日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research
Society of Japan
2007 年 50 巻 82-99

社会的評判を考慮したネットワーク形成の分析

林田 智弘　　片桐 英樹　　西﨑 一郎
広島大学

(受理 2006 年 4 月 14 日; 再受理 2007 年 4 月 25 日)

和文概要　本論文では，プレーヤーが社会的評判を考慮した行動を取る場合に形成される社会的ネットワークに関する分析を行なう．効用最大化の行動選択基準を持つ複数のプレーヤーが存在する状況に対して，プレーヤーの効用関数に社会的評判を導入した数理モデルを用いて，ネットワーク形成に関する分析を行い，形成されるネットワークの安定性について考察する．

キーワード: グラフ理論，意思決定，社会的ネットワーク，社会的評判，対安定的ネットワーク

1. はじめに

本論文では，社会的ネットワーク形成に関する分析を行なう．社会的ネットワークとは，例えば学校のクラスや趣味のクラブ，会社の組織，企業間での提携，国家間の関係など個人や集団などの意思決定主体の関係をネットワークとして表現したものであり，社会的ネットワークの構成員を頂点，その構成員の間に定義される結合関係を枝により数学的に記述したグラフモデルにより定義される [6].

ネットワーク形成に関する分析では，形成されるネットワークの効率性や安定性に関する考察に大きな関心が集められた．ここで，効率的ネットワークとは，形成可能なネットワーク構造の中でプレーヤーの利得もしくは効用の合計が最大となるネットワークである．また，あるネットワークにおいて，新しくリンクが形成されることもなく，既存のリンクが破棄されることもない場合，そのネットワークを対安定的ネットワークという．Jackson and Wolinsky [10] は形成されるネットワークの安定性と効率性を定義し，両者の関係について議論を行うとともに，対安定的ネットワークとして，任意の 2 人のプレーヤー間にリンクが存在する完全ネットワークやリンクが形成されない空ネットワークだけではなく，中心となる 1 人のプレーヤーとそのプレーヤーとのみリンクを形成している周囲のプレーヤーにより形成されているスター型ネットワークが形成される数理モデルを提案した．また，Hummon [8] は，Jackson and Wolinsky [10] とは異なるリンク形成やリンク破棄に関する仮定を採用した場合，リング型ネットワークも対安定的ネットワークとして形成されることを示した．Currarini and Morelli [4]，Mutuswami and Winter [16] は，展開型ゲームの拡張としてネットワーク形成を分析し，利得を配分するときのプレーヤー間の交渉を考慮することにより効率的ネットワークが対安定的ネットワークとなる場合もあることを示した．法人合併問題 [18]，動的ゲーム [12]，プレーヤー間のコミュニケーションを考慮した協力ゲーム [2, 11]，企業内の内部組織の形成 [14]，雇用調査 [3, 15]，システム親和性 [13]，航空路線の決定 [7, 20]，輸送問題の最適化問題 [19] などで現実社会における効率的ネットワークと対安定的ネット

ワークとの関係が分析された．

これまでのネットワーク形成に関する研究では，プレーヤーはネットワークから直接効用を得ると仮定した分析が行なわれてきた．直接効用とは，例えば個人間で交友関係を持つことにより得られる効用や知人の紹介により得られる雇用情報やビジネスチャンス，国家間で友好関係を結ぶことにより得られる国益，企業間で提携を結ぶことにより得られるそれぞれの利益などのように，プレーヤーがリンクを形成することで相手プレーヤーを通してネットワークから直接得られる効用のことである．しかし，例えば環境保護ボランティア団体のような公共財保全を目的とした集団におけるネットワーク形成においては，プレーヤーがリンクを形成することはネットワークに属するプレーヤーと協力して公共財保全活動に参加することを意味しており，あるプレーヤーが新たにリンクを形成することにより，公共財保全活動の水準が高くなると考えられる．また，公共財の性質として，その効用は公共財保全活動に参加していないプレーヤーを含めたすべてのプレーヤーが均等に得る．さらに，プレーヤーの行動は他のすべてのプレーヤーの得る効用に大きな影響を与え，逆にプレーヤーがネットワーク活動から得る便益は他のプレーヤーの行動に依存しているといえる．したがって，プレーヤーがネットワークから直接効用を得る場合に比べ，間接的に効用を得る場合，あるプレーヤーの行動が他のすべてのプレーヤーの得る効用や利得に影響することから，プレーヤーは他のプレーヤーの行動を評価し，逆に，各プレーヤーが他のプレーヤーからの評判，すなわち社会的評判をより強く考慮した行動を取る状況であるといえる．

社会的評判の概念は Akerlof [1] により提案され，効用関数へ導入したモデルに関する分析が行なわれた．その後，現実社会の集団行動の説明に用いる研究 [5, 9] がいくつか報告されている．また，Nyborg and Rege[17] は，喫煙者と非喫煙者の社会的関係について分析し，外部からの圧力を短期間与えることで，長期にわたり社会的評判に影響を与え，同時に社会行動にも影響を与えることを示した．

本論文では，プレーヤーの効用関数に社会的評判を導入した数理モデルを用いて，効用最大化の行動選択基準を持つ複数のプレーヤーが存在する状況におけるネットワーク形成に関する分析を行うことで，従来のネットワーク形成に関する文献では得られていない，実社会でしばしば観測されるような複雑な構造を持つネットワークが対安定的ネットワークとして形成される場合があることを示す．ただし，社会的評判の影響がより強く働く状況であると考えられるため，プレーヤーが公共財保全活動などのネットワーク活動により便益を得る状況を考え，プレーヤーの効用関数は，ネットワーク活動に参加するためのコストと，ネットワーク活動により得られる便益，さらにネットワーク活動に参加することにより得られる社会的評判により構成されるものとする．

本論文の構成は次の通りである．2 節でネットワークに関する定義を述べ，3 節でプレーヤーがネットワークから間接的に効用を得る状況における一般的な数理モデルを構築する．さらに分析のためのより具体的なモデルを提示し，ネットワーク形成に関する分析を行なう．4 節で数値例を示し，5 節で結論を述べる．

2. 定義

本節では，Jackson and Wolinsky [10] における Connection Model にならい，ネットワーク形成に関する分析に必要な定義を述べる．

2.1. ネットワーク

本論文では，社会構成員であるプレーヤーを頂点，プレーヤー間の結合関係を定義するリンクを枝により数学的に記述したグラフモデルによりネットワークを定義する．また，$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ をプレーヤーの有限集合とする．

定義 2.1 (リンク) サイズ *2* の N の部分集合 $ij = \{i, j \mid i, j \in N,\ j \neq i\}$ をリンクといい，L をリンクの集合とする．

定義 2.2 (ネットワーク) プレーヤーの集合とリンクの集合との組 $g = (N, L)$ をネットワークという．

任意のネットワーク $g = (N, L)$ において，$ij \in L$ はプレーヤー i, j 間にリンクが形成されていることを意味し，$ij \notin L$ はプレーヤー i, j 間にリンクが形成されていないことを意味する．また，$L^N = \{ij \mid \forall i, j \in N,\ i \neq j\}$ とし，$g^N = (N, L^N)$ を完全ネットワークといい，$g = (N, \emptyset)$ であるネットワーク，すなわちリンクが存在しないネットワークを空ネットワークという．完全ネットワークと，空ネットワークの例をそれぞれ図1，2に示す．

定義 2.3 (パス) プレーヤーの集合 $\{i_k, i_{k+1}, \ldots, i_l\} \subseteq N$ に対して，リンクの集合 $\{i_k i_{k+1}, i_{k+1} i_{k+2}, \ldots, i_{l-1} i_l\}$ を i_k から i_l へのパスといい，ネットワーク $g = (N, L)$ において，$\{i_k i_{k+1}, i_{k+1} i_{k+2}, \ldots, i_{l-1} i_l\} \subseteq L$ のとき，i_k と i_l はパスを持つという．また，$i_k \overset{g}{\leftrightarrow} i_l$ は，プレーヤー i_k, i_l がネットワーク g においてパスを持つことを意味する．

定義2.3から，ネットワーク $g = (N, L)$ において，$ij \in L$ ならば，$i \overset{g}{\leftrightarrow} j$ である．

