日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research
Society of Japan
2007 年 50 巻 100-122

線形価格インパクト関数を用いた最適執行戦略

枇々木 規雄
慶應義塾大学

(受理 2005 年 3 月 1 日; 再受理 2007 年 7 月 10 日)

和文概要　金融機関のファンドマネージャーやトレーダーなどが大量の株式を実際に売買する場合，その売買量が価格にインパクトを与えることになる．本研究では対象資産が 1 つで価格インパクト関数が線形関数の場合の最適執行戦略に関する議論を行う．まずはじめに，価格インパクト関数における確率変数が時系列的に独立の場合，動的計画法で求められた最適解が数理計画問題から得られる最適性条件を満たすことを確かめる．そして，非負条件を含めた数理計画問題の定式化を示す．ただし，この数理計画問題は凸 2 次計画問題になるとは限らないので，線形価格インパクト関数の特徴を生かして，行列分解を行い，正定値符号行列となる条件を解析的に導く方法を示す．さらに，行列分解を利用して高速に解くための定式化の方法を示す．Huberman and Stanzl(2005) の線形インパクト関数を用いて数値分析を行う．7 種類の価格インパクト係数の組み合わせを用いていくつかのパラメータに対する感度分析を行う．

キーワード: 金融, 最適執行戦略, 価格インパクト関数, 2 次計画問題, 正定値符号行列

1. はじめに

金融機関のファンドマネージャーやトレーダーなどが大量の株式を実際に売買する場合，ある一つの市場価格で取引できるとは限らない．たとえば，ある価格で大量の買い注文 (売り注文) を出したとしても，それに応える売り注文 (買い注文) がなければすべての取引を行うことはできない．ただし，高い価格で買い注文 (低い価格で売り注文) を出せば，それに応じて売り注文 (買い注文) も増える可能性が高くなる．これは買いもしくは売りのどちらかの注文のみが増えると，取引量が価格にインパクトを与えることを意味する．買い注文が増えれば価格は上昇し，売り注文が増えれば価格は下落しやすくなる．

ファンドマネージャーやトレーダーなどは取引によって生じるこれらの価格変動 (取引コスト) をできるだけ抑えて，取引をすべて執行したいと考えている．このような価格インパクトによるコストの増加ができるだけ少なくなるように取引を執行する問題を最適執行戦略決定問題と呼ぶ．具体的には，購入量 (単位) X を T 期間 (離散時間) にわたって購入するときの最適執行戦略 (t 時点での購入量) $x_t\,(t=1,\ldots,T)$ を求める問題である (x_t を決定変数とする最適化問題になる)．x_t は t 時点の価格 $P_t(t=1,\ldots,T)$ での購入量を表す一方で，P_t は x_t の関数となる．ここで取り扱う問題は最終的に売買を繰り返して正味での購入量が X になればよいのではなく，購入する量を分割し，その合計が X になる戦略を考える問題である[1]．この問題は価格インパクトは負になるが，売却の場合でも同様の問題を考

[1]ある限られた期間中に，コストを最小にして取引を執行し終えることが最大の目的であり，購入と売却を繰り返してコストを最小にすることが目的ではない．コストを最小にするために売買を繰り返すモデル化も可能であるが，その場合には購入と売却に対する価格インパクトを分けてモデル化しなければならない．以降に示す価格インパクト関数において購入と売却における価格インパクトが同じであると仮定し，非負条件を付けな

えることができる (売却量が増えれば価格は下落する).

この問題に対する最適化モデルを最初に提案したのは Bertsimas and Lo[3] である．執行コスト (総購入額) の期待値を最小化する動的計画問題としてモデル化を行った．線形価格インパクト関数を想定し，価格インパクトが一定のとき，最適執行戦略は購入量を等分割すればよいことを示した．他にも情報を含む場合や価格インパクトが価格に対する比率となる線形パーセント関数の場合についても解析解を示し，これらは等分割にならないことも示した．Almgren and Chriss[1, 2] は価格インパクトを一時的インパクトと永続的インパクトに分けて価格インパクト関数を想定した．初期簿価と実際の売却額の差をコストと定義し，その平均と分散の定数倍の和を最小化する数理計画問題として定式化を行った．Huberman and Stanzl[4] は，Bertsimas and Lo[3] の価格インパクト関数に他のトレーダーの (未知の) 注文量を表す確率変数を導入し，執行コスト (総購入額) の平均と分散の定数倍の和を最小化する問題として定式化を行い，動的計画法を用いて問題を解いた．また，線形インパクトが時間によって異なる場合の解析解も示し，解がユニークになる条件として価格インパクト係数の行列が正定値符号行列となることを示した．

このように，最適執行戦略決定問題は様々な価格インパクト関数に対して，動的計画問題もしくは数理計画問題として定式化が行われ，解析解が導出されている．しかし，従来提案されているモデルには以下のような問題点がある．

(P1) 導出される取引量 (購入量もしくは売却量) の解析解は非負であるとは限らない．一般に購入と売却に対する価格インパクトは異なると考えられるので，たとえば購入量の最適執行戦略を考える場合，最適解が負であると売却を意味することになり，最適購入執行戦略の最適解としてふさわしくない．

(P2) 時系列的に独立で線形価格インパクト関数の場合，最適執行戦略決定問題は 2 次計画問題として定式化することができる．しかし，価格インパクト係数の行列が正定値符号行列でない場合，非凸 2 次計画問題になるため，得られる解析解は大域的最適解であることは保証されず，その取り扱いには注意が必要である．

これらの問題点を解決することも含めて，本研究では対象資産が 1 つで価格インパクト関数が線形関数の場合の最適執行戦略を求めるモデルに対し，主に以下の 3 点について研究を行う．

(A1) 価格インパクト関数における確率変数が時系列的に独立の場合，各時点の価格をすべての時点の決定変数 x_t を含めて記述した数理計画問題として問題を解いても，動的計画法で解いた最適解と同じ解が得られる．明示的には書かれていないが，Almgren and Chriss[1, 2] はこの考え方に基づいて，ラグランジュ未定乗数法によって問題を解いている．Huberman and Stanzl[4] の価格インパクト関数に対して数理計画問題による定式化を示し，動的計画法で求められた最適解が数理計画問題から得られる最適性条件を満たす (最適解となる) ことを確認する．その際，本研究では様々な線形価格インパクト関数に対しても，そのコスト関数から統一的な方法で 2 次計画問題として取り扱えるように記述 (数式を展開) する[2]．数理計画問題として定式化が可能であれば，

いならば，売買を繰り返すことも許しながら，コストに関する関数を最小化するモデルになる．ただし，線形価格インパクト関数を用いるので，売却量に上限を付けないと価格が負になる可能性があり，注意が必要である．

[2]過去の様々な研究からわかるように，価格インパクト関数が異なると，それぞれの関数に応じて最適解を導く必要がある．

非負条件を含む様々な実務制約を含めて問題を解くことができ，問題点 (P1) を解決することができる．

(A2) 数理計画問題として記述が可能となれば，非凸計画問題に対して大域的最適化を行えるソフトウェア (たとえば，NUOPT の global アルゴリズム[3]) を利用することによって，大域的最適解を求めることができる．凸計画問題に比べると問題の規模は限定されるが，問題点 (P2) を解決することができる．その一方で，Huberman and Stanzl[4] や Almgren and Chriss[1, 2] のモデルのように，執行コストの平均と分散のリスク回避係数 (定数) 倍の和を目的関数とする最適執行戦略モデルはリスク回避係数が大きい場合，分散の 2 次の係数行列に対する影響が大きくなり，凸 2 次計画問題になる可能性が高くなる．その場合には非凸計画問題に対する大域的最適化ソフトウェアを利用する必要はない．そこで，利用するアルゴリズムの判定を固有値[4]を利用しないで簡単に行う方法として，線形価格インパクト関数の特徴を生かして行列分解を行い，正定値符号行列となる条件を解析的に導く方法を示す.

(A3) 非凸計画問題に対する大域的最適化ソフトウェアを利用する必要がある場合，問題の規模が大きくなると多くの計算時間がかかる可能性がある．そこで，行列分解を用いて，高速に解くための定式化の方法を示す．分かりやすく行列分解を行うために，3 節以降，決定変数を t 時点の購入量 x_t から t 時点以降の必要購入量 w_t に変更する．

本論文の構成は以下の通りである．2 節では，最適執行戦略決定問題の概要を Bertsimas and Lo[3] の線形価格インパクト関数の場合を用いて簡単に説明する．また，Huberman and Stanzl[4] と Almgren and Chriss[1, 2] のモデルを紹介する．3 節では，Huberman and Stanzl[4] の価格インパクト関数を用いて数理計画問題の定式化を示し，動的計画法で求められた最適解が数理計画問題から得られる最適性条件を満たすことを確認する．Almgren and Chriss[1, 2] の永続的価格インパクト関数の係数を可変にする場合の定式化も示す．また，購入量の非負条件を含めた数理計画問題の定式化を示す．4 節では，行列分解を用いて行列の正定値性を判定する方法を示し，さらに一般的な数理計画問題の定式化の記述方法も示す．また，二次形式の行列が非正定値符号行列で制約条件を付けない場合，目的関数はマイナス無限大となり，2 節と 3 節で示した解析解は最適解とならないことを明示的に示す．5 節では Huberman and Stanzl[4] のモデルを用いて簡単な数値分析を行う．7 種類の価格インパクト係数の組み合わせを用いていくつかのパラメータに対する感度分析を行う．最後に，6 節で結論と今後の課題を述べる．

2. 最適執行戦略決定問題と様々な価格インパクト関数

2.1. 最適執行戦略決定問題の概要

最適執行戦略決定問題とは，ある取引量 (単位) X を T 期間 (離散時間) にわたって取引するときの各時点 ($t = 1, \ldots, T$) での取引量 x_t を決定する問題である．本論文では取引とは「購入」を表す．Bertsimas and Lo[3] は価格変化を ① 取引を行わなかったときの価格変化 ε_t，② 取引量 x_t が価格へ与える線形インパクトによる変化 $\theta x_t (\theta > 0)$ に分け，価格インパ

