.4. モデルの一般化

3.4.1. 到着率の範囲の拡張

$\min(\mu_A, \mu_B) \leq \lambda < \mu_A + \mu_B$ の場合を考える． $f(\ell)$ を，

$$f(\ell) = \begin{cases} +\infty, & \lambda_B(\ell) > \mu_B \\ \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu_B - \lambda_B(\ell)} - \frac{1}{\mu_A - \lambda_A(\ell)} \right), & \mu_B > \lambda_B(\ell), \mu_A > \lambda_A(\ell) \\ -\infty, & \lambda_A(\ell) > \mu_A \end{cases}$$

と定義し直す．このとき，次のことから，これまでと同様に分類して安定した施設圏域が定められることがわかる．

(i) $f(\ell) = +\infty, f(\ell + 2) = -\infty$ となる ℓ が存在するとき
 $\mu_A + \mu_B > \lambda$ より $\mu_A > \lambda_A(\ell) + a\lambda(\ell), \mu_B > \lambda - (\lambda_A(\ell) + a\lambda(\ell))$ を満たす a の区間 (a', a'') ($0 < a' < a'' < 1$) が存在する．この区間で

$$f(\ell, a) = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\mu_B - (\lambda - (\lambda_A(\ell) + a\lambda(\ell)))} - \frac{1}{\mu_A - (\lambda_A(\ell) + a\lambda(\ell))} \right)$$

は a に関して連続であることから， $\ell = f(\ell, a)$ となる a が存在し，その割合でセル集合 $V(\ell)$ を分割することにより安定した施設圏域が求められる．

(ii) $+\infty = f(\ell_L - 2) > f(\ell_L) > \dots > f(\ell_U) > f(\ell_U + 2) = -\infty$ となる $\ell_L, \ell_U \in \{-L, -L + 2, \dots, L\}$ が存在するとき
 $f(\ell_U) > \ell_U$ のとき， $f(\ell_U) > \ell_U > f(\ell_U + 2)$ となることから，(c) の場合と同様に $V(\ell_U)$ 上で分割することで安定した施設圏域を求めることができる． $\ell_L - 2 > f(\ell_L)$ ならば， $f(\ell_L - 2) > \ell_L - 2 > f(\ell_L)$ であるのでやはり同様に $V(\ell_L - 2)$ 上で分割することで安定した施設圏域が求められる．他の場合は前節と同じである．

3.4.2. サービス過程の一般化

本論文では，窓口が1つであり，サービス時間は指数分布であると仮定している．窓口が複数ある場合でも上記の議論は同様に成り立つ．ただし，(c) に該当するときの a の計算式は2次方程式ではなく複雑なものとなるため，非線形方程式の解を求める二分法などの数値計算法（例えば水島，柳瀬 [7]）により a を求める必要がある．

また，窓口が1つで，サービス時間が一般の場合であっても同様の議論が成り立つ．この場合，滞在時間分布や所要時間分布はラプラススティルチェス変換により表現できるが，例えば所要時間が x 以上である確率を陽に求めることは一般的に困難であり，逆変換に関する数値計算法を利用する必要がある（Tijms[11] Appendix F 参照）．

4. 数値例

4.1. 平均所要時間最小化により定まる施設圏域と安定的施設圏域

この節では，2施設がすでに配置されているとき，これまでの論文にあるような全体の平均総所要時間最小化によりサービス側が定める圏域と，本論文で示した安定した圏域の差を考察する．セルの全体集合 V を

$$V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$$

とし, $N(1, 1) = 98, N(2, 2) = 1, N(6, 6) = 1$, 他のセルでは $N(i, j) = 0$ とする. 2 施設 A, B はそれぞれ $(1, 1), (6, 6)$ に配置されており, $\mu_A = \mu_B = 1.01, \lambda = 1, c = 10$ とする. すなわち, 施設 A, B が離れており, 施設 A 周辺に利用者が集中している場合である (図 4).