定義 2.4 (コンポーネント) ネットワーク $g = (N, L)$ においてリンクを形成しているプレーヤーの集合を $N(g) = \{i \mid \exists j \text{ such that } ij \in L\}$ とする．このとき，$N' \subseteq N, L' \subseteq L$ である g の部分ネットワーク $g' = (N', L')$ が次の *2* つの条件を満たすとき，g' をコンポーネントという．*1.* 任意のプレーヤー $i, j \in N(g'), i \neq j$ がパスを持つ．*2.* 任意のプレーヤー $i \in N(g')$, $j \in N(g)$ に対して，$ij \in L$ であるとき，$ij \in L'$ である．

本論文では定義2.4より，コンポーネントは互いにパスを持つプレーヤーとそれらのプレーヤーにより形成されるすべてのリンクの集合である．すなわち，グラフ理論において頂点をプレーヤー，枝をリンクと解釈すると，コンポーネントとはグラフの連結成分である．ここで，ネットワーク $g = (N, L)$ に対してプレーヤー $i, j \in N$ 間のリンク $ij \notin L$ を追加したネットワークを $g + ij \equiv (N, L \cup \{ij\})$，プレーヤー $k, l \in N$ 間のリンク $kl \in L$ を削除したネットワークを $g - kl \equiv (N, L \backslash \{kl\})$ と表す．

定義 2.5 (最小コンポーネント) $g = (N, L)$ の部分ネットワークであり，コンポーネントである $g' = (N', L')$, $(N' \subseteq N, L' \subseteq L)$ に属するすべてのリンク $ij \in L'$ に対して，次の *2* つのいずれかの条件が成り立つとき，g' を最小コンポーネントであるという．*1.* 部分ネットワーク $g' - ij$ がコンポーネントではない．*2.* $N(g' - ij) \neq N(g')$ が成り立つ．

定義2.5より，最小コンポーネントは，最小のリンクで連結されたコンポーネントであるといえる．すなわち，グラフ理論における木に対応する部分ネットワークを本論文では最小コンポーネントとよぶ．最小コンポーネントの例を図3に示す．

2.2. 効用関数と対安定的ネットワーク

定義 2.6 (効用関数) 各プレーヤー i に対して，$L \subseteq L^N$ である任意のネットワーク $g = (N, L)$ に実数値 $\pi_i(g) \in \mathbb{R}$ を割当てる実数値関数 π_i をプレーヤー i の効用関数という．

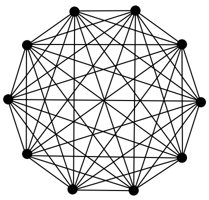

図 1: 完全ネットワーク

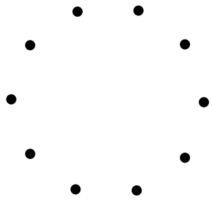

図 2: 空ネットワーク

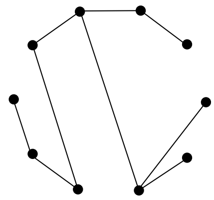

図 3: 最小コンポーネント

$i,j,k,l \in N,\ ij \notin L, kl \in L$ であるネットワーク $g=(N,L)$ においてリンク ij が形成されたときのプレーヤー i の効用の差分 $\Delta_{i,g}^{+ij}$，およびリンク kl を破棄されたときのプレーヤー k の効用の差分 $\Delta_{k,g}^{-kl}$ をそれぞれ次のように定義する．

$$\Delta_{i,g}^{+ij} = \pi_i(g+ij) - \pi_i(g),\ ij \notin L \tag{2.1}$$

$$\Delta_{k,g}^{-kl} = \pi_k(g-kl) - \pi_k(g),\ kl \in L \tag{2.2}$$

本論文では Jackson and Wolinsky [10] の仮定に従い，2 人のプレーヤー間において，お互いの効用が減少しない場合に新しくリンクが形成され，既存のリンクを破棄することにより，少なくとも一方のプレーヤーの効用が増加する場合にはリンクが破棄されるものとする．ここで，リンクの形成や破棄には方向は関係あるが，リンク自体に方向は無関係であるので，本論文ではネットワークを無向グラフとして表現する．

仮定 2.1 (リンクの形成と破棄) プレーヤーは任意に決定された順番に従い，効用最大化の行動選択基準に従う意思決定を行うものとし，ネットワーク $g=(N,L)$，プレーヤー $i,j \in N$ に対して，$ij \notin L$ のとき，$\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0$ かつ $\Delta_{j,g}^{+ij} \geq 0$ が成り立つ場合，リンク ij が形成される．また，$ij \in L$ のとき，$\Delta_{i,g}^{-ij} > 0$ または $\Delta_{j,g}^{-ij} > 0$ が成り立つ場合，リンク ij が破棄される．

定義 2.7 (対安定的ネットワーク) あるネットワーク $g=(N,L)$ に対して，次の *2* つが同時に成り立つ場合，g を対安定的ネットワークという．*(i)* $\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0, \forall i,j \in N, \forall ij \in L$ が成り立つ．*(ii)* $i,j \in N,\ ij \notin L$ に対して，$\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0$ ならば $\Delta_{i,g+ij}^{-ij} < 0$ が成り立つ．

定義 2.7 より，新しいリンクが形成されることがなく，既存のリンクが破棄されることもないようなネットワークを対安定的ネットワークという．

Jackson and Wolinsky [10] は，プレーヤーの効用関数がネットワークからの効用とリンク形成コストから構成される場合の対安定的ネットワークの 1 つとして，ある特定のプレーヤーが中心となり，それ以外のプレーヤーは中心プレーヤーとのみリンクを形成しているスター型ネットワークが形成されることを示した．また，Hummon[8] は，Jackson and Wolinsky とは異なるリンク形成規則を仮定したとき，リング型ネットワークが対安定的ネットワークであることを示した．スター型ネットワークとリング型ネットワークの例をそれぞれ図 4, 5 に示す．

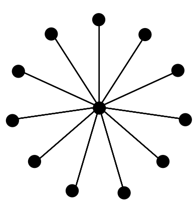

図 4: スター型ネットワーク

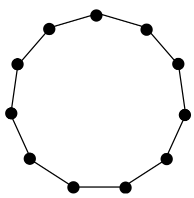

図 5: リング型ネットワーク

次節では，社会的評判を考慮したネットワーク形成に関する数理モデルに対して，対安定的ネットワークに関する分析を行う．

3. ネットワーク形成

従来研究では，ネットワークから直接的な効用を得ると仮定されており，このときに形成される対安定的ネットワークとして，完全ネットワーク，空ネットワーク，スター型ネットワーク，リング型ネットワークの存在が示されてきた [8,10]．

一方，本論文では，プレーヤーが社会的評判をより強く考慮する状況として，ネットワークから間接的に効用を得る状況におけるネットワーク形成に関する分析を行なう．プレーヤーは他のプレーヤーや社会からの評価あるいは影響からも効用を得るものとし，他のプレーヤーからの評価あるいは影響をネットワーク形成への関与に対する「社会的評判」と解釈し，社会的評判はネットワーク g に依存するものとする．

定義 3.1 (社会的評判) 各プレーヤー $i \in N$ に対して，任意のネットワーク g に実数値 $R_i(g) \in \mathbb{R}$ を割当てる実数値関数 R_i をプレーヤー i の社会的評判という．

また，各プレーヤーは社会的評判を考慮する割合 $a_i(\geq 0)$ を持ち，これを嗜好パラメータといい，プレーヤー i が社会的評判から得る効用は $a_iR_i(g)$ となるものとする．

Jackson and Wolinsky [10] では，ネットワークの価値はすべてのプレーヤーが得る効用の総和 $\sum_{i\in N}\pi_i(g)$ であるとしていた．一方，本論文では，例えば公共財保全活動のように，プレーヤーはネットワークを形成することで協力して活動することで，リンクを形成していないプレーヤーを含めたすべてのプレーヤーが等しく便益を得ると仮定する．ここで，本論文では，このような活動をネットワーク活動とよび，ネットワーク活動からすべてのプレーヤーが等しく得られる便益をネットワークの価値と解釈し，ネットワーク g に依存するものとする．