[3] NUOPT は数理システム社が開発した数理計画法ソフトウェアパッケージで，global アルゴリズムは凸緩和法に基づく大域的最適化アルゴリズムである．

[4] 数値計算で固有値を求め，すべて正になれば正定値符号行列となる．

クト関数を (1) 式で表している.

$$P_t = P_{t-1} + \theta x_t + \varepsilon_t,\ \theta > 0 \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{1}$$

ここで，取引を行わなかったときの価格変化はランダムウォークを仮定する ($\varepsilon_t \sim \phi(0, \sigma_\varepsilon)$ は i.i.d.). 目的関数を 1 時点での執行コスト (総購入額) の期待値として，以下のようにそれを最小化する最適化問題として定式化している.

$$\textbf{Minimize}\left\{ \mathrm{E}_1\left[\sum_{t=1}^{T} P_t x_t\right] \middle| \sum_{t=1}^{T} x_t = X \right\} \tag{2}$$

この問題を動的計画法で解くために t 時点のベルマン方程式を

$$V_t(P_{t-1}, w_t) = \min_{x_t} \mathrm{E}_t\left[P_t x_t + V_{t+1}(P_t, w_{t+1})\right] \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{3}$$

と記述し，最適バリュー関数を T 時点から再帰的に 1 時点まで求めている．ここで，w_t は t 時点以降で購入する必要のある量で，購入量 x_t を用いて以下のように表すことができる.

$$w_t = w_{t-1} - x_{t-1}\ (t = 2, \ldots, T), \quad w_1 = X, \quad w_{T+1} = 0 \tag{4}$$

最適解は，$x_t^* = \frac{X}{T}$ と求められ，各期間で同じ量だけ購入することが最適執行戦略となる. また，最適バリュー関数は

$$V_1(P_0, w_1) = \left(P_0 + \frac{T+1}{2T}\theta w_1\right) w_1 = P_0 X + \frac{\theta X^2}{2}\left(1 + \frac{1}{T}\right) \tag{5}$$

と求められる．価格インパクトがないときのコストは $P_0 X$ であるので，$\frac{\theta X^2}{2}\left(1 + \frac{1}{T}\right)$ が価格インパクトによる執行コストを表す.

Bertsimas and Lo[3] はこの他に 3 種類の価格インパクト関数を定義し，解析解を求めている．この節の残りでは本研究で取りあげる 2 種類のモデル (Huberman and Stanzl[4], Almgren and Chriss[1, 2]) を説明する.

2.2. Huberman and Stanzl[4]

Bertsimas and Lo[3] の価格インパクト関数に他のトレーダーの (未知の) 注文量を表す確率変数を導入し，執行コスト (総購入額) の平均と分散の定数倍の和を最小化する問題として定式化を行っている．線形インパクトを時間に依存させ，(6),(7) 式で価格インパクト関数を定義している.

$$\hat{P}_t = \alpha \hat{P}_{t-1} + (1-\alpha) P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{6}$$

$$P_t = \hat{P}_t + \theta_t (x_t + \xi_t) \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{7}$$

ここで，

- ε_t : t 時点の注文が行われる前に観測される価格変化を表す確率変数.
  $\varepsilon_t \sim \phi(0, \sigma_\varepsilon)$, i.i.d. プロセス
- ξ_t : 他のトレーダーの (未知の) 注文量を表す確率変数．$\xi_t \sim \phi(0, \sigma_\xi)$, i.i.d. プロセス
  (t 時点における総取引量は $x_t + \xi_t$ となる．)

$\hat{P}_t$: x_t を購入するトレーダーによって観測される t 時点の初期資産価格で，$t-1$ 時点の取引の後に更新される最終価格.

P_t : 個々のトレーダーが行う取引価格.

α : 価格の更新サイズを決定するウェイト.

である．$\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$ と $\{\xi_t\}_{t=1}^T$ は独立とする．$\alpha=0$ のとき，期待される価格の更新が取引価格と一致し (観測される価格で取引され)，価格インパクト関数は以下のようになる.

$$P_t = P_{t-1} + \theta_t(x_t + \xi_t) + \varepsilon_t \quad (t=1,\ldots,T) \tag{8}$$

また，$\alpha=1$ のときは

$$\hat{P}_t = \hat{P}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t=1,\ldots,T) \tag{9}$$

となり，次の時点では取引の結果生じた価格インパクトの影響はなくなる.

この問題は以下の最適化問題として定式化される.

$$\textbf{Minimize}\left\{ \mathrm{E}_1[C_T] + \frac{R}{2}\mathrm{Var}_1[C_T] \middle| C_T \equiv \sum_{t=1}^T P_t x_t ; \sum_{t=1}^T x_t = X \right\} \tag{10}$$

ここで，$\frac{R}{2}$ はリスク回避係数を表す．この問題を (3) 式と同様に動的計画問題として解くために，

$$V_t(P_{t-1}, w_t) = \min_{x_t} \mathrm{E}_t\left[P_t x_t + V_{t+1}(P_t, w_{t+1})\right] + \frac{R}{2}\mathrm{Var}_t\left[P_t x_t + V_{t+1}(P_t, w_{t+1})\right] \quad (t=1,\ldots,T) \tag{11}$$

と記述し，バックワードに問題を解いている．価格インパクト係数行列 Θ_T

$$\Theta_T \equiv \begin{bmatrix} 2\theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \cdots & \theta_2 \\ \theta_2 & 2\theta_3 & \theta_3 & \cdots & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_3 & 2\theta_4 & \cdots & \theta_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \cdots & 2\theta_T \end{bmatrix} \tag{12}$$

が，半正定値符号行列 ($R=0$ の場合には正定値符号行列) ならば，最適執行戦略は以下のようになる.

$$x_t^* = \left\{1 - \frac{\theta_t(1+\alpha+R\alpha\theta_t\sigma_\xi^2)}{2\mu_{t+1} + R(\alpha^2\theta_t^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2)}\right\} w_t \quad (t=1,\ldots,T-1) \tag{13}$$

$$x_T^* = w_T \tag{14}$$

ここで，

$$\mu_t = \alpha\theta_{t-1} + \theta_t\left(1 + \frac{R}{2}\theta_t\sigma_\xi^2\right) - \frac{\theta_t^2}{2}\left\{\frac{\left(1+\alpha+R\alpha\theta_t\sigma_\xi^2\right)^2}{2\mu_{t+1} + R\left(\alpha^2\theta_t^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)}\right\} \quad (t=2,\ldots,T-1) \tag{15}$$

$$\mu_T = \alpha\theta_{T-1} + \theta_T\left(1 + \frac{R}{2}\alpha\theta_T\sigma_\xi^2\right) \tag{16}$$

である．(4) 式より，$w_1 = X$ であるので x_1^* を求めることができ，さらに $w_t = w_{t-1} - x_{t-1}^*$ の関係式を用いて逐次的に，$w_2, x_2^*, w_3, \cdots$ と求めることができる.

2.3. Almgren and Chriss[1, 2]

価格インパクトを一時的インパクト $h(x_t)$ と永続的インパクト $g(x_t)$ に分けて，(17), (18) 式によって，価格インパクト関数を定義している[5].

$$
\begin{aligned}
P_t &= P_{t-1} + \lambda + g(x_t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \phi(0, \sigma_\varepsilon) \quad (t = 1, \ldots, T) & (17)\\
\tilde{P}_t &= P_{t-1} + h(x_t) \quad (t = 1, \ldots, T) & (18)
\end{aligned}
$$

ここで，

$\tilde{P}_t$: 実際の取引価格 (購入価格)

λ : 期待ドリフト項

である．永続的インパクトとは少なくても取引期間中に残る，取引を行うことによる均衡価格の変化であり，一時的インパクトとは均衡価格からの一時的な価格変化で，次時点の価格には影響を与えないものを表す．具体的には以下のような線形関数を適用している．

$$
\begin{aligned}
&\text{永続的価格インパクト関数} \;:\; g(x_t) = \theta x_t \quad (t = 1, \ldots, T) & (19)\\
&\text{一時的価格インパクト関数} \;:\; h(x_t) = \beta + \gamma x_t \quad (t = 1, \ldots, T) & (20)
\end{aligned}
$$

ここで，

β : 固定購入コスト (ビッド・アスク・スプレッドの半分に手数料を加えたもの)

γ : 非線形効果

である．そして，実際の購入額 (総購入費用) と初期簿価の差をコスト C_T と定義し[6]，以下のようにコストの平均 $\mathrm{E}_1[C_T]$ と分散の定数倍の和を最小化する数理計画問題として定式化を行っている[7].

$$
\textbf{Minimize} \left\{ \mathrm{E}_1[C_T] + \frac{R}{2}\mathrm{Var}_1[C_T] \middle| C_T \equiv \sum_{t=1}^{T} \tilde{P}_t x_t - P_0 X; \sum_{t=1}^{T} x_t = X \right\} \tag{21}
$$

ラグランジュ未定乗数法を用いて以下のように最適解を求めている．

$$
\begin{aligned}
x_t^* = &\ \frac{2\sinh(\frac{1}{2}\kappa)}{\sinh(\kappa T)} \cosh\left(\kappa\left(T - t + \frac{1}{2}\right)\right) X \\
&- \frac{2\sinh(\frac{1}{2}\kappa)}{\sinh(\kappa T)} \left[\cosh\left(\kappa\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) - \cosh\left(\kappa\left(T - t + \frac{1}{2}\right)\right)\right] \cdot \frac{\lambda}{R\sigma_\varepsilon^2} \quad (t = 1, \ldots, T)
\end{aligned} \tag{22}
$$

ただし，$2(\cosh(\kappa) - 1) = \frac{R\sigma_\varepsilon^2}{2(\gamma - \frac{\theta}{2})}$ である．$\lambda = 0$ のときは第 2 項の値が 0 となり，ドリフト項を含まない場合の最適解となる．

---

[5]原論文では売却問題を取り扱っているが，本論文では購入問題を取り扱うため，それに合わせて記述を書き直している．

[6]原論文では売却問題のため，コストを実際の売却額と初期簿価の差と定義している．

[7]コスト C_T に含まれる P_0X は定数であり，除いても最適解には影響を与えない．したがって，コストは総購入費用で考えてもよい．

3. 解法およびモデルの定式化

Bertsimas and Lo[3], Huberman and Stanzl[4] は動的計画法，Almgren and Chriss[1, 2] はラグランジュ未定乗数法を用いて問題を解いている．得られた最適解からも分かるように，価格インパクト関数における確率変数が時系列的に独立の場合，最適解は確率変数の実現値とは独立に決まる．例えば，Bertsimas and Lo[3] の情報を持つ価格インパクト関数の場合の最適解には AR(1) モデルで記述される情報の実現値が含まれているのに対し，他の場合には実現値に関係なく (パラメータや決定変数にのみ依存して) 最適解が決定される．したがって，各時点が独立な場合には，各時点の価格をすべての時点の決定変数を含めて記述した数理計画問題として問題を解いても，動的計画法で解いた最適解と同じ解が得られる．明示的には書かれていないが，Almgren and Chriss[1, 2] はこの考え方に基づいて，ラグランジュ未定乗数法によって問題を解いている．そこで本節では，Huberman and Stanzl[4] の価格インパクト関数に対して数理計画問題による定式化を示し，動的計画法で求められた最適解が数理計画問題から得られる最適性条件を満たす (最適解となる) ことを示す[8]．また，Almgren and Chriss[1, 2] の価格インパクト係数 θ を可変にした永続的インパクト関数を用いたモデルの定式化を示す.