	$j = 1$	$j = 2$				$j = 6$
$i = 1$	A ($N = 98$)					
$i = 2$		e ($N = 1$)				
$i = 6$						B ($N = 1$)

図 4: 数値例

(1,1) に居住する利用者は A を, (6,6) に居住する利用者は B を利用するとしたとき, (2,2) にいる利用者 (利用者 e とよぶ) がどちらの圏域に属するかを考える. まず, 総平均所要時間を最小化するように利用者 e に利用施設を割り当てる問題を考える. 利用者 e の利用施設を A にするとき全体の平均所要時間は

$$0.98 \times \frac{1}{(1.01 - 0.99)} + 0.01 \times \left(\frac{1}{1.01 - 0.99} + 2 \times 10 \right) + 0.01 \times \frac{1}{1.01 - 0.01} = 49.71$$

となり, B を利用施設とすると

$$0.98 \times \frac{1}{(1.01 - 0.98)} + 0.01 \times \left(\frac{1}{1.01 - 0.02} + 8 \times 10 \right) + 0.01 \times \frac{1}{1.01 - 0.02} = 33.48$$

となる. すなわち利用者 e に対し B を利用させることにより全体の平均所要時間を減らせる. これは (1,1) に居住する利用者の施設利用待ち時間を大きく減らすことができるためである.

一方, 利用者 e にとっては, A に行くと所要時間は $\frac{1}{1.01-0.99} + 2 \times 10 = 70$, B に行くと所要時間は $\frac{1}{1.01-0.02} + 8 \times 10 = 81.01$ であるので, A に行く方が好ましい (実際, この振り分けにより安定した圏域が形成される). 従って, 平均所要時間最小化という観点で施設利用者を区分すると, 利用者 e は施設 B の圏域に属するが, 本論文で扱うような, 利用者の行動から定まる安定的施設圏域においては, 施設 A の圏域に属することになる.

施設利用者が一方に集中し, その施設の利用時間が混雑のため大きくなる場合, 全体の最適化から利用者の利用施設を定めると, 一部の利用者にとっては所要時間が長くなる施設を利用させられることがあることをこの例は示している. 一方, 本研究に示す安定した利用圏域では, 全体の居住者の総平均期待時間を最小化するように居住者の利用施設を定めるとは限らないが, 各利用者にとっては期待所要時間の短い施設を常に利用していることになる.

4.2. 安定的施設圏域下における最適施設配置問題

ここでは, 同時に 2 つの施設を配置するとき, 安定な施設圏域を形成するという状況下で平均所要時間が最小になる (あるいは所要時間がある値以下となる確率が最大になる) ためにどの地点に配置すればよいかという問題の例を示し, 解がもつ性質について考察する.

セルの全体集合 V を

$$V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq 30, 1 \leq j \leq 30\}$$

とする。すべての2地点の組み合わせを考え、各組み合わせのもとでこれまで述べた安定な施設圏域を求める。これを元に平均所要時間が最小になる地点を求めた。ここでは、距離に関する比例定数を $c = 1$ とし、施設 A, B の平均サービス時間 $\frac{1}{\mu_A}, \frac{1}{\mu_B}$ 、一般施設の到着率 λ は以下の値をとるものとする。

$$\frac{1}{\mu_A} = \frac{1}{\mu_B} = \frac{1}{3}, \lambda = \frac{1}{4}$$

また、すべてのセルにおいて居住者数は 100 であるとする。

プログラムは C 言語により作成し、計算は Windows XP 上の Fujitsu C コンパイラを用いて Pentium4 CPU 2.4GHz, メモリ 512MB をもつパソコン上で行った。すべての配置の組み合わせについて安定的な施設圏域を計算し、最適な施設配置を求めるまで 2 秒程度であった。1セルを通常データにみられる 500m 四方の正方形とすると、全体では 15km 四方の利用圏域に相当する。

平均所要時間を最小になるように施設を配置すると、(8,15) と (23,15) に配置するのが最適となった。一方、所要時間が 10 以下となる確率を最大にするように配置する場合は (10,10), (19,21) に配置するのが最適となった。それぞれの施設圏域を図 5(a), (b) に示す。後者の場合、3.3 節の (c) のケースに該当し、 $V(0)$ 上で 8 割が (10,10) に配置された施設を、2 割が (19,21) に配置された施設を利用することにより圏域が安定した。