定義 3.2 (価値関数) 任意のネットワーク $g = (N, L)$ に実数値 $v(g) \in \mathbb{R}$ を割当てる実数値関数 v をネットワーク g の価値関数という．

Jackson and Wolinsky [10] では，プレーヤーは他のプレーヤーとリンクを形成することにより，コミュニケーションを取ることや協力することができるようになり，自分がパスを持つ他のプレーヤーから距離に依存した効用を得るとされていた．したがって，プレーヤーの効用関数は，ネットワークの価値やリンクを形成するためのコストの関数として定義されていた．このコストをリンク形成コストと呼ぶことにする．一方，本論文ではプレーヤーはリンクを形成することで他のプレーヤーと協力して活動しすべてのプレーヤーが等しく便益を得るモデルを考える．ネットワーク活動から得られる便益，すなわちネットワーク g の価値 $v(g)$ を次のように仮定する．

仮定 3.1 ネットワーク $g = (N, L)$ に対して，$L = \emptyset$ のとき $v(g) = 0$ とし，ネットワーク g の価値 $v(g)$ は新しいリンク $ij \notin L$ が形成されるときに ε 増加し，さらに $i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j$ のとき，追加的に δ 増加する．すなわち，$v(g + ij)$ は式 *(3.1)* のように与えられる．

$$v(g+ij) = \begin{cases} v(g) + \delta + \varepsilon & (\mathit{if}\ i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j) \\ v(g) + \varepsilon & (\mathit{if}\ i \overset{g}{\leftrightarrow} j\ \mathit{and}\ ij \notin L) \end{cases} \tag{3.1}$$

ここでは，ネットワークの価値の増分に関して対称なプレーヤーを考慮したが，非対称なプレーヤーを考慮した場合ネットワークの価値 $v(g)$ はネットワークの構造だけではなく，

リンクの形成や破棄の順序にも依存するため，本論文ではネットワークの価値の増分は仮定3.1により与えられるものとする．ここで，ネットワーク $g=(N,L)$, $ij \notin L$ に対して，i,j がパスを持つ場合とパスを持たない場合のリンク ij の例をそれぞれ図6, 7に示す．

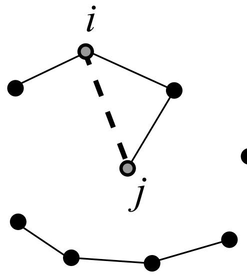

図6: プレーヤー i,j がパスを持つ場合

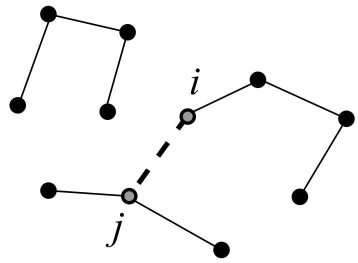

図7: プレーヤー i,j がパスを持たない場合

式(3.1)により与えられるネットワークの価値やリンク形成コストのみならずネットワーク形成への関与に対する社会的評判にも依存する効用関数を導入した場合に形成されるネットワークを考える．

プレーヤーはリンクの形成や維持のためにコストを支払わなくてはならないとし，このコストをリンク形成コストという．c_{ij} をリンク ij のリンク形成コストとし，$\beta_i \in [0,1]$ をプレーヤー i がネットワーク g の価値からの限界的効用1単位から得る効用であるとする．さらに，プレーヤー i がネットワーク g においてリンクを形成している相手プレーヤーの集合を $P_i=\{j \mid ij \in L\}$ とする．このとき，プレーヤー i の効用を，社会的評判から得る効用とネットワーク活動から得られる便益との和とリンク形成コストの差分として定義すると，次のように表現できる．

$$\pi_i(g)=a_iR_i(g)+\beta_i v(g)-\sum_{j\in P_i} c_{ij} \tag{3.2}$$

本論文では，単純化のため $\beta_i=1, c_{ij}=c(>0), \forall i,j \in N$ であると仮定する．$e_i^g \in \{0,1,2,\ldots\}$ をネットワーク g においてプレーヤー i の形成しているリンク数であるとすると，$|P_i|=e_i^g$ が成り立つので，プレーヤーの効用関数(3.2)は次式により与えれる．

$$\pi_i(g)=a_iR_i(g)+v(g)-e_i^g c \tag{3.3}$$

Akerlof [1]は共同体に存在する社会規範に対する信奉者の比率と個人の社会的行動，すなわち，社会規範を遵守するか遵守しないかにより，個人の社会的評判が決定されると考えた．また，Nyborg and Rege [17]は，他者に配慮した喫煙行動に関する社会的評判を分析するために，他者に配慮した喫煙行動により得られる社会的評判を，配慮しない喫煙行動により失う社会的評判であると解釈し，受動喫煙にさらされる人が被る不効用と他者に配慮した喫煙行動の比率の積で表現した．Akerlofや Nyborg and Regeの考えを本論文におけるネットワーク形成モデルに応用すれば，リンクを形成してネットワークに参加することは個人の社会的行動であると解釈でき，社会規範を遵守していることに対応する．また，その信奉率はプレーヤーが形成しているリンク数の平均に対応する．プレーヤーの社会的評判は社会的なネットワーク活動への貢献度に関係するが，本論文では，単純化のため，プレーヤーが形成したリンク数とネットワークにおけるすべてのプレーヤーの平均リンク数との比に依存すると考える．すなわち，各プレーヤーがネットワーク g において形成しているリンク数の

平均値を $\bar{e}^g = \sum_{k\in N} e_k^g/n$ とすると，プレーヤー i の社会的評判は，$R_i(g) = e_i^g/\bar{e}^g$ により与えられるものとする．ただし，ネットワークが空ネットワークであるとき，すなわち $\bar{e}^g = 0$ であるとき，$R_i(g) = 0,\ \forall i \in N$ であるとする．このとき，式 (2.1) より，$\Delta_{i,g}^{+ij}$ は，

$$\Delta_{i,g}^{+ij} = \begin{cases} \dfrac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g+2)}a_i + \delta + \varepsilon - c & (\text{if } i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j) \\[2ex] \dfrac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g+2)}a_i + \varepsilon - c & (\text{if } i \overset{g}{\leftrightarrow} j) \end{cases} \tag{3.4}$$

となる．ここで，リンクは 2 人のプレーヤーの間に形成されるので，$n\bar{e}^g = \sum_{i\in N} e_i^g$ は 0 または偶数である．次に，任意のネットワーク $g = (N, L),\ L \ni ij, i, j \in N$ に対する $\Delta_{i,g}^{-ij} = \pi_i(g - ij) - \pi_i(g)$ を考えるが，$g - ij$ が存在するためには，ネットワーク $g = (N, L)$ に対して，$L \neq \emptyset$ である必要があるので，$n\bar{e}^g \geq 2$ が成り立つ．$R_i((N, \emptyset)) = 0$ より，$\Delta_{i,g}^{-ij}$ に対して，$n\bar{e}^g = 2$ の場合，すなわち $g = (N, \{ij\}),\ i, j \in N$ の場合と，$n\bar{e}^g \geq 4$ との 2 通りの場合を考える必要がある．ここで，$n\bar{e}^g = 2$ のとき，$g - ij = (N, \emptyset)$ より，$i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j$ が成り立つ．したがって，式 (2.2) より $\Delta_{i,g}^{-ij}$ は，

i) $n\bar{e}^g = 2$ のとき　$\Delta_{i,g}^{-ij} = \pi_i((N, \emptyset)) - \pi_i((N, \{ij\})) = -\dfrac{1}{2}a_i - (\delta + \varepsilon) + c$

ii) $n\bar{e}^g \geq 4$ のとき

$$\Delta_{i,g}^{-ij} = \begin{cases} -\dfrac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g-2)}a_i - (\delta + \varepsilon) + c & (\text{if } i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j) \\[2ex] -\dfrac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g-2)}a_i - \varepsilon + c & (\text{if } i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j) \end{cases} \tag{3.5}$$