3.1. Huberman and Stanzl[4] の価格インパクト関数

価格インパクト関数 ((6), (7) 式) は，以下のように展開できる．

$$\begin{aligned}
\hat{P}_t &= \alpha \hat{P}_{t-1} + (1-\alpha)\left\{\hat{P}_{t-1} + \theta_{t-1}(x_{t-1}+\xi_{t-1})\right\} + \varepsilon_t \\
&= P_0 + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{t-1}\theta_k(x_k+\xi_k) + \sum_{k=1}^{t}\varepsilon_k \quad (t=1,\ldots,T)
\end{aligned} \tag{23}$$

この式を (7) 式に代入すると，

$$P_t = P_0 + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{t-1}\theta_k(x_k+\xi_k) + \theta_t(x_t+\xi_t) + \sum_{k=1}^{t}\varepsilon_k \quad (t=1,\ldots,T) \tag{24}$$

を得る．コスト (総購入費用) は (25) 式のように展開することができる[9]．

$$\begin{aligned}
C_T &= \sum_{t=1}^{T}\left\{(1-\alpha)\left(\sum_{k=1}^{t-1}\theta_k x_k\right)x_t + \theta_t x_t^2\right\} + \sum_{t=1}^{T}\left\{P_0 + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{t-1}\theta_k\xi_k + \theta_t\xi_t + \sum_{k=1}^{t}\varepsilon_k\right\}x_t \\
&= \sum_{k=2}^{T}\sum_{t=2}^{T} b_{kt}w_k w_t + \sum_{t=2}^{T} d_t w_t + \theta_1\xi_1(X-\alpha w_2) + \sum_{t=2}^{T-1}\theta_t\xi_t(w_t-\alpha w_{t+1}) + \theta_T\xi_T w_T \\
&\quad +\theta_1 X^2 + (P_0+\varepsilon_1)X \\
&= \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{d}^\top\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{z} + \theta_1 X^2 + (P_0+\varepsilon_1)X
\end{aligned} \tag{25}$$

[8] $\alpha=0$, $\xi_t=0$ の場合，Bertsimas and Lo[3] の価格インパクト関数を可変にした価格インパクト関数と考えることができる

[9] 以下の x_t と w_t の変換式を用いることによって導出する.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{k=1}^{t}a_k\right)x_t &= a_1x_1 + (a_1+a_2)x_2 + (a_1+a_2+a_3)x_3 + \cdots + (a_1+\cdots+a_T)x_T \\
&= a_1\sum_{k=1}^{T}x_k + a_2\sum_{k=2}^{T}x_k + \cdots + a_T x_T = \sum_{t=1}^{T}a_t\left(\sum_{k=t}^{T}x_k\right) = \sum_{t=1}^{T}a_t w_t
\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{B}=\{b_{kt}\}(k=2,\ldots,T;\ t=2,\ldots,T)$, $\boldsymbol{d}^\top=(d_2,\cdots,d_T)$, , $\boldsymbol{w}^\top=(w_2,\cdots,w_T)$, $\boldsymbol{\xi}^\top=(\xi_1,\cdots,\xi_T)$, $\boldsymbol{z}^\top=(z_1,\cdots,z_T)$ であり，

$$b_{kt} = \begin{cases} \alpha\theta_{k-1}+\theta_k & (k=t) \\ -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_k & (k=t-1) \\ -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_t & (t=k-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{26}$$

$$d_t = \begin{cases} -(1+\alpha)\theta_1 X+\varepsilon_2 & (t=2) \\ \varepsilon_t & (t=3,\ldots,T) \end{cases} \tag{27}$$

$$z_t = \begin{cases} \theta_1(X-\alpha w_2) & (t=1) \\ \theta_t(w_t-\alpha w_{t+1}) & (t=2,\ldots,T-1) \\ \theta_T w_T & (t=T) \end{cases} \tag{28}$$

である．ここで ⊤ は転置を表す．目的関数はコストの平均と分散の一定倍の和の最小化であり，期待値と分散は以下のように記述できる．

$$\mathrm{E}\left(C_T\right) = \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}-(1+\alpha)\theta_1 X w_2+\theta_1 X^2+P_0 X \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(C_T\right) &= \sigma_\varepsilon^2 X^2+\sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{w}+\sigma_\xi^2\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{w}^\top\left(\sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{I}+\sigma_\xi^2\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{w}-2\alpha\theta_1^2 X\sigma_\xi^2 w_2+\left(\sigma_\varepsilon^2+\theta_1^2\sigma_\xi^2\right)X^2\end{aligned} \tag{30}$$

ただし，

$$\boldsymbol{G}=\{g_{kt}\}\quad(k=2,\ldots,T;\ t=2,\ldots,T),\quad g_{kt}=\begin{cases} \alpha^2\theta_{t-1}^2+\theta_t^2 & (t=k) \\ -\alpha\theta_k^2 & (k=t-1) \\ -\alpha\theta_t^2 & (t=k-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である．たとえば，$T=5$ とすると，行列 $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{G}$ は以下のようになる．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \alpha\theta_1+\theta_2 & -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_2 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_2 & \alpha\theta_2+\theta_3 & -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_3 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_3 & \alpha\theta_3+\theta_4 & -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_4 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_4 & \alpha\theta_4+\theta_5 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \alpha^2\theta_1^2+\theta_2^2 & -\alpha\theta_2^2 & 0 & 0 \\ -\alpha\theta_2^2 & \alpha^2\theta_2^2+\theta_3^2 & -\alpha\theta_3^2 & 0 \\ 0 & -\alpha\theta_3^2 & \alpha^2\theta_3^2+\theta_4^2 & -\alpha\theta_4^2 \\ 0 & 0 & -\alpha\theta_4^2 & \alpha^2\theta_4^2+\theta_5^2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$\overline{\boldsymbol{d}}^\top=((1+\alpha)\theta_1 X+R\alpha\theta_1^2 X\sigma_\xi^2,0,\cdots,0)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}+\frac{R}{2}\left(\sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{I}+\sigma_\xi^2\boldsymbol{G}\right)$ とすると，最適化問題は以下のような無制約最小化問題として記述できる．

$$\text{最小化}\qquad U=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{d}}^\top\boldsymbol{w} \tag{33}$$

目的関数を偏微分して，最適解を求める．

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{w}} = 2\left\{\boldsymbol{B}+\frac{R}{2}\left(\sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{I}+\sigma_\xi^2\boldsymbol{G}\right)\right\}\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{0} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{-1}\overline{\boldsymbol{d}} \tag{35}$$

最適解 $\boldsymbol{w}$ が大域的最適解である条件は，行列 $\boldsymbol{F}$ が正定値符号行列であることである[10].

次に，(13) 式によって得られる最適解が (34) 式を満たすことを示す．(13) 式より

$$w_{t+1} = w_t - x_t = \left\{ \frac{\theta_t(1+\alpha+R\alpha\theta_t\sigma_\xi^2)}{2\mu_{t+1}+R(\alpha^2\theta_t^2\sigma_\xi^2+\sigma_\varepsilon^2)} \right\} w_t \quad (t=1,\ldots,T-1) \tag{36}$$

となるので，書き直すと，

$$\left\{2\mu_{t+1}+R\left(\alpha^2\theta_t^2\sigma_\xi^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\right\} w_{t+1} = \theta_t\left(1+\alpha+R\alpha\theta_t\sigma_\xi^2\right) w_t \quad (t=1,\ldots,T-1) \tag{37}$$

を得る．また，(36) 式を (15) 式に代入すると，

$$\mu_t = \alpha\theta_{t-1} + \theta_t\left(1+\frac{R}{2}\theta_t\sigma_\xi^2\right) - \frac{\theta_t w_{t+1}}{2w_t}\left(1+\alpha+R\alpha\theta_t\sigma_\xi^2\right) \quad (t=2,\ldots,T-1) \tag{38}$$