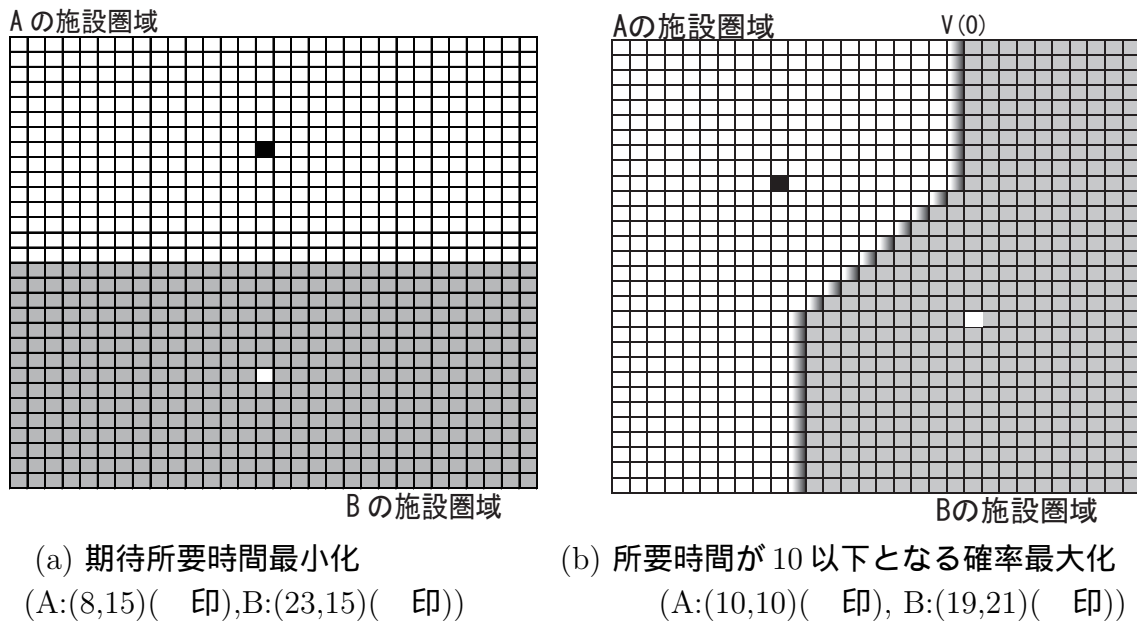


図 5: 最適施設配置とその安定的施設圏域

図 5 の結果から、正方形の利用区域上で均等に分布している場合、安定的施設圏域の条件下では、平均所要時間最小化のための最適施設配置の安定的施設圏域は上下で半分に分ける形になるのに対し、所要時間が 10 以下となる確率を最大化する最適配置のもとでは斜めに地域を分割することがわかる。後者の場合、所要時間分布を目的とするため、なるべく近い距離に多くの利用者があることが前者と比べより重要となるためこのような差が生じたと考えられる。