となる．次節では，形成されるネットワークが社会的評判を考慮することにより，ネットワーク形成にどのような影響を及ぼすかを分析するために，まず，社会的評判を考慮しない場合，すなわち $a_i = 0,\ \forall i \in N$ の場合に形成される対安定的ネットワークについての分析を行なう．

3.1. 社会的評判を考慮しない場合

本節では，プレーヤーの効用がネットワークの価値とリンク形成コストのみに依存する場合に形成される対安定的ネットワークについて考察する．$a_i = 0,\ \forall i \in N$ を式 (3.2), (3.4), (3.5) に代入すると，プレーヤーの効用関数 π_i，新しくリンク ij が形成されたときのプレーヤー i の効用の増分 $\Delta_{i,g}^{+ij}$，既存のリンク ij が破棄されたときのプレーヤー i の効用の増分 $\Delta_{i,g}^{-ij}$ はそれぞれ式 (3.6)–(3.8) のように与えられる．

$$\pi_i(g) = v(g) - e_i^g c \tag{3.6}$$

$$\Delta_{i,g}^{+ij} = \begin{cases} \delta + \varepsilon - c & (\text{if } i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j) \\ \varepsilon - c & (\text{if } i \overset{g}{\leftrightarrow} j) \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\Delta_{i,g}^{-ij} = \begin{cases} -(\delta + \varepsilon) + c & (\text{if } i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j) \\ -\varepsilon + c & (\text{if } i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j) \end{cases} \tag{3.8}$$

仮定 2.1 の下で形成されるネットワークに関して，次の定理が成り立つ．

定理 3.1 プレーヤーの効用関数が (3.6) によって与えられた場合の対安定的ネットワークは次の 3 通りである．

(i) $c \leq \varepsilon$ のとき，完全ネットワークが唯一の対安定的ネットワークである．

(ii) $\varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon$ のとき，すべてのプレーヤーが属する最小コンポーネントによって構成されるネットワークが対安定的ネットワークである．

(iii) $\delta + \varepsilon < c$ のとき，空ネットワークが唯一の対安定的ネットワークである．

証明

まず，式 (3.7) より，$i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j$ の場合 $\Delta_{i,g}^{+ij}$ は $c \leq \delta + \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0$ となり，$c > \delta + \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{+ij} < 0$ となる．また，$i \overset{g}{\leftrightarrow} j$ の場合 $\Delta_{i,g}^{+ij}$ は，$c \leq \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0$ となり，$c > \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{+ij} < 0$ となる．同様に，式 (3.8) より，$i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j$ の場合 $\Delta_{i,g}^{-ij}$ は $c \leq \delta + \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0$ となり，$c > \delta+\varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{-ij} > 0$ となる．また，$i \overset{g+ij}{\longleftrightarrow} j$ の場合 $\Delta_{i,g}^{-ij}$ は，$c \leq \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0$ となり，$c \leq \varepsilon$ のとき $\Delta_{i,g}^{-ij} > 0$ となる．したがって，$\Delta_{i,g}^{+ij}, \Delta_{i,g}^{-ij}$ の符号は表 1 に示すようにリンク形成コスト c の値により 3 つの場合に分けられる．

表 1: c と $\Delta_{i,g}^{+ij}, \Delta_{i,g}^{-ij}$ の符号の関係

<table>
<tr><th>$c \leq \varepsilon$</th><th>$\varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon$</th><th>$\delta + \varepsilon < c$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0 (i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j)$</td><td>$\Delta_{i,g}^{+ij} < 0 (i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j)$</td></tr>
<tr><td>$\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0 (i \overset{g}{\leftrightarrow} j)$</td><td colspan="2">$\Delta_{i,g}^{+ij} < 0 (i \overset{g}{\leftrightarrow} j)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0 (i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j)$</td><td>$\Delta_{i,g}^{-ij} > 0 (i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j)$</td></tr>
<tr><td>$\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0 (i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j)$</td><td colspan="2">$\Delta_{i,g}^{-ij} > 0 (i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j)$</td></tr>
</table>

(i) $c \leq \varepsilon$ の場合

表 1 より，すべての $ij \notin L$ に対して $\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0, (\forall L \subseteq L^N,\ \forall i, j \in N)$ が成立するので，形成可能なすべてのリンクが形成される．また，任意のネットワーク $g = (N, L)$ におけるすべての $ij \in L$ に対して $\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0, (\forall L \subseteq L^N,\ \forall i, j \in N)$ が成立するので，一度形成されたリンクが破棄されることはない．したがって，$c \leq \varepsilon$ のときの完全ネットワークが唯一の対安定的ネットワークとなる．

(ii) $\varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon$ の場合

表 1 より，任意のネットワーク $g = (N, L)$ における $ij \notin L$ に対して $i \overset{g}{\leftrightarrow} j$ のとき $\Delta_{i,g}^{+ij} < 0$, $i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j$ のとき $\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0$ が成立するので，ネットワーク g においてプレーヤーのペア i, j がパスを持たないときリンク ij が形成される．また，$ij \in L$ に対して $i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j$ のとき $\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0$, $i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j$ のとき $\Delta_{i,g}^{-ij} > 0$ が成立するので，ネットワーク g において，リンク ij を破棄してもプレーヤー i, j がパスを維持できるとき，リンク ij は破棄される．したがって，すべてのプレーヤーが属する 1 つの最小コンポーネントが形成され，このときネットワークは対安定的となる．

(iii) $\delta + \varepsilon < c$ の場合

表 1 より，任意のネットワーク $g = (N, L)$ におけるすべての $ij \notin L$ に対して $\Delta_{i,g}^{+ij} < 0, (\forall L \subseteq L^N,\ \forall i, j \in N)$ が成立する．また，すべての $ij \in L$ に対して $\Delta_{i,g}^{-ij} > 0, (\forall L \subseteq L^N,\ \forall i, j \in N)$ が成立する．したがって，新しいリンクが形成されることはなく，既存のリンクはすべて破棄されるので空ネットワークが唯一の対安定的ネットワークとなる．■

Jackson and Wolinsky [10] の研究では対安定的ネットワークとして完全ネットワーク，空ネットワーク，スター型ネットワークが得られた．一方，本論文では対安定的ネットワークとして完全ネットワークと空ネットワークが得られた．さらに，スター型ネットワークではなくすべてのプレーヤーが属する単一の最小コンポーネント，すなわちグラフ理論における全張木に対応するネットワークが対安定的ネットワークとして得られた．ここでは，スター型ネットワークと全プレーヤーが属する単一の最小コンポーネントとの違いについて考察する．Jackson and Wolinsky のモデルでは，近傍のプレーヤーからより大きな効用を得るモデルとなるため，任意のプレーヤーのペアの間の距離が 1 もしくは 2 となるスター型ネットワークが対安定的ネットワークとして形成される．これに対して，本研究のモデルでは社会的評判がプレーヤーの行動に強く影響すると考えられる状況として，プレーヤーがネットワーク活動から等しく便益を得ることを想定したモデルを考えているため，プレーヤー間の距離は必ずしも小さくなる必要はないが，ネットワークの価値関数 $v(g)$ を式 (3.1) のように仮定しているので，できるだけ少ないコンポーネント数のネットワークが望ましいといえる．したがって，リンク形成コストを考慮すれば，全プレーヤーが属する単一の最小コンポーネントが対安定的ネットワークとして形成される．次節ではプレーヤーの効用関数に社会的評判を導入したモデルを分析し，従来研究で得られた対安定的ネットワークや唯一の最小コンポーネントからなるネットワーク以外のネットワークが対安定的ネットワークとして形成され得ることを示す．

3.2. 社会的評判を考慮する場合

本節では，社会的評判の項をプレーヤーの効用関数に導入した場合に，形成されるネットワークに関する分析を行なう．

ここで，プレーヤーのリンク数に関して次の補題を示す．

補題 3.1 任意のネットワーク $g=(N,L)$ におけるすべてのプレーヤー $i \in N$ について，任意の $\forall i \in N, \forall L \subseteq L^N$ に対して，$e_i^g \leq n\bar{e}^g/2$ が成り立つ．