を得る．一方，(34) 式を各要素ごとに計算すると，以下のように最適解が (34) 式を満たすことがわかる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial w_t} &= -(1+\alpha)\theta_{t-1}w_{t-1} + 2(\alpha\theta_{t-1}+\theta_t)w_t - (1+\alpha)\theta_t w_{t+1} + R\sigma_\varepsilon^2 w_t \\
&\quad + R\sigma_\xi^2\left\{-\alpha\theta_{t-1}^2 w_{t-1} + \left(\alpha^2\theta_{t-1}^2+\theta_t^2\right)w_t - \alpha\theta_t^2 w_{t+1}\right\} \\
&= \left\{2\mu_t + R\left(\alpha^2\theta_{t-1}^2\sigma_\xi^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\right\} w_t - \left(1+\alpha+R\alpha\theta_{t-1}\sigma_\xi^2\right)\theta_{t-1}w_{t-1} = 0 \\
&\qquad (t=2,\ldots,T-1) \qquad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial w_T} &= -(1+\alpha)\theta_{T-1}w_{T-1} + 2(\alpha\theta_{T-1}+\theta_T)w_T + R\sigma_\varepsilon^2 w_T \\
&\quad + R\sigma_\xi^2\left\{-\alpha\theta_{T-1}^2 w_{T-1} + \left(\alpha^2\theta_{T-1}^2+\theta_T^2\right)w_T\right\} \\
&= \left\{2\mu_T + R\left(\alpha^2\theta_{T-1}^2\sigma_\xi^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\right\} w_T - \left(1+\alpha+R\alpha\theta_{T-1}\sigma_\xi^2\right)\theta_{T-1}w_{T-1} = 0 \qquad (40)
\end{aligned}$$

3.2. Almgren and Chriss[1, 2]：永続的インパクト関数の係数を可変にする場合

Almgren and Chriss[1, 2] は永続的インパクト関数の係数が一定 (θ) の場合の最適解を示している．ここでは，より一般化して，インパクト係数を可変にした場合 (θ_t) の定式化を示す．永続的価格インパクト関数と一時的価格インパクト関数は，以下のように記述できる．

$$\begin{aligned}
P_t &= P_{t-1} + \lambda + \theta_t x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \phi(0,\sigma_\varepsilon) \quad (t=1,\ldots,T) & (41)\\
\tilde{P}_t &= P_{t-1} + (\beta+\gamma x_t) \quad (t=1,\ldots,T) & (42)
\end{aligned}$$

総購入費用は以下のように記述できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T}\tilde{P}_t x_t &= \sum_{t=1}^{T}\left\{P_0 + \lambda(t-1) + \sum_{k=1}^{t-1}\theta_k x_k + \sum_{k=1}^{t-1}\varepsilon_k + (\beta+\gamma x_t)\right\} x_t \\
&= P_0 X + \lambda\sum_{t=2}^{T} w_t + \sum_{t=1}^{T-1}\theta_t(w_t-w_{t+1})w_{t+1} + \sum_{t=1}^{T-1}\varepsilon_t w_{t+1} + \beta X + \sum_{t=1}^{T}\gamma(w_t-w_{t+1})^2 \\
&\qquad (43)
\end{aligned}$$

[10] 行列 $\boldsymbol{G}$ は正定値符号行列であるので，行列 B が正定値符号行列であれば，$\boldsymbol{F}$ も正定値符号行列になる．

したがって，コスト関数は以下のように記述できる．

$$
\begin{aligned}
C_T &= \sum_{t=1}^{T} \tilde{P}_t x_t - P_0 X \\
&= \sum_{t=2}^{T} (2\gamma - \theta_{t-1})\, w_t^2 + \sum_{t=2}^{T-1} (\theta_t - 2\gamma)\, w_t w_{t+1} + (\theta_1 - 2\gamma)\, X w_2 + \sum_{t=2}^{T} (\lambda + \varepsilon_{t-1}) w_t \\
&\quad + \gamma X^2 + \beta X \\
&= \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{w} + \gamma X^2 + \beta X \qquad (44)
\end{aligned}
$$

ただし，$\gamma_t = \gamma - \frac{\theta_t}{2}$ とすると，

$$
b_{kt} = \begin{cases} 2\gamma_{t-1} & (k = t) \\ -\gamma_k & (k = t-1) \\ -\gamma_t & (t = k-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad d_t = \begin{cases} -2\gamma_1 X + \lambda + \varepsilon_1 & (t = 2) \\ \lambda + \varepsilon_{t-1} & (t = 3, \ldots, T) \end{cases}
$$

コスト C_T の期待値と分散は以下のように計算できる．

$$
\mathrm{E}_1(C_T) = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{d}}^\top \boldsymbol{w} + \gamma X^2 + \beta X \qquad (45)
$$

$$
\mathrm{Var}_1(C_T) = \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w} \qquad (46)
$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{d}}^\top = (2\gamma_1 X - \lambda, -\lambda, -\lambda, \cdots, -\lambda)$ とする．$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B} + \frac{R}{2}\sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{I}$ とすると，最適化問題は以下のような無制約最小化問題として記述できる．

$$
\text{最小化} \quad U = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{F} \boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{d}}^\top \boldsymbol{w} \qquad (47)
$$

目的関数を偏微分して，最適解を求める．

$$
\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{w}} = 2\left\{\boldsymbol{B} + \frac{R}{2}\sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{I}\right\}\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{0} \qquad (48)
$$

$$
\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{-1}\overline{\boldsymbol{d}} \qquad (49)
$$

最適解 $\boldsymbol{w}$ が大域的最適解である条件は，行列 $\boldsymbol{F}$ が正定値符号行列であることである．

3.3. 非負条件の追加

動的計画法およびラグランジュ未定乗数法で解ける問題は一般に非負条件や一般的な実務制約を含まない場合に限られている．しかし，動的計画問題と等価な数理計画問題を記述できる場合には，数理計画問題として取り扱うことによって，不等号制約式を追加しても，容易に数値解を導くことができる．モデルの目的関数に，購入量 x_t の非負条件を加える[11]と，以下のような2次計画問題として定式化することができる．

$$
\text{最小化} \quad \sum_{k=2}^{T}\sum_{t=2}^{T} f_{kt} w_k w_t - \sum_{t=2}^{T} \overline{d}_t w_t \qquad (50)
$$

$$
\text{制約条件} \quad w_2 \le X \qquad (51)
$$

$$
w_{t+1} \le w_t \quad (t = 2, \ldots, T-1) \qquad (52)
$$

$$
w_T \ge 0 \qquad (53)
$$

[11]モデルの目的関数 (33) 式と (47) 式は同じ形式をしている．取引量の非負制約式 ($x_t \ge 0$) は (4) 式より，w_t によって記述できる．

行列 $\boldsymbol{F}$ が正定値符号行列ならば，凸 2 次計画問題を解くことによって容易に最適解を求めることができる．行列 $\boldsymbol{F}$ が正定値符号行列でなくても大域的最適化ソフトウェアを使うことによって最適解を求められるが，問題の規模が大きくなると現実的な計算時間で解けない可能性もある．この点を解決するために，4.2 節で行列分解を利用した定式化を示し，5 節の数値分析の中の 5.4.4 項で検証を行う．

4. 行列の正定値性と行列分解

3 節で示したように，線形価格インパクト関数を用いた場合，2 次計画問題として記述できる．二次形式の行列が正定値符号行列ならば，大域的最適解を導出することができる．しかし，正定値符号行列でなければ，(35) 式や (49) 式で得られる解析解は 4.2 節で示すように目的関数はマイナス無限大となり (有界ではなくなり)，大域的最適解とはならない．3.3 節で示したように，非負条件を追加した場合には有界となるが，大域的最適化アルゴリズムを用いて問題を解く必要がある．

4.1. 行列の正定値性の判定条件

行列の固有値がすべて正であれば (最小固有値が正であれば)，正定値符号行列である．一般に行列の固有値は数値計算によって求めることができ，その判定を行うことができる．しかし，最適化プログラムを実装する際に，4.2 節で示す定式化にも利用する行列分解によって判定を行うことができれば，大域的最適化アルゴリズムを利用するか否かの判定をするために固有値の計算を行う必要はない．また，3 節で示した行列 $\boldsymbol{F}$ は対角要素とそれに隣接する要素だけに非ゼロ要素があるので，(12) 式で示された価格インパクト係数行列に比べて取り扱いやすい形である．そこで，本研究では，線形価格インパクト関数が持つこの特殊な行列構造を利用することによって行列分解を行い，固有値計算を行うことなく，正定値符号行列の判定条件を示す方法を提案する．具体的には,「正定値符号行列 $\boldsymbol{F}$ は，対角成分がすべて 1 の下三角行列 $\boldsymbol{A}$ と対角成分がすべて正である対角行列 $\boldsymbol{C}$ によって，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^\top$ と表せる」という正定値符号行列であるための条件を用いて判定する方法を示す．

たとえば，$T = 5$ の場合，

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} & 0 & 0 \\ f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 \\ 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} \\ 0 & 0 & f_{54} & f_{55} \end{bmatrix} \tag{54}$$

となる ($f_{t,t+1} = f_{t+1,t}$)．このような特徴を持つ行列に対する下三角行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

となる．$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\{c_2, \cdots, c_T\}$ とすると，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^\top$ は以下のように計算できる．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^\top = \begin{bmatrix} c_2 & a_2c_2 & 0 & 0 \\ a_2c_2 & a_2^2c_2 + c_3 & a_3c_3 & 0 \\ 0 & a_3c_3 & a_3^2c_3 + c_4 & a_4c_4 \\ 0 & 0 & a_4c_4 & a_4^2c_4 + c_5 \end{bmatrix} \tag{56}$$

したがって，c_t および a_t は $f_{tt}, f_{t,t+1}$ を用いて，以下のように求めることができる．

$$\text{対角要素} \;:\; c_2 = f_{22};\ a_{t-1}^2 c_{t-1} + c_t = f_{tt} \quad (t = 3, \ldots, T) \tag{57}$$

$$\text{その他} \;:\; a_t c_t = f_{t,t+1} \quad (t = 2, \ldots, T-1) \tag{58}$$

(58) 式を (57) 式に代入すると，

$$a_{t-1}^2 c_{t-1} + c_t = \frac{f_{t-1,t}^2}{c_{t-1}} + c_t = f_{t,t} \quad (t = 3, \ldots, T) \tag{59}$$