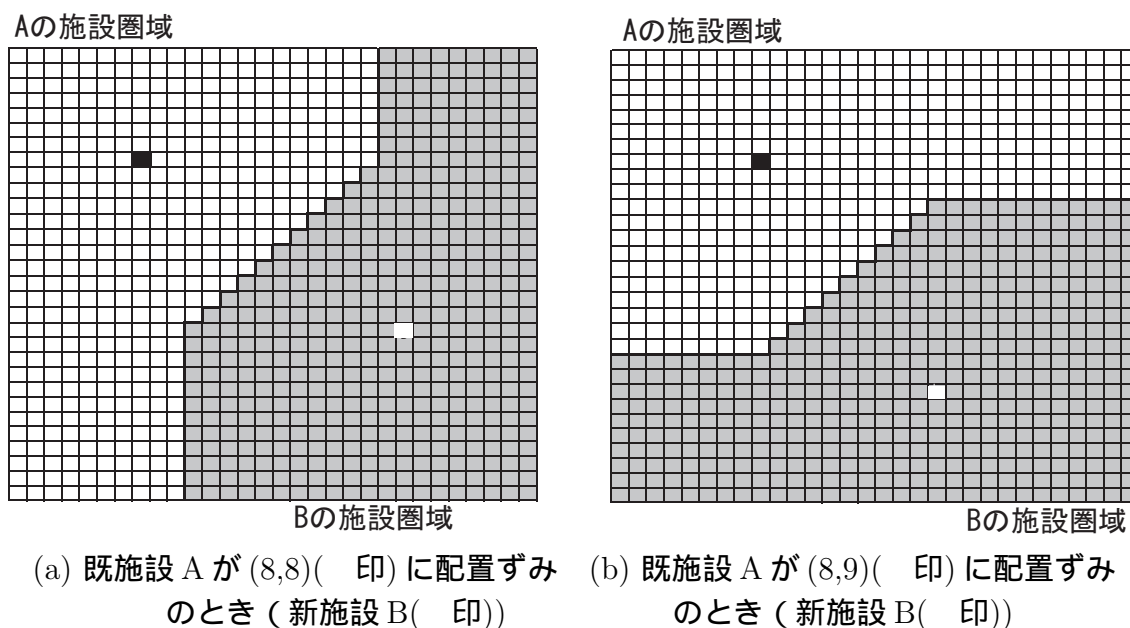


図 6: 最適な新施設配置とその安定的施設圏域

また、同じ条件のもとで、既存の施設 (A と呼ぶ) が存在する場合、新施設 (B と呼ぶ) の位置をどこにおけば、安定的施設圏域の条件下で利用者全体の平均所要時間を最小になるかを調べた。施設 A が (8,8) のとき、施設 B を (19,23) に配置するのが最適であるのに対し、A が隣の (8,9) に配置されているときは、施設 B を (23,19) と前者とはかなり異なる場所に配置するのが最適となる (図 6)。この 2 つの境界線を調べると、前者は $V(0), V(2)$ の境界線が安定的な施設圏域の境界になるのに対し、後者は $V(-1), V(1)$ の境界線が安定的な施設圏域の境界となる。すなわち、最適配置における施設圏域の境界線の変化とともに、最適な施設配置も大きく変化する。このことは、厳密な意味で最適な位置を求めるためにはある程度多くの施設配置の組み合わせを調べる必要があることを意味している。

5. 結論

本論文では、利用者が期待所要時間の短い施設を利用する 2 施設配置モデルを定式化した。モデルを用いて、各セルにおける利用者の利用施設を求める方法を示すとともに、各セルごとの所要時間の分布や所要時間がある値以下に収まる利用者の割合を求めた。また、最適配置問題への応用例を与えた。

本論文では施設のサービスシステムが $M/M/1$ であるとして問題を解析したが、 $M/G/1$ 、 $M/M/s$ でも適用できる。また、移動時間が確率的であっても同様に解くことが可能である。

本論文では 2 施設を配置するモデルを扱ったが、施設数が 3 以上の場合については解析されていない。また、より大規模な圏域のデータについて効率的に最適な配置を求めるアルゴリズムが必要である。さらに、往復移動時間を L_1 ノルムと仮定したが、現実では道路は曲がっており、斜めになっている場合も考えられるため、距離を求めるのは単純ではない。これらの要素を取り入れたモデルをどのように解析するかが今後の課題である。

参考文献

- [1] O. Berman and D. Krass: Facility location problems with stochastic demand and congestions. In Z. Drezner, H.W. Hamacher (eds.): *Facility Location —Application and Theory—* (Springer, 2002), 329–371.
- [2] O. Berman and R.C. Larson: Optimal 2-facility network districting in the presence of queuing. *Transportation Science*, **19** (1985), 261–277.
- [3] O. Berman, R.C. Larson and C. Parkan: The stochastic queue p-median problem. *Transportation Science*, **21** (1987), 207–216.
- [4] S.L. Hakimi: Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, **12** (1964), 450–459.
- [5] S.L. Hakimi: Optimum distribution of switching centers on a communication network and some related graph theoretic problems. *Operations Research*, **13** (1965), 462–475.
- [6] 稲川敬介, 鈴木敦夫: 連続時間マルコフ連鎖を用いた緊急車両配備問題について. *日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌*, **47** (2004), 25–39.
- [7] 水島次郎, 柳瀬真一郎: *理工学のための数値計算法* (数理工学社, 2003).
- [8] 大澤義明: 待ち行列を用いた行政サービス割当問題について. *日本都市計画学会第20回学術研究発表論文集* (1985), 109–114.
- [9] 岡部篤行, 鈴木敦夫: *最適配置の数理* (朝倉書店, 1992).
- [10] 総務庁統計局: *地域メッシュ統計の概要* (2003).
- [11] H.C. Tijms: *A First Course in Stochastic Models* (Wiley, 2003).

中出康一
名古屋工業大学 社会工学専攻
〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町

ABSTRACT

ANALYSIS OF FACILITY LOCATION MODEL WITH STABLE REGIONS

Koichi Nakade Hiroaki Sugihara
Nagoya Institute of Technology *Osaka University*

In this paper, we analyze a facility location model in which a facility with shorter expected required time is utilized. Required time for facility consists of the round-trip travel time and the sojourn time, and each facility has a single server with exponentially distributed service time. An area in which customers live is divided in a form of meshes. Demand from each mesh forms a Poisson process. Customers first visit the nearer facility, but if one facility is congested, a part of customers who visited the facility will go to another facility. Then in a steady state each customer visits a facility with shorter expected required time, and the area is divided to two stable regions.

The two-facility location model with the stable regions is formulated by using queueing theory, and a computation method for deriving a boundary line dividing these regions is proposed. From this boundary, overall expected required time and required time distributions for all customers can be derived. Properties of the stable regions are discussed by numerical examples.