証明 $\bar{e}^g$ は g における平均リンク数であるので，$n\bar{e}^g = \sum_{k\in N} e_k^g$ である．あるプレーヤー $i \in N$ に対して，$e_i^g = 0$ のとき $0 \leq n\bar{e}^g/2, \forall L \subseteq L^N$ より $e_i^g \leq n\bar{e}^g/2$ が成り立つ．

次に，ある $g=(N,L)$ におけるプレーヤー $i \in N, L \subseteq L^N$ に対して，$e_i^g \leq n\bar{e}^g/2$ が成り立つと仮定する．i を含むリンク $ij \notin L$ が新しく形成されたとき，$e_i^{g+ij} = e_i^g + 1, e_j^{g+ij} = e_j^g + 1$ となり，$n\bar{e}^{g+ij} = \sum_{k\in N} e_k^{g+ij} = \sum_{k\in N} e_k^g + 2 = n\bar{e}^g + 2$ となる．したがって，$e_i^{g+ij} = e_i^g + 1 \leq n\bar{e}^g/2 + 1 = (n\bar{e}^g + 2)/2 = n\bar{e}^{g+ij}/2$ が成り立つ．同様に，ネットワーク g において i を含まないリンク $j_1j_2 \notin L$ $(i \neq j_1, j_2)$ が形成されたとき，$n\bar{e}^{g+j_1j_2} = n\bar{e}^g + 2$ となる．したがって，$e_i^{g+j_1j_2} = e_i^g \leq n\bar{e}^g/2 = (n\bar{e}^{g+j_1j_2} - 2)/2 < n\bar{e}^{g+j_1j_2}/2$ となるので，$e_i^{g+j_1j_2} < n\bar{e}^{g+j_1j_2}/2$ が成り立つ．したがって，補題 3.1 が成り立つ． ■

定理 3.2 プレーヤーが式 *(3.3)* で表される効用関数を持つとき，$c \leq \varepsilon$ ならば，完全ネットワークが唯一の対安定的ネットワークである．

証明 式 (3.4), (3.5) において，補題 3.1 および $a_i \geq 0, \forall i \in N$ より，$c \leq \varepsilon$ のとき，任意のネットワーク $g=(N,L)$ に対して，$\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0,\ \Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0,\ (\forall i \in N, \forall L \subseteq L^N)$ が成り立つ．したがって，すべてのプレーヤーはリンクを持たないすべてのプレーヤーとリンクを形成しようとし，すでに形成されているリンクを破棄しようとしない．ゆえに，完全ネットワークが唯一の対安定的ネットワークとなる． ■

定理 3.3 プレーヤーが式 *(3.3)* で表される効用関数を持つとき，$\varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon$ ならば，すべてのプレーヤーが属する単一のコンポーネントのみからなるネットワークが形成される．

証明 式 (3.4) より，$\varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon$ のとき，任意のネットワーク $g = (N, L)$ に対して，$\Delta_{i,g}^{+ij} \geq 0$ $(i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j)$, $(\forall i \in N,\ \forall L \subseteq L^N)$ が成り立つ．したがって，少なくともパスを持たないすべてのプレーヤーのペアはリンクを形成する．また，式 (3.5) より，$\Delta_{i,g}^{-ij} \leq 0$ $(i \overset{g-ij}{\not\leftrightarrow} j)$, $(\forall i \in N,\ \forall L \subseteq L^N)$ が成り立つ．したがって，すべてのプレーヤーは，リンクを破棄することによってパスを持たなくなる，すなわち，コンポーネントを 2 つに分断してしまうようなリンクを破棄しようとしない．ゆえに，すなわち同一コンポーネントに属さないプレーヤーとリンクを形成しようとするので，任意の 2 人のプレーヤー間には必ずパスが存在するネットワーク，すなわち，すべてのプレーヤーが属する唯一のコンポーネントのみからなるネットワークが形成される． ■

$\varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon$ のとき，各プレーヤーの嗜好パラメータ a_i が特定の分布で与えられ，かつ，プレーヤーがリンクの形成や破棄に関する意思決定をある特定の順番で行った場合，スター型ネットワークやリング型ネットワークが対安定的ネットワークとして形成されることもある．$\delta + \varepsilon < c$ の場合については，次の定理が成り立つ．

定理 3.4 プレーヤーが式 *(3.3)* で表される効用関数を持つとき，$\delta + \varepsilon < c$ ならば，$a_i < \frac{2}{n}\{c - (\delta + \varepsilon)\}$ を満たす嗜好パラメータ a_i を持つプレーヤー i は，新しくリンクを形成せず，形成しているリンクをすべて破棄する．

証明

まず，空ネットワーク $g = (N, \emptyset)$ において，$\pi_i((N, \emptyset)) = 0, \forall i \in N$ より，$a_i < \frac{2}{n}\{c - (\delta + \varepsilon)\}$ を満たすプレーヤー i に対して，$\Delta_{i,g}^{+ij} = \pi_i((N, \{ij\})) - \pi_i((N, \emptyset)) = \frac{n}{2}a_i + \delta + \varepsilon - c < 0$ が成り立つ．

次に，任意のネットワーク $g = (N, L), L \neq \emptyset$ において，$\delta + \varepsilon < c$ ならば，$a_i < \frac{2}{n}\{c - (\delta + \varepsilon)\}$ を満たす嗜好パラメータを持つプレーヤー i と $i \overset{g}{\not\leftrightarrow} j$ である任意のプレーヤー j に対して，補題 3.1，式 (3.4) より，

$$
\begin{aligned}
\Delta_{i,g}^{+ij} &= \frac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g + 2)}a_i + \delta + \varepsilon - c \\
&< \left(\frac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g + 2)}\frac{2}{n} - 1\right)\{c - (\delta + \varepsilon)\} \\
&= -\frac{n^2\bar{e}^{g2}}{n\bar{e}^g(n\bar{e}^g + 2)}\{c - (\delta + \varepsilon)\} < 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．同様に，$i \overset{g}{\leftrightarrow} j$ である任意のプレーヤー j に対して，$\Delta_{i,g}^{+ij} < -\frac{(n\bar{e}^g)^2}{n\bar{e}^g(n\bar{e}^g+2)}(c - \varepsilon) < 0$ が成り立つ．

また，任意のネットワーク $g \neq (N, L), L = \emptyset$ において，$\delta + \varepsilon < c$ ならば，$a_i < \frac{2}{n}\{c - (\delta + \varepsilon)\}$ を満たす嗜好パラメータを持つプレーヤー i と $i \overset{g-ij}{\not\leftrightarrow} j$ である任意のプレーヤー j に対して，補題3.1，式 (3.5) より，$n\bar{e}^g = 2$ のとき，すなわち，$L = \{ij\}$ のとき，$\Delta_{i,g}^{-ij} = -\frac{2}{n}a_i + c - (\delta + \varepsilon) > 0$ が成り立ち，$n\bar{e}^g \geq 4$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\Delta_{i,g}^{-ij} &= -\frac{n\bar{e}^g - 2e_i^g}{\bar{e}^g(n\bar{e}^g - 2)}a_i - (\delta + \varepsilon) + c \\
&> \frac{n\bar{e}^g(n\bar{e}^g - 4) + 4e_i^g}{n\bar{e}^g(n\bar{e}^g - 2)}\{c - (\delta + \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

となるので，プレーヤー i, j に対して，$\Delta_{i,g}^{-ij} > 0$ が成り立つ．以上より，$a_i < \frac{2}{n}\{c-(\delta+\varepsilon)\}$ を満たす嗜好パラメータを持つプレーヤー i と $i \overset{g-ij}{\not\longleftrightarrow} j$ である任意のプレーヤー j に対して，$\Delta_{i,g}^{-ij} > 0$ が成り立つ．

ここで，$i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j$ より，ネットワーク $g = (N, L)$ において，$L \neq \{ij\}$ が成り立つので，$n\bar{e}^g \geq 4$ が成り立つ．したがって，$i \overset{g-ij}{\longleftrightarrow} j$ である任意のプレーヤー j に対して，$\Delta_{i,g}^{-ij} > \frac{n\bar{e}^g(n\bar{e}^g-4)+4e_i^g}{n\bar{e}^g(n\bar{e}^g-2)}(c-\varepsilon) > 0$ が成り立つ．