となるので，

$$c_t = f_{tt} - \frac{f_{t-1,t}^2}{c_{t-1}} \quad (t = 3, \ldots, T) \tag{60}$$

を得る．c_t の値がすべて正であれば，行列 $\boldsymbol{F}$ は正定値符号行列となる．また，(58) 式より，

$$a_t = \frac{f_{t,t+1}}{c_t} \quad (t = 2, \ldots, T-1) \tag{61}$$

が得られる．3 節で示した価格インパクト関数ごとに c_t の値を計算すると以下のように求められる．

(1) Huberman and Stanzl[4] の価格インパクト関数

$$\begin{aligned}
f_{tt} &= \alpha\theta_{t-1} + \theta_t + \frac{R}{2}\left\{\left(\alpha^2\theta_{t-1}^2 + \theta_t^2\right)\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2\right\} \quad (t = 2, \ldots, T) \\
f_{t,t+1} &= -\left\{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_t + \frac{R}{2}\sigma_\xi^2\alpha\theta_t^2\right\} \quad (t = 2, \ldots, T-1) \\
c_2 &= \alpha\theta_1 + \theta_2 + \frac{R}{2}\left\{\left(\alpha^2\theta_1^2 + \theta_2^2\right)\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2\right\} \\
c_t &= \left[\alpha\theta_{t-1} + \theta_t + \frac{R}{2}\left\{\left(\alpha^2\theta_{t-1}^2 + \theta_t^2\right)\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2\right\}\right] \\
&\quad -\frac{1}{c_{t-1}}\left\{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_{t-1} + \frac{R}{2}\sigma_\xi^2\alpha\theta_{t-1}^2\right\}^2 \quad (t = 3, \ldots, T) \\
a_t &= -\frac{1}{c_t}\left\{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\theta_t + \frac{R}{2}\sigma_\xi^2\alpha\theta_t^2\right\} \quad (t = 2, \ldots, T-1)
\end{aligned}$$

(2) Almgren and Chriss[1, 2]：永続的インパクト関数の係数を可変にする場合

$$\begin{aligned}
f_{tt} &= 2\gamma_{t-1} + \frac{R}{2}\sigma_\varepsilon^2 \quad (t = 2, \ldots, T) \\
f_{t,t+1} &= -\gamma_t \quad (t = 2, \ldots, T-1) \\
c_2 &= 2\gamma_1 + \frac{R}{2}\sigma_\varepsilon^2 \\
c_t &= 2\gamma_{t-1} + \frac{R}{2}\sigma_\varepsilon^2 - \frac{\gamma_{t-1}^2}{c_{t-1}} \quad (t = 3, \ldots, T) \\
a_t &= -\frac{\gamma_t}{c_t} \quad (t = 2, \ldots, T-1)
\end{aligned}$$

上記のモデルのように，執行コストの平均と分散のリスク回避係数 (定数) 倍の和を目的関数とする最適執行戦略モデルはリスク回避係数が大きい場合，分散の 2 次の係数行列 (正定値符号行列) に対する影響が大きくなり，凸 2 次計画問題になる可能性が高くなる．

4.2. 行列分解を利用した定式化

3.3 節で示した定式化の目的関数に含まれる行列の規模は $(T-1)\times(T-1)$ 行列である．T が大きくなっても凸 2 次計画問題では計算時間に与える影響はわずかだと考えられるが，非凸 2 次計画問題では大きな影響を与える可能性がある．そこで，コンパクト分解 [5] と似たアイデアを用いて，行列分解を利用した定式化を示す.

行列 $\boldsymbol{F}$ の二次形式は以下のように展開できる．

$$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w})^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \sum_{t=2}^{T} c_t y_t^2 \tag{62}$$

ここで，$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}^\top=(y_2,\cdots,y_T)$ とする．$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$ は具体的には以下のように記述できる．

$$w_t + a_t w_{t+1} = y_t \quad (t=2,\ldots,T-1) \tag{63}$$

$$w_T = y_T \tag{64}$$

したがって，3.3 節で示したモデルは以下のように記述できる．

$$\text{最小化} \quad \sum_{t=2}^{T-1} c_t y_t^2 + c_T w_T^2 - \sum_{t=2}^{T} \overline{d}_t w_t \tag{65}$$

$$\text{制約条件} \quad w_t + a_t w_{t+1} = y_t \quad (t=2,\ldots,T-1) \tag{66}$$

$$(51)\sim(53)\ \text{式}$$

3.3 節で示した定式化の目的関数に含まれる行列の非ゼロ要素数は $3T-5$ 個である．それに対し，上記の定式化では対角要素のみで $T-1$ 個となり，コンパクト分解と同様に目的関数は解法上有利な定式化と言えるが，制約式と決定変数はそれぞれ $T-2$ 個増加する．5 節の数値分析の 5.4.4 項でこれらの影響について調べる．また，(65) 式の目的関数より c_t は二次関数の係数となっており，c_t が負の場合には二次関数が上に凸の部分が存在し，大域的最適解の導出を保証できないことを明示的に示した定式化となっている．

さらに，制約式がなく，c_t が負の場合には，目的関数はマイナス無限大となり，有界でなくなる．上記の記述と重複する部分があるが，以下に証明を示す.

補題 1: (65) 式における c_t の少なくても一つが負になる無制約最小化問題の場合，目的関数はマイナス無限大となり，有界とはならない.

証明: $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{w}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{q}^\top=(q_2,\cdots,q_T)$, $\boldsymbol{v}^\top=(v_2,\cdots,v_T)$ とする．これを用いて,

$$\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} + 2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{q})^\top \boldsymbol{w} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} \tag{67}$$

を得る．$2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{q})=-\overline{\boldsymbol{d}}$ とすると，スカラー値となる $\boldsymbol{q}^\top\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}$ を取り除くと (33) 式と同じ形式になり，$\boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}$ を目的関数として最小化すればよい．$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{w}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ は未知変数 $T-1$ 個で，方程式が $T-1$ 本の連立方程式なので，任意の $v_t(t=2,\ldots,T)$ に対する w_t の値は存在する．目的関数は

$$\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \sum_{t=2}^{T-1} c_t v_t^2 + c_T v_T^2 \tag{68}$$

となり，$c_u<0$ とするならば，$v_u\to\infty$, $v_k=0,(k\neq u)$ を満たす w_k は存在し，目的関数はマイナス無限大になる．(証明終了)

5. 数値分析

Huberman and Stanzl[4] の線形価格インパクト関数を用いて数値分析を行う．価格インパクト係数やリスク回避係数などのパラメータがどのように行列の正定値性に影響を与えるかを調べる．そして，非負条件の追加による最適解の違いを調べる．数理計画ソフトウェアとして，(株) 数理システムの NUOPT Ver.9 を用いる．計算機は IBM ThinkPad T43, 2.13GHz, 2GB メモリである．行列 $\boldsymbol{F}$ が正定値符号行列の場合には有効制約法 (”asqp”)，正定値符号行列でない場合には凸緩和法に基づく大域的最適化アルゴリズム (”global”) によって最適解を求める．

5.1. 設定条件

基本設定におけるパラメータは，$P_0 = 1,000$, $X = 100$, $T = 5$, $R = 0.1$, $\alpha = 0.05$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, $\sigma_\xi^2 = 0.1$ とする．図 1 に示す 7 種類の価格インパクト係数 θ_t の組み合わせに対して数値分析を行う[12]．モデルにおけるリスク回避係数は $\frac{R}{2}$ であるが，記述の煩雑さを避けるために，以降，R をリスク回避係数と呼ぶことにする．

ケース番号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	形状
ケース 1	1	1	1	1	1	フラット
ケース 2	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$	$5/3$	右上がり
ケース 3	$5/3$	$4/3$	1	$2/3$	$1/3$	右下がり
ケース 4	$5/13$	$25/13$	$5/13$	$25/13$	$5/13$	M 字
ケース 5	$25/17$	$5/17$	$25/17$	$5/17$	$25/17$	W 字
ケース 6	$25/17$	$15/17$	$5/17$	$15/17$	$25/17$	V 字
ケース 7	$5/13$	$15/13$	$25/13$	$15/13$	$5/13$	逆 V 字

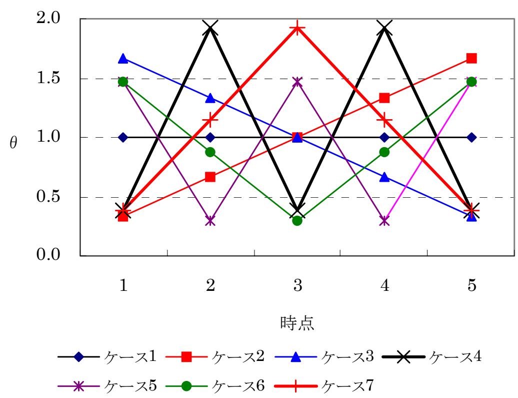


図 1: 価格インパクト係数

価格インパクト係数の和が 5($S = 5$)，また最大係数の大きさが最小係数の大きさの 5 倍以下 (最大倍率 $M = 5$) になるように係数を調整している．価格インパクト係数の和は市場の全体的な流動性，最大倍率は市場におけるインパクトの変動を表す係数と考え，(係数比をそのままに) これらの感度分析も行う．

5.2. リスク回避係数と正定値性の関係

4.1 節でも述べたように，リスク回避係数 R が大きくなると，行列 $\boldsymbol{F}$ は正定値符号行列になり，凸 2 次計画問題になる可能性が高くなる．このことを確かめるために，リスク回避係数 R の変化に対する係数 c_t の値の変化を調べる．c_t が正ならば行列 $\boldsymbol{F}$ は正定値符号行列になる．

図 2 を見てみよう．ケース 4, 5, 7 で c_t の値は負になっている場合がある[13]．c_t の値は漸化式になっているので，負の値や 0 に近い値をとると変動しやすいが，全体的にリスク回避係数 R が大きくなるにつれて，c_t の値が大きくなる様子を見ることができる．R が 0.3 以上ではすべてのケースで正定値符号行列になることがわかる．このことから，コスト関数の

[12] 実際の市場での取引においては，市場がオープンするときとクローズするときに取引が活発化し，流動性が高まると言われる．例に挙げた価格インパクト係数の場合，これはケース 7 に相当する．前場の終わりと後場の始めも取引が多い場合もあり，それはケース 4 に相当する．

[13] 他のパラメータを変化させるとケース 3 とケース 6 でも c_t は負になり得る．

期待値だけでなく，分散も考慮するモデルではそのリスク回避係数を大きくすると，問題は凸 2 次計画問題になり，数値計算も容易となる．

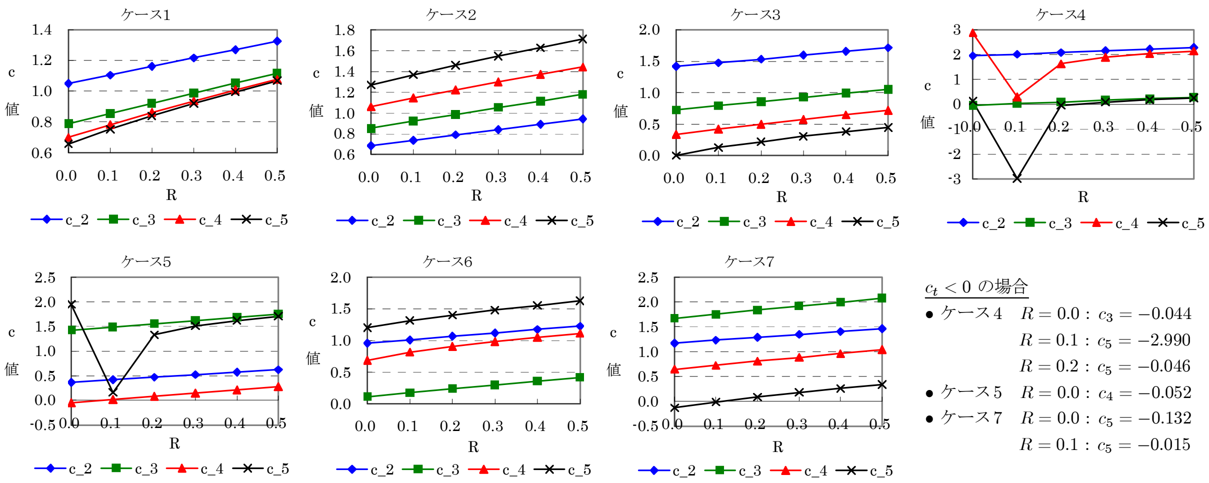


図 2: リスク回避係数と正定値性の関係

5.3. 基本設定パラメータを用いた分析

表 1 に c_t の値を示す．基本設定パラメータを用いると，ケース 1, 2, 3, 5, 6 は正定値符号行列を持つので，凸 2 次計画問題となり，ケース 4, 7 は非凸 2 次計画問題となる．

表 1: 正定値性の判定

ケース番号	c_2	c_3	c_4	c_5	正定値性
ケース 1	1.105	0.855	0.782	0.752	正定値
ケース 2	0.736	0.922	1.143	1.368	正定値
ケース 3	1.476	0.789	0.419	0.125	正定値
ケース 4	2.011	0.024	0.290	−2.990	非正定値
ケース 5	0.418	1.489	0.017	0.163	正定値
ケース 6	1.010	0.176	0.815	1.312	正定値
ケース 7	1.230	1.751	0.723	−0.015	非正定値

t 時点も含めて，それ以降の期間に購入が必要な量 w_t，t 時点における購入量 x_t，目的関数値を表 2 と表 3 に示す．w_1 と x_5 は，$w_1 = X$, $x_5 = w_5$ であるので省略する．表 2 に (35) 式で求めた最適解を示す．表 3 は 3.3 節で示した非負条件を付けて数理計画法ソフトウェア NUOPT で求めた最適解を示す．目的関数値には定数部分を含めている[14]．

[14] 目的関数値は (50) 式や (65) 式の最適値ではなく，定数部分を含めた

$$\mathrm{E}_1(C_T) + \frac{R}{2}\mathrm{Var}_1(C_T)$$

の値である．

表 2: 非負条件なしの最適解 (解析解)

ケース番号	w_2	w_3	w_4	w_5	x_1	x_2	x_3	x_4	目的関数値
ケース 1	69.8	46.9	28.8	13.7	30.2	22.9	18.1	15.1	106,883
ケース 2	29.6	12.1	5.5	2.1	70.4	17.4	6.7	3.3	103,321
ケース 3	154.0	199.4	220.4	184.9	−54.0	−45.4	−21.0	35.5	103,822
ケース 4	−1.8	−23.5	−53.0	−100.8	101.8	21.8	29.5	47.8	104,390
ケース 5	1751.7	4242.3	8139.5	813.0	−1651.7	−2490.6	−3897.2	7326.5	−20,025
ケース 6	187.4	241.7	45.8	13.5	−87.4	−54.2	195.9	32.3	100,834
ケース 7	−56.1	−147.1	−264.7	−325.4	156.1	91.0	117.6	60.7	105,486

表 3: 非負条件ありの最適解

ケース番号	w_2	w_3	w_4	w_5	x_1	x_2	x_3	x_4	目的関数値
ケース 1	69.8	46.9	28.8	13.7	30.2	22.9	18.1	15.1	106,883
ケース 2	29.6	12.1	5.5	2.1	70.4	17.4	6.7	3.3	103,321
ケース 3	100.0	100.0	100.0	83.9	0.0	0.0	0.0	16.1	106,002
ケース 4	45.6	45.6	17.7	17.7	54.4	0.0	27.9	0.0	103,433
ケース 5	100.0	38.3	38.3	3.8	0.0	61.7	0.0	34.4	103,452
ケース 6	100.0	100.0	19.0	5.6	0.0	0.0	81.0	13.4	104,285
ケース 7	31.9	31.4	31.4	31.4	68.1	0.5	0.0	0.0	103,709

表 3 を見ると，購入のみを分割して行う最適執行戦略で必要な非負条件を加えた場合でも，ケース 1,2 は同じ最適解となる．非負条件を加えた場合，数理計画問題としては制約がきつくなるので，目的関数は悪くなる (最小化問題では大きくなる).

各ケースごとに最適戦略を見てみると，予想通り，価格インパクト (θ_t の値) が小さいときにより多く購入を行うことがわかる．非負条件を付けた場合，θ_t の値が相対的に大きいときには購入していない．しかし，非負条件を付けない解析解の場合，ケース 1, 2, 3, 6 では特徴的であるが，その他のケースは特徴的でない．ケース 4, 7 は大域的最適解になっていないためであろう．ケース 5 に関しては，$t = 3$ までは大きく負の値を取り (売却し)，その後その分も含めて購入している．コストを示す目的関数がマイナス値を取っているが，この原因は平均価格が計算上マイナスになるという不具合が起きているからである．最適執行に伴う平均価格の変化を表 4 に示す．平均価格は最適解 x_t^* を用いて，(24) 式より以下のように求められる．

$$\overline{P}_t = P_0 + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{t-1}\theta_k x_k^* + \theta_t x_t^* \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{69}$$

非負条件なしのケース 5 では売却を行い価格を下げておいて，現実的にはありえないマイナスの価格で購入することを想定していることがわかる．これらの結果からもたとえ凸 2 次計画問題の場合でも非負制約を付けないで得られた最適解があまり意味のない解となる場合があることがわかるだろう．

表 4: 平均価格の推移

ケース番号	非負条件なし (解析解)					非負条件あり				
	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\overline{P}_3$	$\overline{P}_4$	$\overline{P}_5$	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\overline{P}_3$	$\overline{P}_4$	$\overline{P}_5$
ケース 1	1,030	1,052	1,069	1,083	1,096	1,030	1,052	1,069	1,083	1,096
ケース 2	1,023	1,034	1,040	1,044	1,047	1,023	1,034	1,040	1,044	1,047
ケース 3	910	854	836	861	921	1,000	1,000	1,000	1,011	1,038
ケース 4	1,039	1,079	1,088	1,180	1,136	1,021	1,020	1,031	1,030	1,037
ケース 5	−1,429	−2,040	−7,735	−5,293	−4,205	1,000	1,018	1,017	1,027	1,032
ケース 6	871	830	890	916	934	1,000	1,000	1,024	1,034	1,042
ケース 7	1,060	1,162	1,383	1,442	1,313	1,026	1,025	1,025	1,025	1,038

5.4. 感度分析

非負条件を含めて，以下のパラメータに対する感度分析を行う．その他のパラメータは基本設定と同じである．

① リスク回避係数：8 種類 ($R = 0.0, 0.1, 0.5, 1, 3, 5, 10, \infty$)

— R が大きくなると，コストの平均値よりもコストのばらつきを重視する．

② 価格インパクト係数の和：8 種類 ($S = 0.1, 0.3, 0.5, 1, 3, 5, 10, 20$)

— S は小さいほど，価格インパクトが小さくなり，市場の流動性が高いことを表す．

③ 価格インパクト係数の最大比率：8 種類 ($M = 1.1, 1.3, 1.5, 2, 3, 5, 7, 10$)

— M は大きいほど，価格インパクト (市場の流動性) の変動が大きいことを表す．

④ 期間数：6 種類 ($T = 5, 25, 45, 65, 85, 105$)

— 全体の時間の長さは一定として，期間数を増やす．σ_ε^2 と σ_ξ^2 は基本設定値 ($T = 5$ の値) の $\frac{5}{T}$ 倍として問題を解く．また，各ケースの θ_t の値は形状が同じになるように，基本設定値 ($T = 5$ の値) を $\theta_t^{(5)}$ とするならば，$\theta_1 = \theta_1^{(5)}$, $\theta_{\frac{T+3}{4}} = \theta_2^{(5)}$, $\theta_{\frac{T+1}{2}} = \theta_3^{(5)}$, $\theta_{\frac{3T+1}{4}} = \theta_4^{(5)}$, $\theta_T = \theta_5^{(5)}$ と設定する．

5.4.1. リスク回避係数

リスク回避係数と最適解の関係を図 3 に示す．リスク回避係数 R が大きくなるほど，早期に購入を行い，価格インパクトによる価格変動の影響を避けていることが分かる．(30) 式からも分かるように，$\alpha = 0$ ならば，$R \to \infty$ のとき，$w_t^* = 0 (t = 2, \ldots, T)$，すなわち $x_1^* = X$ となる．α の値 ($\alpha = 0.05$) が小さいので，$R \to \infty$ のときは価格インパクト係数の形状に関わらず，最初にほぼすべて購入すること ($x_1^* \approx X$) が分かる．