したがって，$a_i < \frac{2}{n}\{c-(\delta+\varepsilon)\}$ を満たす嗜好パラメータを持つプレーヤー i は，任意のネットワーク g において，新しくリンクを形成せず，形成しているすべてのリンクを破棄する． ■

ここで，$a_i < \frac{2}{n}\{c-(\delta+\varepsilon)\}$ を満たすプレーヤーはリンクを形成しないことを示したが，これは現実社会における，(1) ネットワーク活動から得られる便益に比べて，リンク形成コストが非常に大きいプレーヤー，あるいは，(2) あまり社会的評判を考慮しないプレーヤーがネットワークに参加しない状況を表している．さらに，定理 3.4 より，次の系を導くことができる．

系 3.1 $a^{\max} = \max_{i \in N} a_i$ とし，プレーヤーが式 *(3.3)* で表される効用関数を持つとき，$\delta + \varepsilon + \frac{na^{\max}}{2} < c$ ならば，空ネットワークが唯一の対安定的ネットワークである．

証明

$\delta + \varepsilon + \frac{na^{\max}}{2} < c$ のとき，$a^{\max} < \frac{2}{n}\{c-(\delta+\varepsilon)\}$ が成り立つ．したがって，嗜好パラメータが $a_i \in [0, a^{\max}]$, $\forall i \in N$ により与えられることから，$a_i \leq a^{\max} < \frac{2}{n}\{c-(\delta+\varepsilon)\}$, $(\forall i \in N)$ が成り立つ．ゆえに，定理 3.4 から，すべてのプレーヤーが新しくリンクを形成せず，形成しているすべてのリンクを破棄するので，空ネットワークが唯一の対安定的ネットワークとなる．

■

本論文の定理 3.3，3.4 で得られた結果は，従来のモデルで示されていた完全ネットワーク，空ネットワーク，スター型ネットワーク，リング型ネットワーク以外の対安定的ネットワークの存在可能性を示唆するものである．しかし，プレーヤーの数や嗜好パラメータの値が全く同じであったとしても，プレーヤーの意思決定順序が異なれば，形成されるネットワークが異なるだけでなく，対安定的ネットワークが形成されない場合もある．次節では，本論文におけるモデルに対するいくつかの数値例を示し，現実に観察されるようなネットワークが対安定的ネットワークとして導出されることを具体的に示す．

4. 数値例

ここでは，本モデルに対する数値例をいくつか示す．

4.1. 数値例 1

ここでは，$N = \{1, \ldots, 25\}, \delta = 0.01, \varepsilon = 0.03, c = 0.5$ の場合，すなわち，$\delta + \varepsilon < c \leq \delta + \varepsilon + (na^{\max})/2$ が成り立ち，プレーヤーの嗜好パラメータが表 2 に示されるように与えられたときの数値例を示す．

このとき，形成されたネットワーク g_1 を図 8 に示す．

数値例 1 では，ネットワークの価値の増分がそれぞれ $\delta = 0.01, \varepsilon = 0.03$ であるのに比べ，リンク形成コストが $c = 0.5$ と高い．また，表 2 より，$a^{\max} = a_{25} = 0.700$ である．

表 2: 数値例 1 における各プレーヤーの嗜好パラメータ a_i

i	a_i	i	a_i	i	a_i	i	a_i	i	a_i
1	0.035	6	0.210	11	0.385	16	0.480	21	0.530
2	0.070	7	0.245	12	0.420	17	0.490	22	0.540
3	0.105	8	0.280	13	0.450	18	0.500	23	0.600
4	0.140	9	0.315	14	0.460	19	0.510	24	0.630
5	0.175	10	0.350	15	0.470	20	0.520	25	0.700

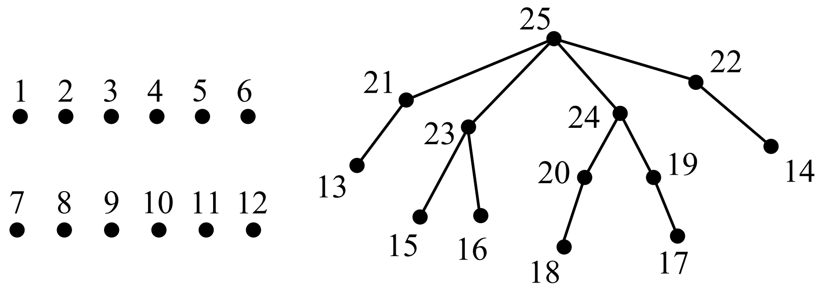

図 8: 部分ネットワークが最小コンポーネントとなる対安定的なネットワーク g_1

図 8 に示されるような社会的ネットワークは，一部のプレーヤーが単一のグループを形成して活動している状況に対応しており，さらに，グループ内に形成されるネットワークは最小コンポーネントであることから，必要最小限のリンクによってのみグループが維持されているような状況となっている．プレーヤーがネットワーク活動を行う場合，社会的評判が動機となり最低限のリンクを形成することでネットワーク活動に参加するが，すでにネットワーク活動を行っているようなプレーヤー，すなわち 1 本以上のリンクを形成しているプレーヤーとの追加的なリンクを形成することはない．このようにして，図 8 に示されるような社会的ネットワークが形成される．例えば，プレーヤーはリンクを通じて情報のやり取りを行うものと解釈するならば，図 8 に示されるようなネットワークにおいては，情報伝達に長い時間が必要な構造のネットワークが形成されていると解釈できる．

4.2. 数値例 2

ここでは，$N=\{1,\dots,25\}, \delta=0.01, \varepsilon=0.03, c=0.5$，すなわち，$\delta+\varepsilon<c\leq\delta+\varepsilon+\frac{na^{\max}}{2}$ の場合に対して，プレーヤーの嗜好パラメータの値を表 3 に示されるように与え，初期状態は空ネットワークとし，番号の小さいプレーヤーから順番に意思決定を行った．

表 3: 数値例 2 における各プレーヤーの嗜好パラメータ a_i

i	a_i	i	a_i	i	a_i	i	a_i	i	a_i
1	0.100	6	0.600	11	0.765	16	0.792	21	0.870
2	0.200	7	0.761	12	0.766	17	0.820	22	0.910
3	0.300	8	0.762	13	0.767	18	0.820	23	0.970
4	0.400	9	0.763	14	0.768	19	0.830	24	0.980
5	0.500	10	0.764	15	0.769	20	0.840	25	0.990

実験の結果，形成された対安定的ネットワークを図 9 に示す．図に示される 1–25 の数値

はプレーヤー番号である．

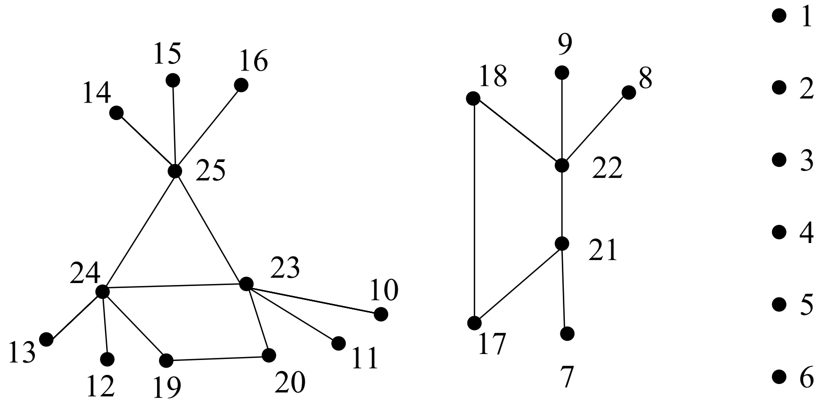

図 9: $\delta = 0.01, \varepsilon = 0.03, c = 0.5$ のときに形成される対安定的ネットワーク

このとき，具体的な計算は省略するが，図 9 に示されるネットワークを $g = (N, L)$ とすると，すべてのプレーヤー $i \in N$, $i = 1, \ldots, 25$ は安定的プレーヤー，すなわち，$\Delta^{+ij}_{i,g} < 0$, $j \in \{j \in N \mid ij \notin L\}$ かつ $\Delta^{-ij}_{i,g} \le 0$, $j \in \{j \in N \mid ij \in L\}$ が成り立っているプレーヤーとなることが確認できる．図 9 に示されるネットワークは，従来のモデルでは得られなかった，複数のスター型ネットワークが連結し，それらが分散して複数個存在する構造となっている．また，プレーヤー 21–25 は，局地的に形成されたスター型ネットワークの中心プレーヤーとなっており，嗜好パラメータの大きなプレーヤーほどより多くのリンクを形成していることがわかる．