次に，コスト C_T の期待値 $\mathrm{E}(C_T)$ と標準偏差 $\sqrt{\mathrm{Var}(C_T)}$ の関係を図 4 に示す．リスク回避係数 R を小さくすると，コストの期待値は小さくなるが，標準偏差は大きくなり，それらの間にはトレードオフの関係があることが分かる．

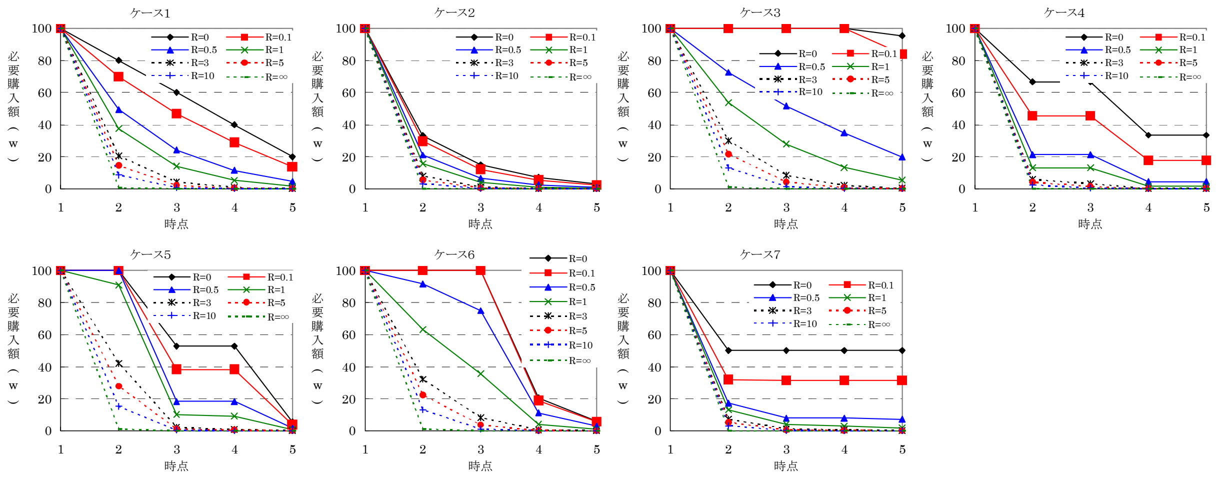


図 3: リスク回避係数と最適解の関係

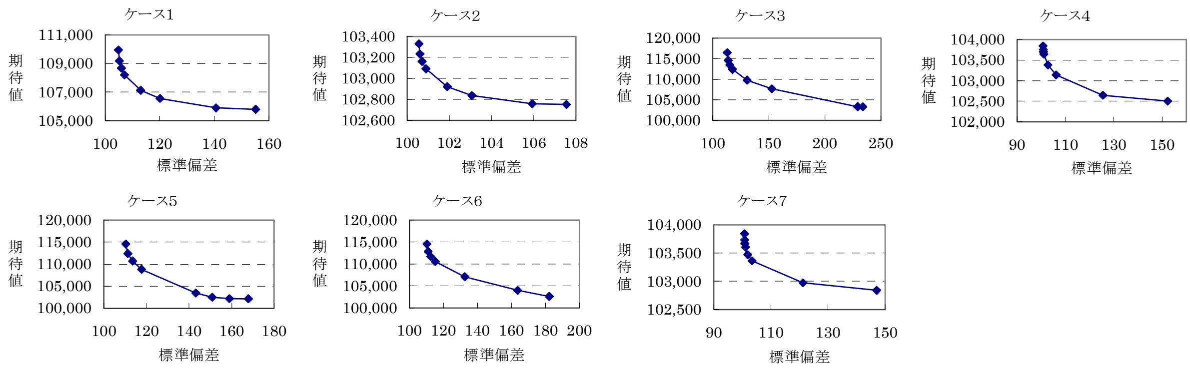


図 4: コスト C_T の期待値 $\mathrm{E}(C_T)$ と標準偏差 $\sqrt{\mathrm{Var}(C_T)}$ の関係

5.4.2. 価格インパクト係数の和

図 5 に価格インパクト係数の和と最適解の関係を示す．

価格インパクト係数の和が小さいほど早期に購入を行う[15]．これは θ_t の値そのものが小さくなるほど早期に購入した方がよいことを表している．たとえば，ケース 4 では S が大きいときには θ_t の値が小さい 1, 3, 5 時点で購入するが， S が小さくなると，1 時点で多く購入することになる．同様に，ケース 5 とケース 6 では，θ_1 は他の θ_t に比べて大きいが，S が小さくなる場合には θ_1 の値も小さくなるので早期に購入することになる．しかし， S が大きくなると，ケース 5 では θ_t の値が小さい 2 時点と 4 時点で，ケース 6 では時点 3 で主に購入することになる．

5.4.3. 価格インパクト係数の最大比率

図 6 に価格インパクト係数の最大比率と最適解の関係を示す．

M が大きくなると，ケース 2 ではより早くに購入し，ケース 3 ではより遅く購入することが最適解となる．ケース 2 では $\theta_5 = M\theta_1$，ケース 3 では $\theta_1 = M\theta_5$ となり，相対的に価格インパクトの差が生じるため，より価格インパクトの小さい時点で購入を行う．ケース 4〜7 においても，M が大きくなると，価格インパクト係数に合わせて購入量が決まるのが

[15]紙面の都合上省略するが，$R = 0$ のときには，最適解は価格インパクト係数の和の影響を受けない．

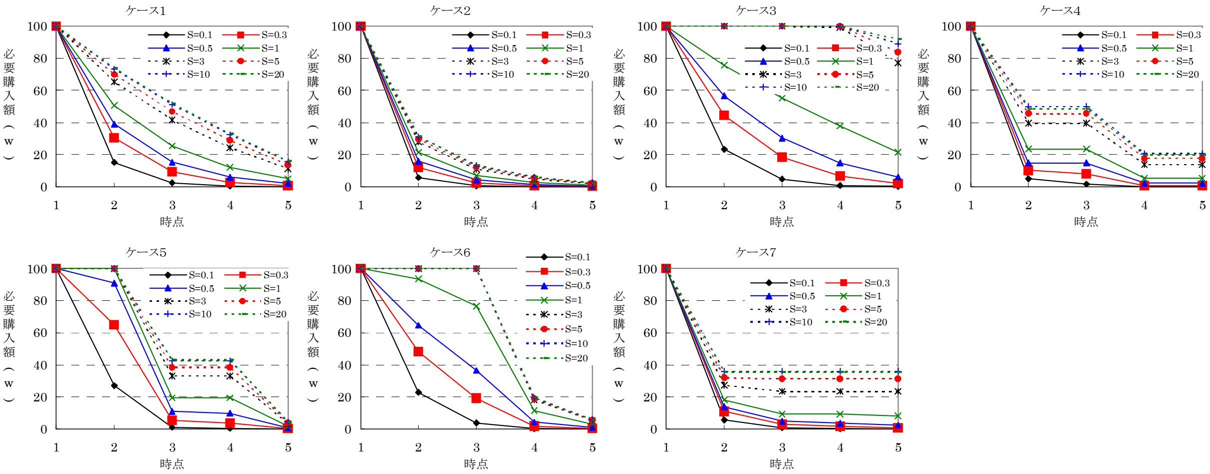


図 5: 価格インパクト係数の和と最適解の関係

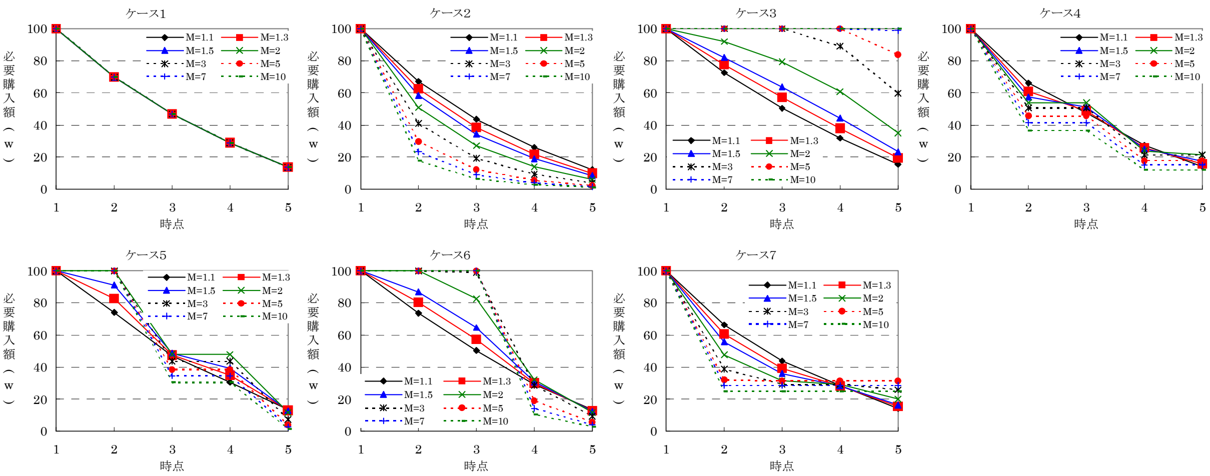


図 6: 価格インパクト係数の最大比率と最適解の関係

分かる．たとえば，ケース 4 では $\theta_2 = \theta_4 = M\theta_1(\theta_1 = \theta_3 = \theta_5)$ となるので，$M \geq 3$ では $x_2 = x_4 = 0(w_2 = w_3,\, w_4 = w_5)$，ケース 5 では $\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = M\theta_1(\theta_2 = \theta_4)$ となるので，$M \geq 3$ では $x_1 = x_3 = 0(w_1 = w_2,\, w_3 = w_4)$ となり，x_5 も小さくなる．

5.4.4. 期間数

図 7 に期間数と最適解から求めた累積購入量の関係を示す．累積購入量 Q_k は

$$Q_k = \sum_{t=1}^{k} x_t = X - w_{k+1}$$

で計算する．ただし，同じ時間の長さでの取引を表すために，k 時点は時間 $\frac{k}{T}$ になるように変換して図示している[16]．期間数を増やすことにより，購入機会が増加し，各時点での購入量は小口化する．予想通り，同じ価格インパクト係数の形状 (ケース) に対しては似た傾向の結果が得られる．また，図 7 の右下に目的関数値を示す．小口化されると，価格インパクトは小さくなるため，目的関数値は小さくなる[17]．

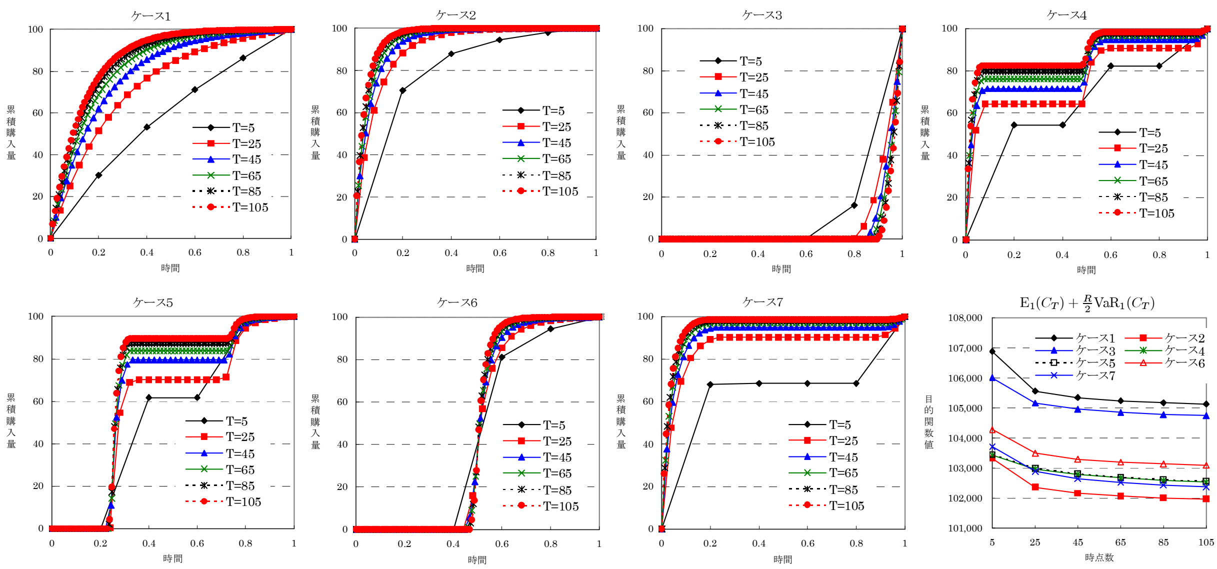
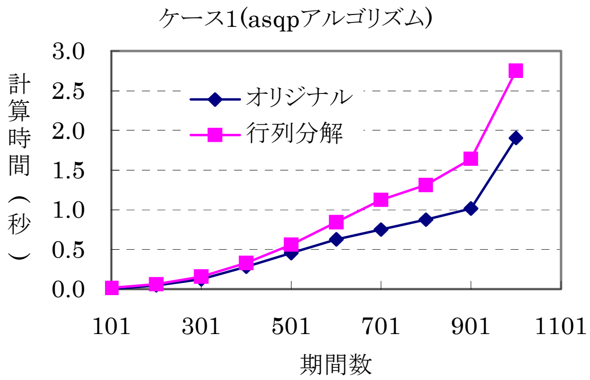


図 7: 期間数と累積購入量の関係

図 8 にケース 1 とケース 7 の様々な期間数に対する問題を解いたときの計算時間を示す．「オリジナル」は 3.3 節の定式化,「行列分解」は 4.2 節の定式化で問題を解いたときの計算時間である．ケース 1 は計算を行ったすべての期間数で凸 2 次計画問題になるので，asqp アルゴリズムを用いて問題を解いている．一方，ケース 7 は計算を行ったすべての期間数で非凸 2 次計画問題になるので，global アルゴリズムを用いて問題を解いている．

ケース 1 の場合，期間数が 1,000 になった場合でも 2〜3 秒程度で解くことができる.「行列分解」の定式化では制約式と決定変数の増加で計算時間が少しかかっているが，どちらの定式化でも計算時間は短く，ほとんど違いは見られない．それに対して，ケース 7 に対する「オリジナル」の定式化では $T = 11$ のとき約 46 秒，$T = 13$ のときには約 360 秒の計算時間がかかり，少ない期間数でも多くの計算時間が必要である．それに対し,「行列分解」の

[16] 時間 0 は 0 時点で累積購入量が 0，時間 1 は T 時点で累積購入量が X になる．
[17] T が異なっても価格インパクト係数の形状は同じになるように設定したので，ほぼ同じ設定のもとで問題を解いている．ただし，全体の時間に対する 1 時点目が T によって異なるので厳密には同じとは言えない．



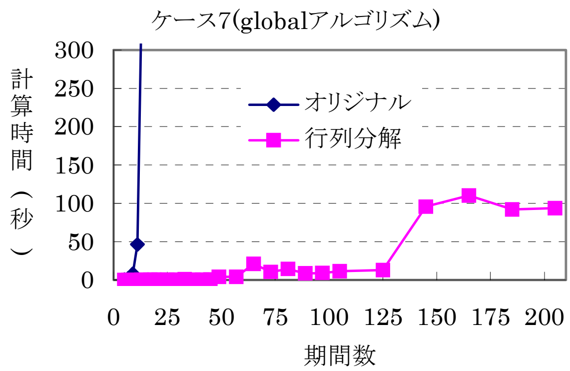


図 8: 期間数と計算時間の関係

定式化では $T = 33$ までは 1 秒以下で，$T = 125$ でも約 13 秒，それ以上の期間でも約 100 秒で問題を解くことが可能である．

このことより，非凸 2 次計画問題に対して global アルゴリズムを用いる必要がある場合には，行列分解に基づく定式化を用いると計算時間の上で極めて有利に問題を解くことができることが分かる．

6. 結論

本研究では対象資産が 1 つで価格インパクト関数が線形関数の場合の最適執行戦略に関する議論を行った．価格インパクト関数における確率変数が時系列的に独立の場合，動的計画法で求められた最適解が数理計画問題から得られる最適性条件を満たすことを Huberman and Stanzl[4] のモデルを用いて確かめた．さらに，非負条件を含む数理計画問題の定式化を示した．線形価格インパクト関数の特徴を生かして，行列分解を行い，正定値符号行列となる条件を解析的に導く方法を示し，それを利用した定式化の方法も示した．

Huberman and Stanzl[4] の線形インパクト関数を用いて数値分析を行った．非負制約を含めないと，価格インパクト関数の形状によってはたとえ凸計画問題であっても非現実的な最適解が得られることが分かった．特に非凸 2 次計画問題では有界にならないため，注意が必要である．それに対し，非負制約を含めることによって現実的な最適解を得ることができることが分かった．ただし，価格インパクト係数の値によっては非凸 2 次計画問題となるので，大域的最適化アルゴリズムを持つソフトウェアを使う必要がある．予想通り，リスク回避係数が大きくなるとコストの分散の影響が大きくなり，目的関数に含まれる二次形式の行列は正定値符号行列となり，凸 2 次計画問題となることも確かめることができた．7 種類の価格インパクト係数の組み合わせを用いて，リスク回避係数，価格インパクト係数の和と最大比率を変えたときの感度分析を行った．結果を見ると，直感に合う最適解が得られ，うまくモデル化を行うことができていると言えるだろう．また期間数を増やしたとき，凸計画問題であれば，1000 期間の場合でも 2〜3 秒で解けるが，非凸計画問題では 200 期間で 100 秒近く計算にかかることが分かった．ただし，オリジナルの定式化では 13 期間で約 6 分の計算時間がかかり，期間数の増加に対し現実的には限界がある．それに対し，行列分解の定式化は計算上有利である可能性があることを示すことができた．

本研究では対象資産を 1 つとしているが，複数の場合にも容易に拡張できると考えられる．今後は，複数資産の扱いと同時に，最適執行モデルを平均・分散モデルなどのポート

フォリオ最適化の枠組みの中に組み入れたモデル化を行うことが必要であろう.

参考文献

[1] R. Almgren and N. Chriss: Value under liquidation. *Risk*, **12** (December 1999), 61–63.

[2] R. Almgren and N. Chriss: Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, **3** (Winter 2000/2001), 5–39.

[3] D. Bertsimas and A.W. Lo: Optimal control of execution cost. *Journal of Financial Markets*, **1** (1998), 1–50.

[4] G. Huberman and W. Stanzl: Optimal liquidity trading. *Review of Finance*, **9** (2005), 165–200.

[5] H. Konno and K. Suzuki: A fast algorithm for solving large scale mean variance models by compact factorization of covariance matrices. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **35** (1992), 93–104.

枇々木 規雄

〒223-8522 横浜市港北区日吉 3–14–1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

E-mail : hibiki@ae.keio.ac.jp

ABSTRACT

OPTIMAL EXECUTION STRATEGY WITH LINEAR PRICE IMPACT FUNCTIONS

Norio Hibiki
Keio University

When fund managers or traders in the financial institutions trade a large volume of a stock, the trading volume might impact the stock price. This paper discusses optimal execution strategies with linear price impact functions for trading a large volume of a stock. At first, we verify the fact that an optimal solution derived by dynamic programming algorithm can be satisfied with the optimality condition via mathematical programming formulation if a random variable in a price impact function is independently and identically distributed. We formulate the mathematical programming model with non-negativity constraints. The type of the problem can be formulated as a quadratic programming, but it is not always convex. In this paper, we decompose the matrix derived from the linear price impact function, and we calculate a closed-form condition that the matrix is positive definite. Similarly, we propose a model using matrix decomposition to solve the problem fast. We examine the model using a linear impact function of Huberman and Stanzl(2005) with numerical examples. We analyze the sensitivity of various parameters for seven kinds of the coefficients of linear price impact.