実社会では，スター型ネットワークのようにリーダーがただ 1 人ではなく，複数のリーダーが存在し，それぞれのリーダーが中心となる複数のスター型ネットワークが結合してネットワーク活動を行うようなグループが，複数形成されている構造を持つ社会的ネットワークがしばしば観測される．このような社会的ネットワークでは，より多くのリンクを形成しているプレーヤーは，ネットワーク活動の中心的役割を果たしているリーダーであると考えられる．図 9 は，このような実社会でしばしば観測される構造を持つ対安定的ネットワークとなっている．

4.3. 数値例 3

ここでは，$N = \{1, \ldots, 7\}$, $\delta = 0.05, \varepsilon = 0.40, c = 0.50$ の場合，すなわち，$\delta + \varepsilon < c \le \delta + \varepsilon + \frac{na^{\max}}{2}$ の場合に対して，プレーヤーの嗜好パラメータの値を表 4 に示されるように与え，初期状態は空ネットワークとし，番号の小さいプレーヤーから順番に意思決定を行った．

表 4: 数値例 3 における各プレーヤーの嗜好パラメータ a_i

i	a_i	i	a_i
1	0.010	5	0.300
2	0.200	6	0.350
3	0.230	7	0.410
4	0.250		

図 10–13 に周期的に形成されるネットワーク $g_3^1, \ldots, g_3^4$ を示す．図中に示される 1–7 の数値はプレーヤー番号であり，周期的に形成，破棄されるリンクに関わっているプレーヤーを

白丸で，その他のプレーヤーを黒丸で表している．ここで，図 11 に示されるネットワーク g_3^2 は，図 10 に示されるネットワーク g_3^1 に対して，$g_3^2 = g_3^1 + \{6,7\}$ により得られる．同様に，ネットワーク g_3^3, g_3^4 はそれぞれ，$g_3^3 = g_3^2 - \{3,5\}$, $g_3^4 = g_3^3 - \{6,7\}$ により得られる．また，$g_3^1 = g_3^4 + \{3,5\}$ により，ネットワーク g_3^1 が得られ，周期的なネットワーク $g_3^1, \ldots, g_3^4$ が形成される．

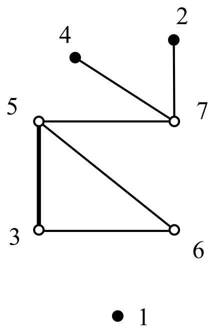

図 10: g_3^1

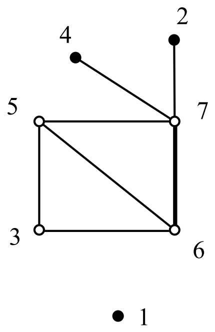

図 11: g_3^2

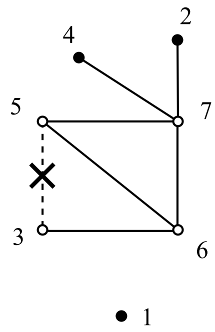

図 12: g_3^3

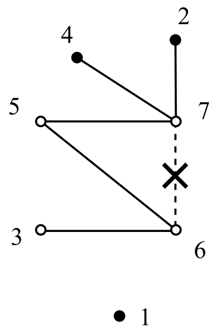

図 13: g_3^4

表 5 に，プレーヤー 3, 5, 6, 7 の効用値 $\pi_i(g_3^k)$, $i = 3,5,6,7$, $k = 1,\ldots,4$ を示す．

表 5: 総リンク数と各プレーヤーの効用値 $\pi_i(g_3^k)$

	g_3^1	g_3^2	g_3^3	g_3^4
$\pi_3(g_3^k)$	1.698	2.060	2.064	1.691
$\pi_5(g_3^k)$	1.455	1.780	1.780	1.450
$\pi_6(g_3^k)$	1.838	1.855	1.543	1.520
$\pi_7(g_3^k)$	1.648	1.650	1.387	1.391

表 5 より，$\pi_6(g_3^1) \leq \pi_6(g_3^2)$, $\pi_7(g_3^1) \leq \pi_7(g_3^2)$, $\pi_3(g_3^2) < \pi_3(g_3^3)$, $\pi_7(g_3^3) \leq \pi_7(g_3^4)$, $\pi_3(g_3^4) \leq \pi_3(g_3^1)$, $\pi_5(g_3^4) \leq \pi_5(g_3^1)$ が成り立つので，プレーヤー 3, 5, 6, 7 はリンクの形成と破棄を繰り返す．すなわち，リンク $\{3,5\}$ と $\{6,7\}$ の破棄はそれぞれプレーヤー 3 と 7 の意思決定によるものである．

ここで，プレーヤー $i \in N$ の得る効用は，プレーヤー i が形成しているリンク数だけではなく，他のプレーヤーの形成しているリンク数にも依存する．プレーヤー 7 は最も大きい嗜好パラメータを持つことから，多くのリンクを形成しネットワークの中心となることで満足するプレーヤーであるといえる．プレーヤー 7 は，図 10 のネットワーク g_3^1 において 3 本のリンクを形成しており，新たにリンクを形成することにより，自分だけがすべてのプレーヤーのリンク数のうち最多のリンクを形成している図 11 のネットワーク g_3^2 を形成することができることから，リンクを形成する．さらに，図 12 のネットワーク g_3^3 において 4 本のリンクを形成しており，1 本リンクを破棄して形成される図 13 のネットワーク g_3^4 においても，自分だけが最多のリンクを形成しているので，リンクを破棄する．

また，プレーヤー 3 は，総リンク数が 7，プレーヤー 3 のリンク数が 2 である図 11 のネットワーク g_3^2 でリンクを破棄している．さらに，総リンク数が 5，プレーヤー 3 のリンク数が 1 であるネットワーク g_3^4 で新しくリンクを形成している．このことから，嗜好パラメータが中程度であるプレーヤー 3 は，総リンク数と自分のリンク数がともに多い場合にリンクを破棄し，ともに少ない場合はリンクを形成しようとするプレーヤーであるといえる．

図 10–13 のネットワーク g_3^1–g_3^4 を，環境保護団体において形成される社会的ネットワークと解釈するならば，プレーヤー 7 のような人物は，その団体の中でもっとも多くの人とリンクを形成することで，リーダーとして行動したいと考えるような人物であり，プレーヤー 3 のような人物は，他のプレーヤーの行動，すなわち保護活動の程度に対して敏感な人物であり，その集団における平均的な保護活動の程度と自分の保護活動の程度とが一致するように行動する人物であると解釈できる．このように，団体や集団において異なる考え方を持った人が存在する場合，それぞれの人物がもっとも好ましいと考えているような状態で安定せずに，図 10–13 のようにリンクの形成と破棄が繰り返される場合がある．

4.4. 数値例 4

前節の数値例 3 では，特定のリンクの形成と破棄が繰り返されるような数値例を示したが，ここでは，リンク形成コストや各プレーヤーの嗜好パラメータなど，すべてのパラメータ値が数値例 3 と同じ場合であっても，対安定的ネットワークが形成される場合の数値例を示す．前節の図 12 に示されるネットワーク g_3^3 においてリンク $\{6,7\}$ が破棄され，図 13 に示されるネットワーク g_3^4 が形成されるのは，プレーヤー 7 の意思決定によるものであるが，このとき，プレーヤー 5 が意思決定を行ったとすると，リンク $\{5,6\}$ もしくは $\{5,7\}$ が破棄される．図 14 にネットワーク g_3^3，図 15 にリンク $\{5,6\}$ が破棄されたネットワーク $g_3^3-\{5,6\}$ を示す．さらに，リンク $\{4,5\}$ が形成されることにより，図 16 に示される対安定的ネットワーク $g_4 = g_3^3 - \{5,6\} + \{4,5\}$ が形成される．

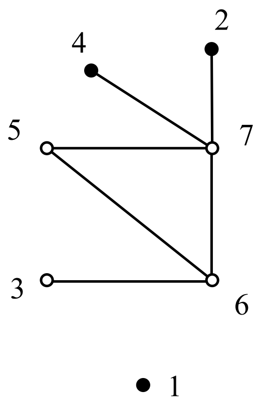

図 14: ネットワーク g_3^3

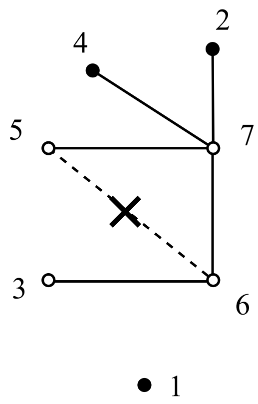

図 15: $g_3^3-\{5,6\}$

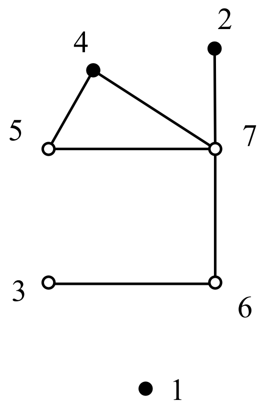

図 16: 対安定的ネットワーク g_4

このように，ネットワーク g_3^3 において，プレーヤー 7 ではなくプレーヤー 5 が意思決定することにより，前節で示したような周期的なリンクの形成と破棄は起こらず，対安定的ネットワーク g_4 が形成される．数値例 3, 4 より，プレーヤーの意思決定の順番により形成されるネットワークも変化することがわかる．

5. おわりに

本論文では，プレーヤーが社会的評判を考慮した意思決定を行なう場合のネットワーク形成に関する分析を行なった．プレーヤーがネットワークから間接的に効用を得るような状況は，プレーヤーがより強く社会的評判を考慮する状況と考えられるため，例えば公共財保全のような，一部もしくはすべてのプレーヤーが協力して活動することにより，すべてのプレーヤーが等しく効用もしくは便益を得るような団体におけるネットワーク形成に関する分析を行なった．本モデルにおいて，プレーヤーが他のプレーヤーとリンクを形成すること

は，ネットワーク活動に参加することを意味している．その結果として，従来のモデルでは得られなかった，複数のスター型コンポーネントが結合し，それらが分散して存在するネットワークが形成され得ることを明らかにした．

さらに，本論文では，従来のネットワーク形成に関する文献では得られていないような特定の構造を持つ対安定的ネットワークではなく，実社会でしばしば観測されるような複雑な構造を持つネットワーク，すなわち，複数のスター型コンポーネントが結合し，それらが分散して存在するネットワークが対安定的ネットワークとして形成される場合があることを示した．

Jackson and Wolinsky [10] において考えられていたような，プレーヤーがネットワークから直接効用を得る場合でも，プレーヤーが社会的評判を考慮した行動を取る場合もあると考えられるため，そのモデルの提案と分析が今後の課題として考えられる．

また，ネットワーク活動からの便益の増分に関して対称なプレーヤーを考慮した分析を行ったが，実社会における社会的ネットワークの分析を行う場合は，非対称なプレーヤーを考慮した分析が必要であると考えられる．しかし，ネットワークからの便益に関して非対称なプレーヤーを考慮した場合，ネットワーク活動からの価値はネットワークの構造だけではなくリンクの形成や破棄の順序に依存し，数理モデルを用いた分析が難しいため，例えば，人工エージェントを用いたシミュレーション分析などを行うことで有効な分析を行うことが考えられるため，そのモデル化についても今後の課題である．

参考文献

[1] G.A. Akerlof: A theory of social custom, of which unemployment may be one consequence. *The Quarterly Journal of Economics,* **94** (1980), 749–775.

[2] R.J. Aumann and R.B. Myerson: Endogenous formation of links between players and coalitions: An application of the Shapley value. In A. Roth (eds.): *The Shapley Value* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).

[3] S. Boorman: A combinatorial optimization model for transmission of job information through contact networks. *Bell Journal of Economics,* **6** (1975), 216–249.

[4] S. Currarini and M. Morelli: Network formation with sequential demands. *Review of Economic Design,* **5** (2000), 229–250.

[5] M.E. Eisenberg, D. Neumark-Sztainer, M. Story, and C. Perry: The role of social norms and friends' influences on unhealthy weight-control behaviors among adolescent girls. *Social Science & Medicine,* **60** (2005), 1165–1173.

[6] L.C. Freeman: Social networks and the structure experiment. In L.C. Freeman, D.R. White, and A.K. Romney (eds.): *Research Methods in Social Network Analysis* (Firefax, VA: George Mason University Press 1989), 11–40.

[7] K. Hendricks, M. Piccione, and G. Tan: The economics of hubs: the case of monopoly. *Review of Economic Studies,* **62** (1995), 83–99.

[8] N.P. Hummon: Utility and dynamic social network. *Social Networks,* **22** (2000), 221–249.

[9] J. Ishida: The role of social norms in a model of marriage and divorce. *Journal of Economic Behavior & Organization,* **51** (2003), 131–142.

[10] M.O. Jackson and A. Wolinsky: A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory,* **71** (1996), 44–74.

[11] E. Kalai, A. Postlewaite, and G. Roberts: Barriers to trade and disadvantageous middlemen: Nonmonotonicity of the core. *Journal of Economic Theory,* **19** (1978), 200–209.

[12] E. Kalai and E. Zemel: Totally balanced games and games of flow. *Mathematics of Operations Research,* **7** (1982), 476–478.

[13] M. Katz and C. Shapiro: Systems competition and network effects. *Journal of Economic Perspectives,* **8** (1994), 474–486.

[14] M. Keren and D. Levhari: The internal organization of the firm and the shape of average costs. *Bell Journal of Economics,* **14** (1983), 474–486.

[15] J. Montgomery: Social networks and labor market outcomes: toward an economic analysis. *American Economic Review,* **81** (1991), 1407–1418.

[16] S. Mutuswami and E. Winter: Subscription mechanisms for network formation. *Journal of Economic Theory,* **106** (2002), 242–264.

[17] K. Nyborg and M. Rege: On social norms: the evolution of considerate smoking behavior. *Journal of Economic Behavior & Organization,* **52** (2003), 323–340.

[18] A. Roth and Sotomayor: Two sided matching. *Econometric Society Monographs,* **18** (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

[19] W. Sharkey: Network models in economics. *Network Routing, Handbook in Operations Research and Management Science,* **8** (1993), 713–765.

[20] R. Starr and M. Stinchcombe: Efficient transportation routing and natural monopoly in the airline industory: an economic analysis of hub-spoke and related systems. *Discussion Paper,* **92** (Department of Economics, University of California, San Diego, 1992).

林田智弘
広島大学大学院工学研究科
〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1
E-mail: hayashida@hiroshima-u.ac.jp

ABSTRACT

A NETWORK IN A SOCIETY CONSISTS OF INDIVIDUALS WITH UTILITY DEPENDING ON THEIR REPUTATION

Tomohiro Hayashida Hideki Katagiri Ichiro Nishizaki
Hiroshima University

In recent studies on network formation, it is assumed that a player directly receives a utility from the network, namely she/he receives a utility from any other players by forming links with them. Jackson and Wolinsky (1996) gave a simple model leading the empty, the complete, or the star network as the stable networks. The star network consists of one central player and other peripheral players who form links only with the central player. Under a different condition of link formation and deletion, Hummon (2000) showed that the ring network can be also stable. In the real world, however, we often observe a general structure of social networks rather than simple ones such as the empty, the complete, the star and the ring networks.

In a certain social network such as an environmental conservation group network, however, it is natural that a player receives a utility not from a network but from the corresponding public goods. In such a group, forming links means that a player joins in conservation activities of public goods such as the global environment, and it improves the level of the public goods. In this paper, we treat a mathematical model which is taking into account the effect of individuals' reputation in a society with interest in public goods, and we show that a general structure of networks in which there exist multiple disjoint components connecting some star networks is also stable.